ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

Э. А. ДАНИЕЛЯН

К АСИМПТОТИКЕ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ И ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМ $\bar{M}_r/\bar{G}_r/1/\infty$ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗКЕ

1°. *Введение.* В теории приоритетных систем за последние годы особенно интенсивно изучались однолинейные системы [1—2]. В случае поступающих пуассоновских потоков и произвольных длительностей обслуживания вызовов получено много точных результатов. Результаты при усложнении структуры систем становятся необозримо громоздкими. Следовательно, возникает вопрос об упрощении полученных формул, например, в случае, когда длительность обслуживания вызовов, поступающих за единицу времени в среднем меньше единицы, но близка к ней. Тогда такие характеристики систем с ожиданием как период занятости, время ожидания и т. д. имеют тенденцию безгранично возрастать. Говорят, что система находится в условиях „критической загрузки".

В системах массового обслуживания можно выделять разные числовые характеристики, которые можно рассматривать как „малые" параметры. Пусть мы имеем приоритетную систему с ожиданием и несколькими входящими потоками. Средняя суммарная длительность обслуживания вызовов первых k приоритетных классов ρ_{k1} (чем меньше номер приоритетного класса, тем выше его приоритет) носит название загрузки прибора первыми k классами. Если $\rho_{k1} < 1$, то, как известно (см. [2]), для многих одноканальных приоритетных систем существует стационарное распределение первых k потоков и получено много точных результатов. При $\rho_{k1} \uparrow 1$ мы находимся в условиях критической загрузки для вызовов первых k приоритетных классов. Тогда величину $\rho_k = 1 - \rho_{k1}$ можно рассматривать как малый параметр и изучение указанных выше характеристик представляет собой задачу асимптотического анализа.

Ниже предполагается, что при $\rho_k \uparrow 1$ фиксированы средние длительности обслуживания вызовов всех приоритетных классов.

Неприоритетная система $M/G/1/\infty$ при критической загрузке изучалась О. В. Висковым [3]*.

* Существует довольно обширная литература по системам массового обслуживания при критической загрузке (Прохоров, Инглегарт, Хук и др.), но нам близка по методам лишь работа [3].

В § 3 настоящей работы, следуя Вискову, изучается асимптотика моментов периодов занятости, описанных ниже систем. Висков установил для системы $M/G/1/\infty$ порядок моментов периода занятости при критической загрузке. Оказывается, что показано в § 3, помимо порядков можно вычислить предел нормированных моментов периодов занятости не только в неприоритетной, но и в некоторых приоритетных $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ системах.

Общая предельная теорема при критической загрузке для времени ожидания начала обслуживания вызовов k-го потока, если вызовы каждого потока обслуживаются в порядке поступления, получена в § 4. Предельное распределение содержит как частный случай результат, выведенный в [3].

2. Описание систем и обозначения. В однолинейную систему массового обслуживания поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания всех вызовов независимы, а распределение их для вызовов потока с номером i (приоритета i) есть $B_i(t)$ $(i=\overline{1, r})$. Вызовы приоритета $i (i<j)$ из очереди берутся на прибор раньше вызовов приоритета j. Будут рассмотрены системы $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ с относительными разновидностями абсолютного (дообслуживание, потеря, обслуживание заново прерванного вызова) приоритета (см. [2]).

Через $\Pi_k(t)$ $(k=\overline{1, r})$ обозначим функцию распределения (ф. р.) периода занятости (k-периода) обслуживанием вызовов первых k потоков. В частности, $\Pi(t)=\Pi_r(t)$ — ф. р. периода занятости системы. Начавшийся с обслуживания вызова приоритета i k-период называем ki-периодом, а его ф. р. обозначаем $\Pi_{ki}(t)$. $H_k(t)$ — ф. р. (k-цикла) времени от поступления вызова приоритета k в свободную от вызовов систему до первого момента освобождения системы от этого вызова и вызовов более высокого приоритета, времени пребывания вызова приоритета k на приборе.

Положим

$$\beta_i(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dB_i(t), \qquad \pi_i(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}d\Pi_i(t) \qquad (i=\overline{1, r}),$$

$$\pi_r(s)=\pi(s); \qquad h_i(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dH_i(t), \quad \beta_{i1}=\int_0^{\infty} e^{-st}dB_i(t),$$

$$\sigma_i=a_1+\cdots+a_i \quad (i=\overline{1, r}), \quad \sigma=\sigma_r.$$

Считаем в момент $t=0$ систему свободной от вызовов. В дальнейшем будем предполагать, что все моменты распределений $B_i(t) (i=\overline{1, r})$ конечны, следовательно

$$\beta_i(s)=\sum_{n\geq 0} b_{ni}s^n, \quad b_{0i}=1, \quad b_{1i}=-\beta_{i1}. \tag{2.1}$$

Пусть выполнены условия ненасыщения систем первыми k потоками, имеющие вид (см. [2]):

1. Относительный приоритет (и абсолютный) с дообслуживанием

$$\rho_{k1} = a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21} + \cdots + a_k\beta_{k1} < 1; \tag{2.2}$$

2. Абсолютный приоритет с потерей

$$\rho_{k1} = a_1\beta_{11} + \frac{a_2}{\sigma_1}[1 - \beta_2(\sigma_1)] + \cdots + \frac{a_k}{\sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(\sigma_{k-1})] < 1; \tag{2.3}$$

3. Абсолютный приоритет с обслуживанием заново

$$\rho_{k1} = a_1\beta_{11} + \frac{a_2}{\sigma_1}\left[\frac{1}{\beta_2(\sigma_1)} - 1\right] + \cdots + \frac{a_k}{\sigma_{k-1}}\left[\frac{1}{\beta_k(\sigma_{k-1})} - 1\right]. \tag{2.4}$$

3°. Моменты периодов занятости. *А. Предварительный результат.* Обозначим через ρ_{k2} величину, имеющую вид

1. $$\rho_{k2} = a_1b_{21} + a_2b_{22} + \cdots + a_kb_{2k}, \tag{3.1}$$

2. $$\rho_{k2} = a_1b_{21} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\rho_i}{\sigma_i}[(\rho_i - \rho_{i+1}) - a_{i+1}\beta'_{i+1}(\sigma_i)], \quad \rho_i = 1 - \rho_{i1}, \tag{3.2}$$

3. $$\rho_{k2} = a_1b_{21} + \sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{\rho_i(\rho_i - \rho_{i+1})}{\sigma_i} - \frac{(\rho_i - \rho_{i+1})^2}{a_{i+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{i+1}\beta'_{i+1}(\sigma_i)\rho_i}{\sigma_i[\beta_{i+1}(\sigma_i)]^2}\right], \qquad \rho_i = 1 - \rho_{i1}, \tag{3.3}$$

соответствующую системам, очередность которых указана в конце § 2.

