ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

В. И. ГАВРИЛОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье доказывается граничная теорема единственности для голоморфных функций, определенных в единичном круге, и строится пример, показывающий, что в определенном смысле теорема не может быть улучшена.

1°. Обозначим через Ω, D и Γ сферу Римана, круг $|z|<1$ и окружность $|z|=1$, соответственно. Для произвольных точек $a, b \in D$ и произвольной жордановой кривой $L \subset D$ положим

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \log [(1+u)(1-u)^{-1}], \quad u = |a-b| \cdot |1-\bar{a}b|^{-1}$$

и $\sigma(L) = \sup\limits_{a, b \in L} \sigma(a, b)$. Функция $\sigma(a, b)$ определяет гиперболическую метрику в круге D, элемент которой равен $d\sigma(z) = (1-|z|^2)^{-1}|dz|$. Для произвольной точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ обозначим через $h(\zeta, \alpha)$ хорду круга D, оканчивающуюся в $\zeta = e^{i\theta}$ и образующую с радиусом $h(\zeta, 0)$ в этой точке угол α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\zeta, \alpha)$, $h(\zeta, \beta)$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, и окружностью $\left|z - \frac{1}{2}\zeta\right| = \frac{1}{2}$, обозначим через $\Delta(\zeta, \alpha, \beta)$. Множество E, лежащее на дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, называется остаточным на γ, если его дополнение относительно γ является множеством первой категории. Если множество E измеримо, его линейная лебегова мера обозначается через mes E.

Последовательность точек $\{z_\nu\}$ круга D назовем B-последовательностью, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, если 1) в D существует некоторая последовательность жордановых кривых $\{L_n\}$, содержащихся соответственно в кольцах $1-\varepsilon_n < |z| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, и имеющая в качестве предела дугу γ, и 2) существует такое число M, $0 < M < +\infty$, что для всех $n = 1, 2, \cdots$ каждая дуга L на L_n, имеющая $\sigma(L) \geq M$, содержит по крайней мере одну точку последовательности $\{z_\nu\}$ (см. также [4] и [6]). Последовательность жордановых кривых $\{L_n\}$ в этом определении принято называть последовательностью Кёбе, отнесенной к дуге $\gamma \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим мероморфную в D функцию $f(z)$ и обозначим через $\rho(f(z))$ ее сферическую производную, $\rho(f(z)) = |f'(z)|[1+|f(z)|^2]^{-1}$. Рассмотрим непрерывную в D функцию $q(f, z)=(1-|z|^2)\rho(f(z))$. Функция $f(z)$ стремится к конечному пределу c по последовательности жордановых дуг Кёбе $\{l_n\}$, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, если $\lim\limits_{n\to\infty}[\sup\limits_{z\in l_n} |f(z)-c|]=0$, и — стремится к пределу ∞, если

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{z\in l_n}\left|\frac{1}{f(z)}\right|\right]=0.$$

Дальнейшие обозначения являются общепринятыми в теории предельных множеств (см. [7] или [9]). Для произвольного подмножества $S\subset D$, имеющего по крайней мере одну предельную точку $\zeta=e^{i\theta}$ на Γ, обозначим через $C(f, \zeta, S)$ совокупность всех значений $\alpha\in\Omega$, для которых на S можно указать такие последовательности точек $\{z_\nu^{(\alpha)}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_\nu^{(\alpha)}=\zeta$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu^{(\alpha)})=\alpha$. Выбирая в качестве S весь круг D, хорду $h(\zeta, \alpha)$ или угол $\Delta(\zeta, \alpha, \beta)$, получим предельные множества $C(f, \zeta, D)$, $C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha))$ или $C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha, \beta))$. Говорят, что точка $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ принадлежит множеству $F(f)$, если объединение $\bigcup C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha, \beta))$ по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha, \beta)$ с вершинами в точке $\zeta=e^{i\theta}$ состоит из единственного значения, которое обычно обозначают $f(e^{i\theta})$.

