ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

В. А. АРЗУМАНЯН

ФАКТОР-СОСТОЯНИЯ НА СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

0°. Пусть X — метризуемый компакт, S — счетная группа, действующая на X гомеоморфизмами. Група S действует автоморфизмами на алгебре $C(X)$ непрерывных комплексных функций на X по формуле

$$(s\cdot\varphi)\ (x)=\varphi\ (s^{-1}\cdot x),$$

где $s\cdot$ обозначает действие, $s\in S$. Пусть $\mathbf{A}=C^*(X,S)$ — соответствующее скрещенное произведение (см. [1]).

Из доказательства известной теоремы Глимма, характеризующей C^*-алгебры типа I (см., напр., [2], § 9), следует, что каждая $NGCR$-алгебра* с единицей содержит подалгебру, некоторая фактор-алгебра которой изоморфна C^*-индуктивному пределу $\mathbf{B}$ последовательности алгебр матриц порядка 2^n с естественным вложением, т. е. фактор-алгебра является РГФ-алгеброй класса $\{2, 2^2,\cdots\}$, подробно изученной Пауэрсом в работе [3]. Этот важный факт сформулирован Сакаи отдельным предложением в [4], п. 4.6.8. Там же, ползуясь тем, что РГФ-алгебра заведомо обладает фактор-состоянием типа III, доказано, что и сама исходная алгебра имеет таковые (п. 4.6.13). Алгебры, обладающие РГФ-фактор-алгеброй класса $\{2, 2^2,\cdots\}$ мы будем в дальнейшем называть *алгебрами Сакаи.*

В настоящей заметке описан конкретный способ построения подалгебр Сакаи алгебры $\mathbf{A}$ по т. н. допустимым системам компактов (п. 1). В п. 2 показано, как фактор-состояния типа меры, обладающие определенным свойством по отношению к данной допустимой системе, можно получить, исходя из некоторого диагонализуемого состояния соответствующего индуктивного предела. П. 3 посвящен доказательству необходимого для дальнейшего изложения обобщения известной леммы Халмоша-Рохлина ([6], стр. 99) на преобразования, не сохраняющие меру.

Основной результат состоит в том, что при некотором дополнительном ограничении (условие B) на динамическую систему (X, S), где X не имеет изолированных точек, а S действует свободно, любое фактор-состояние можно получить таким способом при подходящем выборе подалгебры Сакаи и диагонализуемого состояния (п. 4).

* Все не определяемые в тексте понятия, которые употребляются без указания на источник, можно найти в монографиях [2] или [4].

Условие B^* состоит в следующем: для всякого открытого $G \subset X$ и для всякого непустого замкнутого $F \subset G$, $F \neq G$, существует $s \in S$, $s \neq e$ такое, что $s \cdot F \subset G$.

Известны ограничения на динамическую систему, при которых соответствующее скрещенное произведение является NGC R-алгеброй (см., напр., [I], п. 7. 11). С другой стороны, допустимые системы (а, следовательно, и подалгебры Сакаи) существуют у динамических систем, не удовлетворяющих ни условию B, ни упомянутому выше условию Зеллер-Мейера (например, у сдвига Бернулли на бесконечном в обе стороны произведении двоеточий). Роль условия B заключается в том, что оно позволяет дать единообразную конструкцию подалгебр Сакаи сразу для всех фактор-состояний типа меры. Примером динамической системы, удовлетворяющей этому условию, служит эргодический сдвиг на торе.

Автор горячо благодарит А. М. Вершика за постановку задачи и ценные указания.

I°. Непосредственно из определения скрещеного произведения следует, что в алгебре **A** можно выделить коммутативную подалгебру $\mathfrak{M}$, изоморфную $C(X)$, с элементами $\mathrm{M}(\varphi)$, $\varphi \in C(X)$ и группу N, изоморфную S, состоящую из унитарных элементов $U(s)$, $s \in S$, связанных соотношением

$$\mathrm{M}(\varphi)\ U(s) = U(s)\ \mathrm{M}(s \cdot \varphi). \tag{1}$$

При этом алгебра **A** получается замыканием *-алгебры конечных сумм вида $\sum\limits_{s} \mathrm{M}(\varphi_s)\ U(s)$.

Определение. Систему компактов $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, $p_i \subset X$ назовем *допустимой*, если существует последовательность $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, $s_i \in S$ такая, что выполнены условия

$$p_i \subset \operatorname{Int} p_{i-1},\ \ s_i \cdot p_i \subset \operatorname{Int} p_{i-1}, \tag{2}$$

$$s_i \cdot p_i \ \cap p_i = \varnothing,\ p_0 = X,\ s_0 = e$$

(e — нейтральный элемент S).