Для трех разновидностей систем с абсолютным приоритетом и системы с относительным в [2], гл. 4 приведены теоремы, позволяющие определить функции $\pi_k(s)$, $\pi_{ki}(s)$ $(k = \overline{1, r};\ i = \overline{1, k})$, $h_k(s)$. Мы объединим эти теоремы в одну, в редакции, пригодной для дальнейшего асимптотического изучения моментов $\pi_k(s)$ и $\pi_{kk}(s)$.

Теорема 1. а) *Система функциональных уравнений* (*при* $\rho_{r1} < 1$)

$$\pi_{kk}(s) = \tilde{h}_k(s + a_k - a_k\pi_{kk}(s)) \qquad (k = \overline{1, r}), \tag{3.4}$$

$$\sigma_k\pi_k(s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + a_k - a_k\pi_{kk}(s)) + a_k\pi_{kk}(s) \quad (k = \overline{1, r}). \tag{3.5}$$

Вместе с уравнениями

1. $$\tilde{h}_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)) \qquad (k = \overline{1, r}), \tag{3.6}$$

2. $$\tilde{h}_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s) \tag{3.7}$$

$$(k = \overline{1, r}),$$

$$3.\ \tilde{h}_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}\left[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})\right]\pi_{k-1}(s)\right\}^{-1} \tag{3.8}$$

$$(k = \overline{1, r}),$$

соответствующими системам в очередности, указанной в конце § 2, определяют единственные функции $\pi_k(s)$, $\pi_{kk}(s)$, $\tilde{h}_k(s)$, *аналитические в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 0$, *где* $|\pi_k(s)| < 1$, $|\pi_{kk}(s)| < 1$, $|\tilde{h}_k(s)| < 1$.

б) *Тогда*

$$\sigma_k\pi_{1k} = \sigma_k\pi_k'(0) = -\frac{\rho_{k1}}{\rho_k}, \tag{3.9}$$

$$\sigma_k\pi_{2k} = \frac{1}{2}\sigma_k\pi_k''(0) = \frac{\rho_{k2}}{\rho_k^3}, \tag{3.10}$$

$$\rho_k = 1 - \rho_{k1},$$

$$a_k\tilde{h}_{1k} = a_k\tilde{h}_k'(0) = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}, \tag{3.11}$$

$$a_k\tilde{h}_{2k} = \frac{1}{2}a_k\tilde{h}_k''(0) = \frac{\rho_{k2}\rho_{k-1} - \rho_{k-12}\rho_k}{\rho_{k-1}^3}. \tag{3.12}$$

Замечание 1. При прямом порядке обслуживания вызовов внутри k-го приоритетного класса $h_k(s) = \tilde{h}_k(s)$.

Замечание 2. Если $0 < \bar{\rho}_{k-1} = \lim\limits_{\rho_k \downarrow 0} \rho_{k-1}$, $\bar{\rho}_{ji} = \lim\limits_{\rho_k \downarrow 0} \rho_{ji}$ $(j = \overline{1, r};\ i = 1, 2)$, то

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} a_k\tilde{h}_{1k} = -1, \tag{3.13}$$

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} a_k\tilde{h}_{2k} = \frac{\bar{\rho}_{k2}}{\bar{\rho}_{k-1}^2}. \tag{3.14}$$

Если же $\bar{\rho}_{k-1} = 0$, $c_k = \lim\limits_{\rho_{k-1} \downarrow 0} (\rho_k/\rho_{k-1}) < 1$, то

$$\lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} a_k\tilde{h}_{1k} = -(1 - c_k), \tag{3.15}$$

$$\lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} \rho_{k-1}^2 a_k\tilde{h}_{2k} = (1 - c_k)\bar{\rho}_{k-12}. \tag{3.16}$$

Б. *Формулировка результата.* Все r потоков вызовов могут быть разделены на l групп потоков, причем к i-ой группе $(i = \overline{1, l})$ принадлежат те потоки, у которых разность между единицей и загрузкой прибора вызовами этого потока и вызовами более высокого приоритета — бесконечно малая более высокого порядка, чем у вызовов из групп с номерами $\overline{1, i-1}$, и порядка ниже, чем из групп $\overline{i+1, l}$. Пусть p — номер такой, что впервые загрузка вызовами первых p потоков стремится к единице, а первых $p-1$ — к числу, строго меньшему единицы.

Исходя из формул (2.1) и (3.4)—(3.8), нетрудно, шаг за шагом, доказать существование и конечность всех моментов у ф. р. $\widetilde{H}_k(t)$, $\Pi_k(t)$, $\Pi_{kk}(t)$, $k=\overline{1, r}$. Следовательно, можно писать $\left(\widetilde{h}_k(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} d\widetilde{H}_k(t)\right)$

$$\pi_{kk}(s) = \sum_{n\geq 0} \pi_{nkk}\cdot s^n, \tag{3.17}$$

$$\pi_k(s) = \sum_{n\geq 0} \pi_{nk}\cdot s^n, \tag{3.18}$$

$$\widetilde{h}_k(s) = \sum_{n\geq 0} \widetilde{h}_{nk}\cdot s^n. \tag{3.19}$$

Очевидно, что при $\rho_p \downarrow 0$, $\overline{\rho}_{p-1} > 0$ величины π_{npp}, π_{ap}, $\widetilde{h}_{np+1}$ неограниченно возрастают, следовательно, неограниченно возрастают и величины π_{nkk}, π_{nk}, $\widetilde{h}_{nk+1}$ для любого $k \geqslant p$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\rho_p \downarrow 0$, $\overline{\rho}_{p-1} > 0$, *тогда для всех* $k \geqslant p$ *существуют конечные пределы*

$$\overline{\pi}_{nkk} = \lim_{\rho_p \downarrow 0} \frac{\rho_k^{2n-1} a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \quad (n \geqslant 1), \tag{3.20}$$

$$\overline{\pi}_{nk} = \lim_{\rho_p \downarrow 0} \rho_k^{2n-1}\cdot c_k \pi_{nk} \quad (n \geqslant 1), \tag{3.21}$$

$$\overline{h}_{nk+1} = \lim_{\rho_p \to 0} a_{k+1} \rho_k^{2n-2} \widetilde{h}_{nk+1} (n > 1), \tag{3.22}$$