2°. В статье [6] (теорема 6) был доказан некоторый факт, относящийся к нормальным функциям. Мероморфная в D функция $f(z)$ называется нормальной, если является нормальным в смысле Монтеля в круге D семейство функций $\{f\circ T\}$, где T пробегает все множество конформных отображений круга D на себя (см. Лехто-Виртанен [8], или [9], стр. 151). Факт, о котором идет речь, состоит в утверждении, что всякая нормальная голоморфная функция в D, имеющая конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=a$ по какой-то B-последовательности $\{z_n\}$, сводится к тождественной постоянной $f(z)\equiv a$. Построены также примеры функций, показывающие, что утверждение перестает быть справедливым для нормальных мероморфных функций, и что условие нормальности не может быть ослаблено.

Свойство нормальности мероморфной функции в круге D является глобальным свойством и оно эквивалентно утверждению о существовании конечной верхней грани

$$\sup_{z\in D} q(f, z)<\infty \tag{1}$$

(см. [8], или [9], стр. 153). Желая улучшить цитированный выше факт, мы перейдем от глобального условия (1) к локальному условию

$$\limsup_{z\to\zeta,\, z\in D} q(f, z)<+\infty \tag{2}$$

в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, или к эквивалентному условию (2) условию

$$\sup_{z \in U(\zeta, r)} q(f, z) < +\infty, \tag{3}$$

имеющему место в некоторой окрестности $U(\zeta, r) = D \cap \{z \in D, |z - \zeta| < r\}$, $r > 0$, точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в D и на Γ существует некоторая дуга $\gamma \subseteq \Gamma$ и остаточное множество E на γ, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in E$ которого*

$$\lim_{r \to 1} \sup q(f, re^{i\theta}) < +\infty. \tag{4}$$

Если $f(z)$ имеет конечный $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = a$ по некоторой B-последовательности $\{z_n\}$, отнесенной к дуге γ, то $f(z) \equiv a$.

Следующая теорема показывает, что условие на множество E в теореме 1 и в формулируемой ниже лемме 1 является наилучшим в смысле категории, а также, что утверждения теоремы 1 и леммы 1 не имеют места, если на множество E накладывать только лишь метрические условия.

Теорема 2. *Для произвольной действительной функции $\mu(r) > 0$, определенной на $0 \leqslant r < 1$, и $\lim_{r \to 1} \mu(r) = +\infty$, существует такая голоморфная в D функция $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$, такое множество M первой категории на Γ и $\operatorname{mes} M = 2\pi$, и такое число r_0, $0 < r_0 < 1$, что 1) в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ имеем $\lim_{z \to \zeta} \sup_{z \in D} q(g, z) = +\infty$;*

2) $$q(g, z) \leqslant \mu(|z|) \text{ при } r_0 < |z| < 1;$$

3) $$\lim_{r \to 1} q(g, re^{i\theta}) = 0, \quad e^{i\theta} \in M, \tag{5}$$

и стремление к 0 в (5) происходит равномерно относительно точек $\zeta = e^{i\theta} \in M$; 4) $g(z_\nu) = 0, \nu = 1, 2, \cdots$, в точках некоторой B-последовательности $\{z_\nu\}$, отнесенной ко всей окружности Γ.

3°. Выделим в качестве лемм основные этапы доказательства теорема 1.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и на Γ существует некоторая дуга $\gamma \subseteq \Gamma$ и остаточное множество $E \subset \gamma$, в точках $\zeta = e^{i\theta} \in E$ которого выполняется условие (4). Тогда на γ существует остаточное множество E_1, в точках $\zeta = e^{i\theta} \in E_1$ которого выполняется свойство (2), и для каждой точки $\zeta = e^{i\theta} \in E_1$ можно указать такое число r, $0 < r < 1$, что в области $U(\zeta, r)$ выполняется свойство (3).*