Лемма 1. *Пусть $A = C^*(X, S)$. Каждая допустимая система в X определяет единственную (с точностью до изоморфизма) подалгебру Сакаи алгебры A.*

Если $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ — допустимая система, $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая последовательность из S, то, очевидно, существует система открытых множеств $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$, $q_i \subset X$, удовлетворяющая условиям

$$p_i \subset q_i \subset \operatorname{Int} p_{i-1},\ \ s_i \cdot q_i \subset \operatorname{Int} p_{i-1},$$

$$s_i \cdot q_i \ \cap q_i = \varnothing,\ q_0 = X.$$

---

* Возвращаемость в пространстве всех подкомпактов X с индуцированной топологией и действием S.

Пусть $S_n = \{s_i\}_{i=0}^{n}$, $d \subset S_n$, $d = \{s_{i_k}\}_{k=1}^{m}$, где $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$. Положим $\bar{d} = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$. Будем обозначать через $[A]$, где $A \subset \mathbf{A}$, под — C^*-алгебру, натянутую на A.

Подалгебра Сакаи $\mathbf{A}_0$ строится следующим образом.

Пусть $\mathbf{A}'(n) = [\{U(\bar{d}_1)\, \mathrm{M}(\varphi)\, U(\bar{d}_2^{-1})\}]$, $n = 0, 1, \cdots$, где $\varphi \in C(X)$, постоянна на p_n и равна нулю вне q_n, $d_1, d_2 \subset S_n$, и пусть $\mathbf{A}(n) = \left[\bigcup_{k=0}^{n} \mathbf{A}'(k) \right]$.

Обозначим, далее, $\mathfrak{M}'(n) = [\{I - \sum_{d \subset S_n} M(\bar{d}^{-1} \cdot \varphi)\}]$, $n = 0, 1, \cdots$, где $I = M(1) = U(e)$ — единичный элемент $\mathbf{A}$, φ равно 1 на p_n и равно 0 вне q_n. Тогда $\mathfrak{M}'(n) \subset \mathbf{A}(n)$. Пользуясь формулой (1) и условиями (2) легко проверить, что элементы $\mathfrak{M}'(n_1)$ коммутируют с любым элементом из $\mathbf{A}'(n_2)$ при всех n_1 и n_2, откуда следует, что

$$\mathfrak{M}(n_1)\, \mathbf{A}(n_2) = \mathbf{A}(n_2)\, \mathfrak{M}(n_1) \tag{3}$$

при всех n_1, n_2. Здесь $\mathfrak{M}(n) = \left[\bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{M}(k) \right]$, а произведение понимается в обычном алгебраическом смысле.

Если теперь $\mathrm{I}(n) = [\mathfrak{M}(n)\, \mathbf{A}(n)]$, то равенство (3) позволяет заключить, что $\mathrm{I}(n)$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathbf{A}(n)$. Кроме того,

$$\mathbf{A}(n) \,/\, \mathrm{I}(n) \simeq \mathrm{M}_{2^n} C$$

($*$ — изоморфизм, M_k C-алгебра матриц порядка k).

В самом деле, если $\tau_n \colon \mathbf{A}(n) \to \mathbf{A}(n)/\mathrm{I}(n)$, то зафиксировав произвольную функцию φ_n, равную 1 на p_n, 0 вне q_n, легко показать, что элементы $\tau_n(U(\bar{d}_1)\, M(\varphi_n)\, U(\bar{d}_2^{-1}))$ образуют систему 2^{2n} матричных единиц в $\mathbf{A}(n)/\mathrm{I}(n)$ и порождают эту алгебру. Например, если $d_1, d_2, c_1, c_2 \subset S_n$, то

$$\tau_n(U(\bar{d}_1)\, M(\varphi_n)\, U(\bar{d}_2^{-1}))\, \tau_n(U(\bar{c}_1)\, M(\varphi_n)\, U(\bar{c}_2^{-1})) =$$
$$= \tau_n(U(\bar{d}_1 \bar{d}_2^{-1})\, M(\bar{d}_2^{-1} \cdot \varphi_n)\, M(\bar{c}_1^{-1} \cdot \varphi_n)\, U(\bar{c}_1 \bar{c}_2^{-1})) =$$
$$= \delta_{d_2}^{c_1} \tau_n(U(\bar{d}_1 \bar{d}_2^{-1})\, M(\bar{d}_2^{-1} \cdot \varphi_n^2)\, U(\bar{d}_2 \bar{c}_2^{-1})) =$$
$$= \delta_{d_2}^{c_1} \tau_n(U(\bar{d}_1)\, M(\varphi_n^2)\, U(\bar{c}_2^{-1})) =$$
$$= \delta_{d_2}^{c_1} \tau_n(U(\bar{d}_1)\, M(\varphi_n)\, U(\bar{c}_2^{-1})),$$

где δ — символ Кронекера.