б) *При* $c_k = 0$ $(k > p)$

$$\overline{\pi}_{nk} = \overline{\pi}_{nkk} = (-1)^n \overline{\rho}_{p-1,2}^{\,-n-1} \cdot \frac{2^n (2n-3)!!}{n!} \quad (n \geqslant 2); \tag{2.23}$$

при любом $k \geqslant p$

$$\overline{h}_{nk+1} = (1 - c_{k+1})\cdot \overline{\pi}_{nk} \quad (n \geqslant 2); \tag{3.24}$$

если $c_k > 0$, *то* $\overline{\pi}_{nkk}$ *и* $\overline{\pi}_{nk}$ *вычисляются по рекуррентным соотношениям*

$$\overline{\pi}_{nkk} = \sum{}' \frac{\overline{h}_{mk}\cdot m!}{k_1!\, k_2! \dots k_{n-1}!} \{-\overline{\pi}_{2kk}\}^{k_1} \dots \{-\overline{\pi}_{n-1kk}\}^{k_{n-1}} c_k^{m-2}, \tag{3.25}$$

$$\overline{\pi}_{nk} = \sum \frac{\overline{\pi}_{mk-1}\cdot m!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!} \{-\overline{\pi}_{2kk}\}^{k_1} \dots \{-\overline{\pi}_{nkk}\}^{k_n} \cdot c_k^{m-1}, \tag{3.26}$$

где суммируем по неотрицательным целочисленным решениям уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$$

и (3.27)

$$m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

лишь для (3.25) $k_n \equiv 0$.

B. *Доказательство теоремы 2.* При доказательстве неоднократно используется формула Бруно [4], гл. 2 об n-ой производной сложной функции. Пусть

$$A(s) = f(g(s))$$

и

$$A_n(s) = A_s^{(n)}(s), \qquad f_n(s) = f_s^{(n)}(s), \qquad g_n(s) = g_s^{(n)}(s).$$

Тогда

$$A_n(s) = \sum \frac{n! f_m(g(s))}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left(\frac{g_1(s)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g_2(s)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g_n(s)}{n!}\right)^{k_n}, \tag{3.28}$$

где суммируем по векторам $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, являющимися целочисленными неотрицательными решениями уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n,$$

причем

$$m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

1. Выясним порядок величин π_{nkk}, π_{nk}, $\tilde{h}_{nk+1}$, если $\rho_k \downarrow 0$, $\bar{\rho}_{k-1} > 0$. Применим формулу Бруно к соотношению

$$\frac{a_k \pi_{kk}^{(n)}(s)}{n!} = \sum \frac{a_k \tilde{h}_k^{(m)}(\cdot)}{k_1! k_2! \ldots k_n!} \left[1 - a_k \pi_{kk}^{(1)}(s)\right]^{k_1} \times$$

$$\times \left\{- \frac{a_k \pi_{kk}^{(2)}(s)}{2!}\right\}^{k_2} \cdots \left\{- \frac{a_k \pi_{kk}^{(n)}(s)}{n!}\right\}^{k_n}, \tag{3.29}$$

где суммируем по (3.27) и обозначено

$$(\cdot) = s + a_k - a_k \pi_{kk}(s). \tag{3.30}$$

Из (3.17) и (3.19) имеем

$$\frac{\pi_{kk}^{(n)}(0)}{n!} = \pi_{nkk}, \qquad \left.\frac{\tilde{h}_k^{(n)}(\cdot)}{n!}\right|_{s=0} = \tilde{h}_{nk}.$$

Заметив, что одним из решений уравнений (3.27) является вектор $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ и $m = 1$ и, воспользовавшись равенством (3.11), из (3.29) в точке $s = 0$ получаем

$$\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} a_k \pi_{nkk} = \sum \frac{a_k \tilde{h}_{mk} \cdot m!}{k_1!\, k_2! \ldots k_{n-1}!} \{1 - a_k \pi_{1kk}\}^{k_1} \{-a_k \pi_{2kk}\}^{k_2} \ldots \{-a_k \pi_{n-1kk}\}^{k_{n-1}}, \tag{3.31}$$

где суммируем как в (3.25). Теперь утверждение наше доказывается методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение следует из равенства

$$a_k \pi_{1kk} = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k}. \tag{3.32}$$

Из (3.31) имеем

$$\frac{\rho_k^{2n-1} \cdot a_k \pi_{n\,kk}}{\rho_{k-1}} = \sum \frac{\rho_{k-1}^{2m-2} \cdot \tilde{a}_k \cdot h_{mk} \cdot m!}{k_1!\, k_2! \ldots k_{n-1}!} \left\{ \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} - \frac{\rho_k \cdot a_k \pi_{1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_1} \times$$

$$\times \left\{ - \frac{\rho_k^3 \cdot a_k \pi_{2kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_2} \cdots \left\{ - \frac{\rho_k^{2n-3} \cdot a_k \pi_{n-1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_{n-1}} \cdot \left(\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \right)^{m-2}, \tag{3.33}$$

если принять во внимание, что $k_1 + 3k_2 + \cdots + (2n-3)\, k_{n-1} = 2n - m$. С другой стороны, очевидно, что $m \geqslant 2$, следовательно, конечные пределы (3.20) существуют.