Эта лемма является переформулировкой для функции $q(f, z)$ теоремы Коллингвуда о максимальности (см. [7], стр. 108, теорема 4.8), согласно которой для любой непрерывной в D функции $u(z)$ точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $C(u, \zeta, D) = C(u, \zeta, h(\zeta, 0))$, образуют остаточное множество на Γ.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Если функция $f(z)$ имеет конечный или бесконечный предел с по некоторой последовательности дуг Кёбе $\{L_n\}$, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, то в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \gamma$ имеем*

$$\lim_{z \to \zeta} \sup_{z \in D} q(f, z) = +\infty. \tag{6}$$

Действительно, допустим напротив, что в некоторой точке $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \gamma$ выполняется условие (2), и следовательно, существует такое число r_0, $0 < r_0 < 1$, что в области $U(\zeta_0, r_0)$ имеет место свойство (3). Положим $\gamma_0 = \gamma \cap U(\zeta_0, r_0)$ и $l_n = L_n \cap U(\zeta_0, r_0)$, $n = 1, 2, \cdots$. Тогда $\{l_n\}$ является последовательностью Кёбе, отнесенной к дуге γ_0, и функция $f(z)$ стремится к пределу c по последовательности дуг Кёбе $\{l_n\}$. Обозначим через $d\sigma_0(z)$ элемент гиперболической метрики в $U(\zeta_0, r_0)$. Согласно принципу гиперболической меры, $d\sigma_0(z) \geqslant d\sigma(z)$, и поэтому из условия (3) следует условие

$$\sup_{z \in U(\zeta_0, r_0)} \left| \rho(f(z)) \frac{|dz|}{d\sigma_0(z)} \right| < +\infty, \tag{7}$$

которое, согласно теореме Лехто-Виртанена, эквивалентно свойству нормальности функции $f(z)$ в $U(\zeta_0, r_0)$. Теперь применение теоремы единственности Багемила-Зейделя ([2], теорема 2; см. также [3]) ведет к заключению $f(z) \equiv c$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 2.

Лемма 3 ([6], лемма 1; [4], стр. 1228). Предположим, что мероморфная в D функция $f(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = c$ по некоторой B-последовательности $\{z_n\}$, отнесенной к дуге $\gamma \subseteq \Gamma$. Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in (F(f) \cap \gamma)$ значение $f(e^{i\theta})$ равно c, и если $\mathrm{mes}(F(f) \cap \gamma) > 0$, то $f(z) \equiv c$.

4°. Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Согласно лемме 1, найдется по крайней мере одна внутренняя точка $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \gamma$, в некоторой окрестности $U(\zeta_0, r_0)$ которой выполняется свойство (3). Обозначим $\gamma_0 = \gamma \cap U(\zeta_0, r_0)$ и предположим, что $\mathrm{mes}(F(f) \cap \gamma_0) = 0$. При этом предположении, согласно основной теореме Коллингвуда и Картрайт в малом (см. [7], стр. 187—188, теорема 7.2), функция $f(z)$ либо стремится к значению ∞ по некоторой последовательности жордановых дуг Кёбе $\{l_n\}$, отнесенной к граничной дуге γ_0, либо $f(z)$ стремится к ∞ вдоль некоторой жордановой кривой L, лежащей в $U(\zeta_0, r_0)$ и оканчивающейся в некоторой точке $\zeta_1 = e^{i\theta_1} \in \gamma_0$. Первая из этих возможностей не может реализоваться ввиду утверждения леммы 2, а вторая — ввиду утверждения леммы 3 и условий теоремы 1, поскольку в этом случае, согласно теореме Лехто-Виртанена [8], точка $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$ обязана принадлежать множеству $F(f)$. Поэтому $\mathrm{mes}(F(f) \cap \gamma_0) > 0$, и, согласно лемме 3, $f(z) \equiv a$.

5°. В качестве функции $g(z)$ в теореме 2 возьмем бесконечное произведение

$$g(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right], \tag{8}$$

впервые рассмотренное Багемилом, Эрдешем и Зейделем [1] и изучавшееся затем в статьях [5] и [6]. Для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию

$$n_k \geqslant k n_{k-1}, \; k = 2, 3, \cdots, \; n_1 > 1, \tag{9}$$

произведение (8) сходится абсолютно в каждом круге $|z| \leqslant r < 1$, и представляет, следовательно, голоморфную функцию в D, имеющую n_j простых нулей $z_j^{(l)}$, $l = 1, 2, \cdots, n_j$, на окружностях $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$, $j = 1, 2, \cdots$. Окружим каждый нуль $z_j^{(l)}$ на $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$ окрестностью $U_j^{(l)}$ радиуса $1/j^2 n_j$. Если последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (9), то легко видеть, что существует такой номер $j_0 > 0$, что для всех $j \geqslant j_0$ круги $U_j^{(l)}$ попарно не пересекаются. Следовательно, остающаяся после выбрасывания всех кругов $U_j^{(l)}$, $j \geqslant j_0$, часть круга D будет некоторой областью Δ.