Положим теперь $\mathbf{A}_0 = [\bigcup_{n \geq 1} \mathbf{A}(n)]$, $\mathrm{I}_0 = [\bigcup_{n \geq 1} \mathrm{I}(n)]$. Ясно, что I_0 — замкнутый двусторонний идеал $\mathbf{A}_0$.

В силу того, что алгебры $\mathbf{A}(n)$ образуют возрастающую последовательность, $\mathbf{A}(n) + \mathrm{I}(n+1)$ является под — C^*-алгеброй $\mathbf{A}(n+1)$, причем, по [I], I.8.4

$$\mathbf{A}(n) + \mathbf{I}(n+1) / \mathbf{I}(n+1) \simeq \mathbf{A}(n) / \mathbf{I}(n+1) \cap \mathbf{A}(n) = \mathbf{A}(n) / \mathbf{I}(n)$$

Таким образом $\mathbf{A}(n) / \mathbf{I}(n)$ можно отождествить с некоторой подалгеброй $\mathbf{A}(n+1) / \mathbf{I}(n+1)$ и, как нетрудно видеть, вложение это согласовано с вложением соответствующих матричных алгебр в определении

$$\mathbf{B} = \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2 C \text{ (т. е. } M_{2^n} C \times 1 \subset M_{2^{n+1}} C).$$

Следовательно $\mathbf{A}_0 / \mathbf{I}_0$ — РГФ-алгебра класса $\{2, 2^2, \cdots\}$, а $\mathbf{A}_0$ — подалгебра Сакаи.

З а м е ч а н и е. Существование подалгебры Сакаи характеризует C^*-алгебры, не являющиеся GCR-алгебрами. В классе простых алгебр понятия не GCR-алгебры и $NGCR$-алгебры совпадают.

Пусть S—аменабельная группа, свободно действующая на X. Тогда по теореме Зеллер-Мейера ([1], 4.20) алгебра $C^*(X, S)$ проста тогда и только тогда, когда динамическая система минимальна (т. е. орбита любой точки плотна в X). Следовательно, если такая система (X, S) обладает допустимой системой компактов, то алгебра $C^*(X, S)$ является $NGCR$—алгеброй. Например, такова упомянутая выше динамическая система на торе.

2. Напомним (см. [5]), *что состояние типа меры,* определяемое формулой

$$\Omega\,(M(\varphi)\,U(s)) = \delta_s^0 \int \varphi(x)\,d\mu(x)$$

для некоторой квазиинвариантной меры μ на X, при свободном действии группы является фактор-состоянием тогда и только тогда, когда соответствующая мера $\mathfrak{I}$ — эргодична. При этом тип Ω целиком определяется структурой меры: дискретная мера дает тип I, мера, эквивалентная непрерывной инвариантной, дает тип II, остальные меры порождают состояния типа III (см., напр., [4]).

О п р е д е л е н и е. Пусть ω — состояние на алгебре $\mathbf{B} = \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2\, C$, $\mathbf{A}_0$ — подалгебра Сакаи алгебры $\mathbf{A} = C^*(X, S)$, $\tau: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}$. Если Ω_0 — состояние на $\mathbf{A}_0$, определяемое формулой

$$\Omega_0(L) = \omega(\tau(L)),\ L \in \mathbf{A}_0,$$

Ω — некоторое продолжение состояния Ω_0 на всю алгебру $\mathbf{A}$, то состоянием *ассоциированным* с ω назовем любое состояние, унитарно эквивалентное (см. [3]) состоянию

$$\Omega'(L) = \sum_{s \in S} \varepsilon_s\, \Omega\,(U(s)\, L\, U(s^{-1})),$$

где $L \in \mathbf{A}$, $\sum\limits_{s \in S} \varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_s > 0$.

Если Ω — ассоциированное с ω состояние типа меры, то соответствующую ему меру мы будем также называть ассоциированной с ω.