Величины $\bar{\pi}_{nkk}$ можно вычислить. Заметим, что в (3.33) ненулевыми являются слагаемые, у которых $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2$. В этом случае следует решить в целых неотрицательных числах систему

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2, \\ k_1 + 2k_2 + \cdots + (n-1)\, k_{n-1} = n. \end{cases} \tag{3.34}$$

Решениями этой системы при $n = 2m$ будут

$$k_j = k_{2m-j} = 1 \; (j = \overline{1, m-1}); \; k_i = 0 \text{ при } i \neq j;\ 2m - j.$$

и

$$k_m = 2, \; k_i = 0 \text{ при } i \neq m,$$

а при $n = 2m + 1$

$$k_j = k_{2m+1-j} = 1 \quad (j = \overline{1, m}); \; k_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j;\ 2m + 1 - j.$$

Следовательно, на основе (3.33) и (3.16) имеем

$$\bar{\pi}_{nkk} = \bar{\rho}_{k-12} \cdot \{\bar{\pi}_{1kk} \cdot \bar{\pi}_{n-1kk} + \cdots + \bar{\pi}_{n-1kk} \cdot \bar{\pi}_{1kk}\} \quad (n \geqslant 2), \tag{3.35}$$

откуда видно, что последовательность $\bar{\pi}_{2kk}, \bar{\pi}_{3kk}, \bar{\pi}_{4kk}, \ldots$, является сверткой последовательностей $\bar{\rho}_{k-12} \cdot \bar{\pi}_{1kk}, \bar{\rho}_{k-12}\, \bar{\pi}_{2kk}, \bar{\rho}_{k-12} \bar{\pi}_{3kk}, \ldots$ и $\bar{\pi}_{1kk}, \bar{\pi}_{2kk}, \bar{\pi}_{3kk}, \ldots$, значит

$$\sum_{n \geqslant 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n = \bar{\rho}_{k-12} \cdot \left(\sum_{n \geqslant 1} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n \right)^2. \tag{3.36}$$

Выделяя первый член в сумме правой части (3.36), равный по (3.32), (3.20) s, получаем относительно $z = \sum\limits_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n$ квадратное уравнение

$$\bar{\rho}_{k-12} \cdot z^2 - (2s \cdot \bar{\rho}_{k-12} + 1) z + \bar{\rho}_{k-12} \cdot s^2 = 0. \tag{3.37}$$

Так как $\sum\limits_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n /_{s=0} = 0$, то берем только один из корней квадратного уравнения (3.37)

$$\sum_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n = s - \frac{1}{2\bar{\rho}_{k-12}} \left\{ \sqrt{1 + 4s \cdot \bar{\rho}_{k-12}} - 1 \right\}. \tag{3.38}$$

Раскладывая в ряд по биному Ньютона правую часть (3.38) по степеням s и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в правой и левой частях (3.38), получаем для $\bar{\pi}_{nkk}$ (3.23).

Теперь докажем существование конечных пределов (3.21). Из (3.5) по формуле Бруно выводим (используя еще (3.18) и (3.27))

$$\rho_k^{2n-1} \cdot \sigma_k \cdot \pi_{nk} = \sum \frac{m!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!} \cdot \rho_{k-1}^{2m-1} \cdot \sigma_{k-1} \cdot \pi_{mk-1} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} - \frac{\rho_k \cdot a_k \pi_{1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_1} \cdot \left\{ - \frac{\rho_k^3 \cdot a_k \pi_{2kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_2} \dots$$
$$\dots \left\{ - \frac{\rho_k^{2n-1} a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_n} \cdot \left(\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \right)^{m-1} + \frac{\rho_k^{2n-1} \cdot a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \cdot \rho_{k-1}, \tag{3.39}$$

где суммирование производится как в (3.28).

Очевидно, что в (3.39) из-за $m \geqslant 1$ конечный предел (3.21) существует всегда, причем при $\rho_k \downarrow 0$ ненулевыми оказываются лишь пределы последнего слагаемого и того, у которого $m = 1$, $k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$, $k_n = 1$. Следовательно, из (3.9) и выражения (3.23) для $\bar{\pi}_{nkk}$ имеем (3.23) для $\bar{\pi}_{nk}$.

Осталось выяснить порядок роста величин $a_{k+1} \cdot \bar{h}_{nk+1}$ при $\rho_k \downarrow 0$.

Нетрудно из (3.6)—(3.8) убедиться в существовании конечных пределов (3.22). Покажем как можно вычислить $\bar{h}_{nk+1}$, например, в наиболее трудном случае, для системы с обслуживанием заново. Помножим равенство (3.8) на $a_{k+1} \cdot \rho_k^{2n-2}$ и продифференцируем обе стороны его n раз в точке $s = 0$. После чего перейдем к пределу при $\rho_k \downarrow 0$. Ясно, что ненулевым окажется лишь предел члена, у которого сомножителем является π_{nk}. Этот член можно выделить так. Продифференцируем выражение (3.8), помноженное на $a_{k+1} \rho_k^{2n-2}$, и возьмем слагаемое с $\sigma_k \cdot \pi_k'(s)$

$$a_{k+1}\cdot\rho_k^{2n-2}\cdot\frac{\beta_{k+1}(s+\sigma_k)\,\dfrac{\sigma_k}{s+\sigma_k}\,\{1-\beta_k(s+\sigma_k)\}}{\sigma_k\left\{1-\dfrac{\sigma_k}{s+\sigma_k}\,[1-\beta_{k+1}(s+\sigma_k)]\,\pi_k(s)\right\}^2}\cdot\sigma_k\pi'_k(s). \tag{3.40}$$

Именно, при $(n-1)$-кратном дифференцировании (3.40) появится слагаемое с $\sigma_k\pi_{nk}$ в точке $s=0$, которое и следует выделить. Коэффициент при $\sigma_k\cdot\pi'_k(s)$ из (3.40) после подстановки туда $s=0$ дает искомый коэффициент у $\sigma_k\cdot\pi_{nk}$. Таким образом

$$\bar{h}_{nk+1}=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\frac{a_{k+1}}{\sigma_k}\left[\frac{1}{\beta_{k+1}(\sigma_k)}-1\right]\cdot\rho_k^{2n-2}\cdot\sigma_k\cdot\pi_{nk}=$$

$$=\lim_{\rho_k\downarrow 0}(\rho_k-\rho_{k+1})\,\rho_k^{2n-2}\cdot\sigma_k\cdot\pi_{nk}=1\,(1-c_{k+1})\,\bar{\pi}_{nk}\qquad(n\geqslant 2).$$

Нетрудно видеть, что формула (3.24) верна для всех наших систем.