В статье [6] (теорема 8) показано, что нули $z_j^{(l)}$, $l = 1, 2, \cdots, \cdots, n_j$; $j = 1, 2, \cdots$, образуют B-последовательность относительно всей окружности Γ. В статье [1] (теоремы 2 и 5) доказано, что для любой функции $\mu(r) > 0$, $\lim\limits_{r \to 1} \mu(r) = +\infty$, можно указать такую последовательность индексов $\{n_\nu\}$, удовлетворяющую условию (9), что произведения (8), построенные для этой последовательности $\{n_\nu\}$ и для любой бесконечной ее подпоследовательности обладают свойствами 1) и 2), указанными в теореме 2. Осталось показать, что из последовательности $\{n_\nu\}$ можно выделить такую подпоследовательность, что соответствующее произведение $g(z)$ обладает свойством 3) из теоремы 2.

Мы докажем несколько большее, а именно, что для любой последовательности индексов $\{n_k\}$, которая удовлетворяет условию

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right)^2 < n_k, \; n_1 > 1, \; k = 2, 3, \cdots, \tag{10}$$

функция $g(z)$ обладает свойством

$$\lim_{|z| \to 1, \, z \in \Delta} (1-|z|)\, \rho(g(z)) = 0 \tag{11}$$

равномерно в области Δ.

В силу простого строения области Δ, непосредственно видно, что пересечение замыкания области Δ с окружностью Γ есть некоторое множество M, mes $M = 2\pi$. Согласно теореме максимальности Коллингвуда, M является множеством первой категории. Радиусы круга D, оканчивающиеся в точках множества M, начиная с некоторого момента целиком лежат в области Δ.

Чтобы доказать (11), мы воспользуемся двумя оценками для произведения $g(z)$, доказанными в [1]: для произвольной последовательности индексов $\{n_\nu\}$, удовлетворяющей условию (9), и любой точки $z \in \Delta$, лежащей в кольце

$$1-\frac{1}{n_k} \leqslant |z| < 1-\frac{1}{n_{k+1}}, \tag{12}$$

имеют место неравенства

$$|g(z)| \geqslant \frac{c}{k^2(k+1)^2}\left(\frac{3}{4}e-1\right)^k \tag{13}$$

и

$$\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_\nu}}\right)^{n_\nu}\right| \geqslant \frac{c_2}{k^2}, \quad \nu=1, 2, \cdots, \tag{14}$$

в которых $c_1, c_2 < +\infty$ — фиксированные постоянные (см. [1], стр. 137 и 138).

Рассмотрим производную

$$g'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)^{n_\nu}} z^{n_\nu - 1} \prod_{j\neq\nu}\left[1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right].$$

В произвольной точке $z \in \Delta$, лежащей в кольце (12), имеем оценки

$$(1-|z|)\,\rho(g(z)) \leqslant (1-|z|)\frac{|g'(z)|}{|g(z)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-|z|}{|g(z)|}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n_\nu}{\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)^{n_\nu}}|z|^{n_\nu-1}\frac{1}{\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_\nu}}\right)^{n_\nu}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|z|)\,k^2}{c_2\,|g(z)|}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n_\nu}{\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)^{n_\nu}}|z|^{n_\nu-1}, \tag{15}$$

в которых использовано неравенство (14).

Воспользуемся неравенствами $\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)^{-n_\nu} \leqslant 4$, $\nu=1, 2, \cdots$; $\ln x < -(1-x)$ для $0<x<1$, и $xe^{-x}<1$ для $x>0$, а также условиями (10) и (12), получим оценки

$$(1-|z|)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n_\nu}{\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)^{n_\nu}}|z|^{n_\nu-1}\leqslant 4(1-|z|)\Bigg[\sum_{\nu=1}^{k-1}n_\nu+n_k+$$

$$+\;n_{k+1}|z|^{n_{k+1}}+\sum_{\nu=k+2}^{\infty}n_\nu|z|^{n_\nu-1}\Bigg]\leqslant 8(1-|z|)\,n_k+$$