Состояние ω на алгебре B называется диагонализуемым ([5]), если оно представляется в виде индуктивного предела (см. [4]) диагональных состояний.

Лемма 2. *Пусть μ — S-эргодическая квазиинвариантная вероятностная мера на X, $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ — некоторая допустимая система, $\mu\left(\bigcap_{n>0} \bigcup_{d\subset S_n} \bar{d}\cdot p_n\right)>0$ (в обозначениях п. 1). Тогда μ ассоциировано с некоторым диагонализуемым состоянием на алгебре* B.

Заметим вначале, что если μ — квазиинвариантная эргодическая мера, p — множество положительной меры, μ_0 — мера, определенная формулой $\mu_0(F) = \mu(p)^{-1}\mu(F\cap p)$, для любого измеримого $F\subset X$, то мера μ эквивалентна любой мере $\mu' = \sum_{s\in S} \varepsilon_s \mu_s$, где $\varepsilon_s>0$, $\sum_{s\in S} \varepsilon_s = 1$, μ_s — „сдвиг" меры μ_0, т. е. $\mu_s(F) = \mu_0(s\cdot F)$.

В самом деле, пусть $F\subset X$, $\mu'(F)=0$. Ясно, что тогда $\mu_s(F)=0$ при всех $s\in S$. Положим $F' = \bigcup_{s\in S} sF$. Так как множество F' S-инвариантно, то $\mu(F')=0$ и, тем более, $\mu(F)=0$. Обратно, если $\mu(F)=0$, то очевидно, $\mu'(F)=0$.

Пусть теперь $p = \bigcap_{n>0} \bigcup_{d\subset S_n} \bar{d}\cdot p_n$. Обозначим через ω состояние на B — индуктивный предел диагональных состояний ω_n с элементами на диагонали $\mu(p)^{-1}\mu(p\cap\bar{d}\cdot p_n)$, где $d\subset s_n$. Состояние ω диагонализуемо по определению. Легко проверить, что μ ассоциировано с состоянием ω по подалгебре Сакаи, построенной по допустимой системе компактов $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$.

3°. Нам понадобится вскоре следующее обобщение известной леммы Халмоша-Рохлина ([6], стр. 99).

Лемма 3 *Пусть T — апериодическое преобразование пространства X с квазиинвариантной нормированной мерой μ, n — натуральное число. Тогда для каждого положительного ε существует измеримое множество F такое, что множества $F, TF,\cdots,T^{n-1}F$ попарно не пересекаются и*

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^kF\right)>1-\varepsilon.$$

Таким образом, предположение о том, что T является автоморфизмом, излишне. Показать это можно способом, аналогичным доказательству леммы Халмоша-Рохлинна, приведенному в [6], но проще несколько видоизменить ее доказательство в [7], не использующее трансфинитной индукции. Заметим, что эффективное доказательство (в гораздо более общей ситуации) было опубликовано А. М. Вершиком в [8], стр. 126.

Достаточно предположить T эргодическим и для простоты рассмотреть необходимый нам случай $n = 2$.

Если существует множество $B \subset X$ такое, что все $T^k B$ попарно не пересекаются, а $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} T^k B = X$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть, напротив, преобразование T является несжимающим ([6], стр. 23) и пусть $B_0 \subset X$, $0 < \mu(B_0) < \varepsilon$. Положим $B_k = TB_{k-1} \setminus B_0$, $k = 1, 2, \cdots$. Множества эти попарно не пересекаются. Если $x \in B_k$, то, очевидно, либо $Tx \in B_{k+1}$, либо $Tx \in B_0$. В силу эргодичности $\mu(\bigcup_{k \geq 0} B_k) = 1$. Тогда множество $F = \bigcup_{k \geq 0} B_{2k+1}$ — искомое. В самом деле, $F \cap TF = \varnothing$, причем

$$\mu(F \cup TF) \geq \mu(\bigcup_{k \geq 1} B_k) = 1 - \mu(B_0) > 1 - \varepsilon.$$

4°. Лемма 4. *Предположим, что* μ — *квазиинвариантная непрерывная вероятностная мера на* X, *а динамическая система* (X, S) *такова, что* S *действует свободно, причем для каждого открытого множества* G *положительной меры для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $s \in S$,

$$s \neq e, \ \mu(G \cap \dot{s} \cdot G) > \mu(G) - \varepsilon.$$

Тогда существует допустимая система компактов $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, *для которой* $\mu(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{d \subset S_n} \overline{d} \cdot p_n) > 0$ *(в обозначениях п. 1).*