2. Пусть $\rho_{k-1}\downarrow 0$. Каков порядок величин π_{nkk}, π_{nk}, $\tilde{h}_{nk+1}$? а) Рассмотрим сначала случай $\bar{\rho}_{k-2}>0$. Тогда $\bar{\pi}_{nk-1k-1}$, $\bar{\pi}_{nk-1}$, $\bar{h}_{nk}$ вычисляются по формулам (3.20)—(3.24) с заменой k на $k-1$.

По формулам (3.33), (3.39), которые справедливы всегда, методом математической индукции с использованием (3.24) доказывается существование конечных пределов (3.20), (3.21) в нашем случае, а вывод (3.24) в рассматриваемом случае не отличается от приведенного в пункте 1.

Далее, (3.33) и (3.39) при переходе к пределу, когда $\rho_{k-1}\downarrow 0$, с помощью (3.20), (3.21) и (3.22) приобретут вид (3.25), (3.26). б) Так как порядок величин π_{nkk}, π_{nk}, $\bar{h}_{nk+1}$ по отношению к ρ_k не изменился, то при переходе от k к $k+1$ порядок величин $\pi_{nk+1k+1}$, π_{nk+1}, $\bar{h}_{nk+2}$ по отношению к ρ_{k+1} тоже не изменится и т. д.

С другой стороны, для всех k тоже верны формулы (3.25), (3.26). Если $c_k=0$, то (3.25), (3.26) переходят в

$$\bar{\pi}_{nkk}=\bar{\rho}_{k-12}\cdot\{\bar{\pi}_{1kk}\cdot\bar{\pi}_{n-1kk}+\cdots+\bar{\pi}_{n-1kk}\cdot\bar{\pi}_{1kk}\},\tag{3.41}$$

$$\bar{\pi}_{nk}=\bar{\pi}_{nkk},\tag{3.42}$$

так как $\bar{h}_{2k}=\lim\limits_{\rho_{k-1}\downarrow 0}a_k\cdot\rho_{k-1}^2\cdot h_{2k}=\bar{\rho}_{k-12}$ (использовали (3.12)).

Таким образом, $\bar{\pi}_{nkk}$ и $\bar{\pi}_{nk}$ при $c_k=0$ вычисляются по формулам (3.23), $\bar{h}_{nk+1}$ при всех c_k — по (3.24).

4°. Предельная теорема для времени ожидания. В настоящем параграфе получена общая для всех рассматриваемых систем предельная теорема относительно виртуального времени ожидания $w_k(t)$ вызова приоритета k в условиях критической загрузки. Виртуальное время ожидания для вызова приоритета k в момент t — время, которое пришлось бы ждать этому вызову до начала своего обслуживания, если бы он поступил в систему в момент t. Единственным ограничением является предположение прямого порядка обслуживания внутри каждого приоритетного класса. Отсутствие вызовов в системе в момент $t = 0$ для получения предельной теоремы не является ограничением. В зависимости от количества вызовов в момент $t = 0$ вид точных формул, определяющих виртуальное время ожидания в момент t, меняется. Положим

$$\omega_k(s, t) = Me^{-sw_k(t)} \quad (k = \overline{1, r}). \tag{4.1}$$

А. *Предварительные сведения.* При условии существования стационарного распределения в [2] выведены соотношения, определяющие $\omega_k(s, t)$ для всех рассматриваемых систем, когда порядок обслуживания вызовов одного и того же приоритета — прямой. Эти соотношения формулируются ниже в виде теорем 3 и 4, приведенных без доказательства. Обозначим

$$\nu_k(s) = \nu_k = s - a_k h_k(s), \tag{4.2}$$

$$\mu_k(s) = \mu_k = s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s). \tag{4.3}$$

Теорема 3. *Для систем с абсолютным приоритетом* $(\rho_{k1} < 1)$

$$\omega_k(s, t) = e^{\nu_k \cdot t}\left\{1 - \mu_k \int_0^t e^{-\nu_k \cdot u} \overline{P}(u)\, du\right\}, \tag{4.4}$$

где

$$\overline{p}(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-st}\overline{P}(t)\, dt = \mu_{k+1}^{-1}. \tag{4.5}$$

Теорема 4. *Для системы с относительным приоритетом* $(\rho_{r_1} < 1)$

$$\omega_k(s, t) = e^{-\nu_k \cdot t}\left\{1 - \mu_k \int_0^t e^{-\nu_k \cdot u} P(u)\, du - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=k+1}^{r} (1 - \beta_j(\mu_k)) \int_0^t e^{-\nu_k \cdot u} P_j(u)\, du\right\}, \tag{4.6}$$

где $P(t)$, $P_j(t)$ $(j = \overline{k+1, r})$ *задаются своими преобразованиями Лапласа*

$$p(s) = \mu_{r+1}^{-1}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=j+1}^{r}\frac{1-\beta_i(\mu_{j+1})}{\mu_{j+1}}\,p_i(s)=\mu_{j+1}^{-1}-\mu_{r+1}^{-1}\qquad (j=\overline{k,\ r-1}),\tag{4.8}$$

$h_k(s)$, $\pi_k(s)$ определены в § 3.

Заметим, что $P(t)$ — вероятность того, что в момент t либо система с абсолютным приоритетом свободна от вызовов, либо обслуживается вызов приоритета ниже k; $\overline{P}(t)$ — вероятность свободного состояния системы с относительным приоритетом в момент t; $P_j(t)\,dt$ — вероятность попадания начала обслуживания в системе с относительным приоритетом вызова приоритета j в интервал $[t,\ t+dt)$.