$$+4\,(1-|z|)\,n_{k+1}\,e^{n_{k+1}\ln|z|}\cdot|z|^{-1}+|z|^{-1}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}n_\nu\,e^{n_\nu\ln|z|}\leqslant$$

$$\leqslant 8+4\,|z|^{-1}(1-|z|)\,n_{k+1}\,e^{-n_{k+1}(1-|z|)}+|z|^{-1}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}n_\nu\,e^{-n_\nu(1-|z|)}<$$

$$\leqslant 8+4\,|z|^{-1}+|z|^{-1}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}n_\nu\,e^{-\frac{n_\nu}{n_{k+1}}}\leqslant$$

$$\leqslant 8+4\,|z|^{-1}+|z|^{-1}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}n_\nu\,e^{-\sqrt{n_\nu}}<c_3<+\infty. \qquad (16)$$

Объединяя оценки (13), (15) и (16), получим неравенство

$$(1-|z|)\,\rho\,(g\,(z))\leqslant\frac{c_1\cdot c_3}{c_2}\,k^4\,(k+1)^2\left(\frac{3}{4}\,e-1\right)^{-k}, \qquad (17)$$

справедливое в произвольной точке $z\in\Delta$, лежащей в кольце (12). Неравенство (17) эквивалентно утверждению (11), и теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Одним из основных этапов доказательства теоремы 1 является утверждение о существовании по крайней мере одной точки $\zeta_0=e^{i\theta_0}\in\gamma$, в которой имеет место свойство (2), если выполняется условие (4) в точках некоторого остаточного множества на γ. Это утверждение явилось в доказательстве теоремы 1 следствием теоремы Коллингвуда о максимальности, примененной к непрерывной функции $q\,(f,\,z)$ в частном случае радиусов круга D. В действительности же теорема Коллингвуда применима в значительно более общей формулировке, и это обстоятельство позволяет усилить утверждение теоремы 1, заменив условие (4) следующим предположением: пусть в круге $|z|\leqslant 1$ существует некоторый континуум G_0, пересекающийся с окружностью Γ в единственной точке $\zeta=1$, и существует остаточное множество $E\subset\gamma$, в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in E$ которого множество $C\,(q,\,\zeta,\,G_\theta)$ ограничено, где G_θ — континуум, полученный из G_0 поворотом на угол θ вокруг начала $z=0$. В качестве G_0 может быть взята, например, произвольная жорданова дуга из D, оканчивающаяся в точке $\zeta=1$ пусть даже и касательным образом.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 25.III.1974

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ. Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերաբերյալ մի միակության թեորեմի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է սահմանային միակության թեորեմ միավոր շրջանում որոշված հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերաբերյալ և կառուցվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ թեորեմայի տրված պայմանները լավագույնն են։

V. I. GAVRILOV. *A uniqueness theorem for holomorphic functions*
(summary)

A uniqueness theorem for holomorphic functions defined in the unit disc is proved. An example shows, that the conditions of the theorem are best possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Bagemihl, P. Erdös, W. Seidel.* Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes dèfinies par certains produits dans le cercle—unité. Annal. Sci. Ecole Norm., Sup., 70, 1953, 135—147.
2. *F. Bagemihl, W. Seidel.* Koebe arcs and Fatou points of normal functions, Comment. Math. Helv., 36, 1, 1961, 9—18.
3. *В. И. Гаврилов.* О множестве угловых граничных значений нормальных мероморфных функций, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 525—526.
4. *В. И. Гаврилов.* О голоморфных функциях, ограниченных на последовательностях точек, Сиб. матем. журн., 6, № 6, 1965, 1227—1233.
5. *V. I. Gavrilov.* On a uniqueness theorem, Nagaya Math. J., 35, 1969, 151—157.
6. *В. И. Гаврилов.* О некоторых теоремах единственности для мероморфных функций, Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1, 1974.
7. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, М., Изд. „Мир", 1971,
8. *O. Lehto, K. I. Virtanen.* Boundary behaviour and normal meromorphic functions, Acta Math., 97, 1—2, 1957, 47—65.
9. *К. Носиро.* Предельные множества, М., ИИЛ, 1963.