Б. *Вспомогательные леммы*. В ходе доказательства предельной теоремы выявляется необходимость выяснения при $\rho_k\downarrow 0$ порядка функций $\overline{P}(t)$, $P(t)$, $P_j(t)$ $(j=\overline{k+1,\ r})$. Положим

$$\psi_j(s)=1-\sum_{n\geq 2}\overline{\pi}_{nj}\cdot s^{n-1}=-\sum_{n\geq 1}\overline{\pi}_{nj}\cdot s^{n-1}\qquad (j=\overline{k,\ r}).\tag{4.9}$$

В частности, на основе (3.21), (3.23), (3.38), если $c_k=0$

$$\psi_k(s)=\frac{1}{2s\cdot\overline{\rho}_{k-12}}\left\{\sqrt{1+4s\overline{\rho}_{k-12}}-1\right\}.\tag{4.10}$$

Лемма 1. *При $\rho_k\downarrow 0$, $t>0$ существует конечный предел*

$$\overline{f}^{(k)}(t)=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k^{-1}\cdot P\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right),\tag{4.11}$$

причем

$$\overline{f}^{*(k)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\overline{f}^{(k)}(t)\,dt=\frac{1}{s\psi_k(s)}.\tag{4.12}$$

Доказательство. Предел (4.11) существует, если существует

$$\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k\cdot\overline{p}(s\rho_k^2)=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k\int_0^\infty e^{-s\cdot\rho_k^2\cdot u}\,\overline{P}(u)\,du=$$

$$=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\frac{1}{\rho_k}\int_0^\infty e^{-sv}\,\overline{P}\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right)dv=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\frac{\rho_k}{\mu_{k+1}(s\rho_k^2)}=\frac{1}{s\psi_k(s)}.$$

Для системы с относительным приоритетом все r потоков подразделим на l непересекающихся групп $(l=\overline{1,\ r})$ по p_i потоков в i-ой группе $(i=\overline{1,\ l})$

$$p_0\equiv 0,\quad p_1+p_2+\cdots+p_l=r,\quad \overline{p}_i=p_1+\cdots+p_i\quad (i=\overline{1,\ l-1}).$$

Чем больше номер группы, тем более высокого приоритета потоки ему принадлежат. Если $i<j$ — номера двух потоков из разных групп, то $c_{ij}=\lim\limits_{\rho_k\downarrow 0}(\rho_e/\rho_k)=0$; если же — из одной группы, то $c_{ij}>0$. Пусть $c_{ij}=1/c_{ji}$.

Лемма 2. *Существуют конечные пределы*

$$f^{(k)}(t)=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k^{-1}P\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right)\quad (k=\overline{1,r}), \tag{4.13}$$

и если

$$k=\overline{\bar{p}_{l-1},\bar{p}_l},\quad i=\overline{0,l},\quad k\geqslant 0,$$

то

$$f_j^{(k)}(s)=\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k^{-1}P_j\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right)\qquad (j=\overline{k+1,p_l}), \tag{4.14}$$

причем преобразования Лапласа $f^{*(k)}(s)$, $f_j^{*(k)}(s)$ *от* $f^{(k)}(t)$, $f_j^{(k)}(t)$ *равны*

$$f^{*(k)}(s)=\begin{cases}\dfrac{c_{kr}}{s\psi_r(c_{kr}^{-2}\cdot s)}, & \bar{p}_{l-1}\leqslant k\leqslant r,\\ 0, & 1\leqslant k<\bar{p}_{l-1};\end{cases} \tag{4.15}$$

$$f_j^{*(k)}(s)=\begin{cases}\beta_{j1}^{-1}\left[\dfrac{c_{kj-1}}{s\psi_{j-1}(c_{kj-1}^{-2}\cdot s)}-\dfrac{c_{kj}}{s\cdot\psi_j(c_{kj}^{-2}\cdot s)}\right], & \bar{p}_{l-1}+2\leqslant j\leqslant\bar{p}_l,\\ \beta_{j1}^{-1}\dfrac{c_{kj-1}}{s\psi_{j-1}(c_{kj-1}^{-2}\cdot s)}, & j=\bar{p}_l+1,\quad (\bar{p}_{l-1}<k<\bar{p}_l).\end{cases} \tag{4.16}$$

Доказательство. Проделаем необходимые для дальнейшего выкладки

$$\frac{1}{\rho_k}\int_0^\infty e^{-sv}P\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right)dv=\rho_k\int_0^\infty e^{-s\cdot\rho_k^2\cdot u}P(u)\,du=\rho_k\cdot p(s\rho_k^2),$$

$$\frac{1}{\rho_k}\int_0^\infty e^{-sv}P_j\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right)dv=\rho_k\int_0^\infty e^{-s\cdot\rho_k^2\cdot u}P_j(u)\,du=\rho_k\cdot p_j(s\rho_k^2)\quad (j=\overline{k+1,r}),$$

$$\mu_{j+1}(s\rho_k^2)=s\rho_k\left[\frac{\rho_k}{\rho_j}-\sum_{n\geqslant 2}(\sigma_j\cdot\bar{\pi}_{nj}\cdot\rho_j^{2n-1})\left(\frac{\rho_k}{\rho_j}\right)^{2n-1}s^{n-1}\right]\quad (j=\overline{1,r}),$$

$$\lim_{\rho_k\downarrow 0}\mu_{j+1}(s\rho_k^2)=\begin{cases}0, & \bar{p}_{i-1}\leqslant k<j\leqslant\bar{p}_i,\\ \infty, & k<\bar{p}_i\leqslant i,\end{cases}$$

$$\lim_{\rho_k\downarrow 0}\frac{1-\beta_l(\mu_{j+1}(s\rho_k^2))}{\mu_{j+1}(s\rho_k^2)}=\beta_{l1}\ (\bar{p}_{l-1}\leqslant k<\bar{p}_l;\ j\geqslant \bar{p}_{l-1}),\tag{4.17}$$

$$\lim_{\rho_k\downarrow 0}\frac{\rho_k}{\mu_{j+1}(s\rho_k^2)}=\begin{cases}\dfrac{c_{kj}}{s\psi_j(c_{kj}^{-2}\cdot s)}, & \bar{p}_{l-1}\leqslant k,\ j<\bar{p}_l,\\ 0\quad, & \bar{p}_{l-1}\leqslant k<\bar{p}_l\leqslant j.\end{cases}\tag{4.18}$$

Здесь $c_{kk}\equiv 1$. Перейдем непосредственно к доказательству нашей леммы. Перепишем уравнения (4.8) в виде

$$\sum_{l=j+1}^{r}\frac{1-\beta_l(\mu_{j+1}(s\cdot\rho_k^2))}{\mu_{j+1}(s\rho_k^2)}\rho_k\cdot p_l(s\cdot\rho_k^2)=\frac{\rho_k}{\mu_{j+1}(s\rho_k^2)}-$$

$$-\frac{\rho_k}{\mu_{r+1}(s\rho_k^2)}\ (j=\overline{1,r-1}).\tag{4.19}$$

а) Пусть $k\geqslant \bar{p}_{l-1}$. В последних $r-\bar{p}_{l-1}$ уравнениях (4.23) устремим $\rho_k\downarrow 0$. По (4.18) предел правых частей, существует значит существует предел и левых частей. После перехода к пределу $\rho_k\downarrow 0$ вычитаем каждое последующее уравнение из предыдущего, что дает (4.14) и (4.16) для $j>k$, $k\geqslant\bar{p}_{l-1}$. Запишем

$$\sum_{l=j+1}^{r}\beta_{l1}\cdot\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k\cdot p_l(s\rho_k^2)=\frac{c_{kj}}{s\psi_j(c_{kj}^{-2}\cdot s)}-\frac{c_{kr}}{s\psi_r(c_{kr}^{-2}\cdot s)}\ (j=\bar{p}_{l-1}).$$

Теперь все в тех же $r-\bar{p}_{l-1}$ уравнениях при $\bar{p}_{l-2}\leqslant k<\bar{p}_{l-1}$ устремим $\rho_k\downarrow 0$. Предел правой части (4.19) равен нулю по (4.18), следовательно, если в следующих от конца до рассмотренных выше уравнений p_{l-1} уравнениях перейти к пределу при $\rho_k\downarrow 0$ $(\bar{p}_{l-2}\leqslant k<\bar{p}_{l-1})$, то получим

$$\sum_{l=j+1}^{\bar{p}_{l-1}}\beta_{l1}\cdot\lim_{\rho_k\downarrow 0}\rho_k\,p_l(s\cdot\rho_k^2)=\frac{c_{kj}}{s\psi(c_{kj}^{-2}\cdot s)}\quad(\bar{p}_{l-2}<j<\bar{p}_{l-1}),$$

откуда вытекают (4.14) и (4.16) при $\bar{p}_{l-1}\geqslant j>k\geqslant\bar{p}_{l-2}$ и т. д.

В. *Асимптотика времени ожидания.* Ниже приводится общая предельная теорема относительно времени ожидания для вызова приоритета k в условиях критической загрузки ($\rho_r\downarrow 0$) систем с абсолютным и относительным приоритетом. Порядок обслуживания вызовов каждого приоритетного класса—прямой. Положим

$$\varphi_k(s)=1+\sum_{n\geqslant 1}h_{nk}\cdot s^{n-1}.\tag{4.20}$$

Теорема 5. *Пусть* $\rho_{\rho l}<1$ (*для систем с абсолютным приоритетом достаточно* $\rho_{k1}<)1$ $\rho_k\downarrow,0$ $t\to\infty$, *таким образом, что* $t\rho_k^2\to\tau$, $0<\tau<\infty$. *Тогда* а) *при* $c_k > 0$

$$\omega_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s,\ t)\to\omega_{k\infty}(s)=$$

$$=e^{\frac{\tau}{c_k}s\varphi_k(c_k\cdot s)}\cdot s\cdot\psi_{k-1}(c_k\cdot s)\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-\frac{u}{c_k}s\varphi_k(c_k s)}\cdot f_k(u)\,du, \tag{4.21}$$

где

$$f_k(s)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^{\infty}e^{-st}f_k(t)\,dt=\frac{1}{s\psi_k(s)}; \tag{4.22}$$

б) *при* $c_k=0$

$$\omega_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k s,\ t)\to\omega_{k\infty}(s)=$$

$$=e^{s[1+s\bar{\rho}_{k-12}]\tau}\cdot s\cdot\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-s[1+s\bar{\rho}_{k-12}]u}f_k(u)\,du, \tag{4.23}$$

а

$$f_k(u)=1+\frac{\sqrt{\rho_{k2}}}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_u^{\infty}v^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{v}{4\rho_{k2}}}\,dv. \tag{4.24}$$

Следствие 1. Если $\rho_k\downarrow 0$, $c_k=0$, $t\to\infty$, $t\rho_k^2\to\infty$, то

$$P(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot\omega_k(t)<x)\to 1-e^{-(x/\bar{\rho}_{k-12})},\quad x>0. \tag{4.25}$$

Следствие 2. Функции $U=c_k^{-1}\cdot s\varphi_k(c_k s)$ и $s=U\cdot\psi_k(U)$ являются взаимно обратными.

Доказательство теоремы 5. Используя (3.21), (3.22) (4.2) и (3.9)—(3.12), получаем разложения, верные для всех наших систем

$$\mu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s)=\begin{cases}\rho_k\cdot s\cdot\psi_{k-1}(c_k\cdot s)+o(\rho_k), & c_k>0,\\ \rho_k\cdot s+o(\rho_k), & c_k=0,\end{cases} \tag{4.26}$$

$$\frac{\tau}{\rho_k^2}\nu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s)=\begin{cases}\frac{\tau}{c_k}s\varphi_k(c_k\cdot s)+o(1), & c_k>0,\\ \tau s[1+s\bar{\rho}_{k-12}]+o(1), & c_k=0.\end{cases} \tag{4.27}$$

Доказательство дальше ведется для случая систем с относительным приоритетом, как сравнительно более сложного.

Уравнение (4.4) запишем в виде

$$\omega_k\left(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s,\ \frac{\tau}{\rho_k^2}\right)=\exp\left[\frac{\tau}{\rho_k^2}\nu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s)\right]\times$$

$$\times\left\{1-\mu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s)\int\limits_0^{\tau/\rho_k^2}e^{-u\nu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s)}P(u)\,du-\right.$$

$$- \sum_{j=k+1}^{r} (1-\beta_j(\mu_k(\rho_{k-1}\cdot\rho_k\cdot s))\int\limits_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u\nu_k(\rho_{k-1}\rho_k\cdot s)}\, P_j(u)\, du \Big\}. \qquad (4.28)$$

Асимптотическое поведение интегралов (u заменено на v/ρ_k^2)

$$J^{(j)}_{\rho_k}(\tau,\ s) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u\nu_k(\rho_{k-1}\rho_k s)}\, P_j(u)\, du = \frac{1}{\rho_k}\int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{v}{\rho_k^2}\nu_k(\rho_{k-1}\rho_k s)}\, P_j\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv,$$

$$J_{\rho_k}(\tau, s) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u\nu_k(\rho_{k-1}\rho_k s)}\, P(u)\, du = \frac{1}{\rho_k}\int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{v}{\rho_k^2}\nu_k(\rho_{k-1}\rho_k s)}\, P\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv$$

просто усмотреть, обратившись к лемме 2 и (4.27), откуда вытекает существование конечных пределов $\lim\limits_{\rho_k\downarrow 0} J^{(j)}_{\rho_k}(\tau, s)$ и $\lim\limits_{\rho_k\downarrow 0} J_{\rho_k}(\tau, s)$. Следовательно, из (4.28), (4.26), леммы 2 вытекает, что существует конечный предел

$$\omega_{k\tau}(s) = \lim_{\rho_k\downarrow 0} \omega_k\left(\rho_{k-1}\rho_k s, \frac{\tau}{\rho_k^2}\right) =$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{\tau}{c_k} s\varphi_k(c_k s)} \left[1 - s\varphi_{k-1}(c_k s)\displaystyle\int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{u}{c_k} s\varphi_k(c_k s)} f_k(u)\, du\right], & c_k > 0, \\ e^{\tau s[1+s\bar{\varphi}_{k-12}]}\left[1 - s\displaystyle\int\limits_0^{\tau} e^{-us[1+s\bar{\varphi}_{k-12}]} f_k(u)\, du\right], & c_k = 0, \end{cases} \qquad (4.29)$$

где обозначено

$$f_k(u) = f^{(k)}(u) + \sum_{j=k+1}^{l} \beta_{j1} f_j^{(k)}(u), \qquad (4.30)$$

а

$$l = \min\{n;\ n > k,\ c_{kn} > 0\}.$$

Если же такого n не существует, то положим $l \equiv r+1$.

Для вычисления $f_k(u)$ можно воспользоваться уравнением (4.29). Поскольку при фиксированных τ, $0 < \tau < \infty$, c_k и s, $\operatorname{Re} s > 0$, с увеличением τ первый сомножитель в правой части (4.29) стремится к бесконечности, а $|\omega_{k\tau}(s)|$ ограничена, то

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{u}{c_k} s\varphi_k(c_k s)} f_k(u)\, du = s^{-1},\ c_k > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-us[1+s\bar{\beta}_k-1]} f_k(u)\,du = s^{-1}, \quad c_k = 0. \tag{4.31}$$

В то же время, из (4.30) и леммы 2 имеем

$$f_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_k(t)\,dt = f^{*(k)}(s) + \sum_{j=k+1}^{l} \beta_{j1}\cdot f_j^{*(k)}(s) = \frac{1}{s\,\psi_k(s)},$$

откуда и из (4.31) становятся очевидными следствие 2 и (4.22).

Уравнение, аналогичное (4.31) при $c_k = 0$, изучено в [3], где получен явный вид $f_k(u)$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.V.1974

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ. $\vec{M}_2/G_r/1/\infty$ նախապատվությամբ սիստեմների զբաղվածության պարբերության և սպասման ժամանակի ասիմպտոտիկ հետազոտում կրիտիկական ծանրաբեռնվածության դեպքում (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցվում են $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ *տիպի հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ սիստեմների առաջին k հոսքերի զբաղվածության պարբերության n-րդ մոմենտի (n ≥ 1) և k-րդ հոսքի t-ից կախված սպասման ժամանակի բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ սահմանային թեորեմներ, երբ* $\rho_{k1}\uparrow 1$, $\rho_{r1}<1$ $(k=\overline{1,r},\ t\geq 0)$: *Այստեղ* ρ_{k1} *առաջին k հոսքերի ծանրաբեռնվածությունն է: Սպասման ժամանակի բաշխման հետազոտումը կատարված է* $t\to\infty$, $t\cdot(1-\rho_{k1})^2\to\tau$, $0<\tau<\infty$ *դեպքում:*

E. A. DANILIAN. *Asymptotical investigation of the busy period and waiting time for the* $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ *priority queues in heavy traffic* (summary)

For the $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ queues with head-of-the-line and preemptive priorities, limit theorems about the n-th moment, $n\geq 1$, of busy period (conserning the first k types of customers) and the virtual waiting time distribution (conserning the k-customers) are obtained, when $\rho_{k1}\uparrow 1$ and $\rho_{r1}<1$ $(k=\overline{1,r})$.

Here ρ_{k1} is the traffic intensity of the first k streams of customers.

For the virtual waiting time the case, when $t\to\infty$, $\rho_{k1}\uparrow 1$, $(1-\rho_{k1})^2\cdot t\to\tau$, $0<\tau<\infty$ is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Джейсуол.* Очереди с приоритетами, Изд. „Мир“, 1973.
2. *Б. В. Гнеденко* и др. Приоритетные системы обслуживания, М, МГУ, 1973.
3. *О. В. Висков.* О времени ожидания в смешанной системе массового обслуживания, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР, 71, 1964, 26—34.
4. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ, ИИЛ, 1963.