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1, \ a_n > 0, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Предположим, что построены компакты $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$ и, соответственно выбраны элементы $\{s_i\}_{i=0}^{n-1}$, удовлетворяющие условиям (2) п. 1 при $i = 0, 1, \cdots, n-1$ и

$$\mu\left(\bigcup_{d \subset S_{n-1}} \overline{d} \cdot \operatorname{Int} p_{n-1}\right) > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Если $G = \operatorname{Int} p_{n-1}$, то по условию, существует $s_n \in S$ такое, что соответствующее s_n преобразование T пространства X удовлетворяет неравенству

$$\mu\left(\bigcup_{d \subset S_{n-1}} \overline{d} \cdot (G \cap TG)\right) > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \frac{1}{2} a_n.$$

Пусть $TG = G$, тогда T — преобразование G, удовлетворяющее, в силу свободного действия группы S условиям леммы п. 3.

Пусть $TG \subset G$, $\mu(G \setminus TG) > 0$, то, положив $F = \bigcup_{k \geq 0} (T^{2k} G \setminus T^{2k+1} G)$, получаем $F \cap TF = \varnothing$. Множество $\bigcap_{k \geq 0} T^k G$ инвариантно и, если его мера отлична от нуля, мы снова оказываемся в ситуации леммы п. 3.

Аналогично обсуждается случай $G \subset TG$.

Пусть $\mu((G \cap TG) \setminus T^{-1} G) = 0$, тогда обозначив $H = G \cap TG$, мы получаем $TH \subset H$.

Пусть $\mu((G \cap TG) \setminus T^{-1} G) > 0$. Положим $F_0 = T^{-1}((G \cap TG) \setminus T^{-1} G)$. Если $F_0 \cap TG = \varnothing$, то для множества $H = T^{-1} G \cap G \cap TG$ получаем $TH \subset H$.

Обозначим $F_k = T^{-1}(T^{-1}F_{k-1} \cap G \cap TG)$, $k=1, 2, \cdots$. Как легко проверить, если $\mu(F_k) = 0$, то все сводится к уже перечисленным выше случаям. Пусть $\mu(F_k) \neq 0$, $k=1, 2, \cdots$, $F = \bigcup_{k>0} F_k$. Тогда $F \cap TF = \varnothing$, причем

$$(G \cap TG) \setminus (F \cup TF) = \bigcap_{k>-1} T^{-k} G.$$

Если $D = \bigcap_{k>-1} T^{-k} G$, то $TD \subset D$.

Таким образом, в любом случае можно утверждать следующее. Для любого $\eta > 0$ существует $F \subset G$, $TF \subset G$,

$F \cap TF = \varnothing$, $\mu(F \cup TF) > \mu(G \cap TG) - \eta$. Тогда для любого $\eta > 0$ в силу регулярности меры μ найдется компакт p_n с непустой внутренностью такой, что $p_n \subset G$, $Tp_n \subset G$, $Tp_n \cap p_n = \varnothing$, причем

$$\mu(\mathrm{Int}\, p_n \cup T\, \mathrm{Int}\, p_n) > \mu(G \cap TG) - \eta.$$

Ясно, что η можно подобрать таким образом, чтобы

$$\mu\Big(\bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot (\mathrm{Int}\, p_n \cup T\, \mathrm{Int}\, p_n)\Big) > \mu \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot (G \cap TG)) - \frac{1}{2} a_n.$$

Следовательно система компактов $\{p_l\}_{l=0}^n$ и элементы $\{s_i\}_{i=0}^n$ удовлетворяют условиям (2) п. 1, причем

$$\mu\Big(\bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot \mathrm{Int}\, p_n\Big) > 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Таким образом, можно считать допустимую систему $\{p_l\}_{l=0}^n$ построенной. Очевидно, что $\mu(\bigcap_{n>0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n) > 0$.

Лемма 5. *Предположим, что μ-квазиинвариантная дискретная вероятностная мера на X, а динамическая система (X, S) такова, что X не имеет изолированных точек, S действует свободно, причем все точки каждого открытого множества возвращающиеся. Тогда существует допустимая система компактов $\{p_l\}_{l=0}^\infty$, для которой*

$$\mu(\bigcap_{n>0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n) > 0$$

(*в обозначениях* п. 1).

Пусть x_0 — точка с положительной мерой, $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающая последовательность открытых множеств, $G_0 = X$, $\bigcap_{n>0} G_n = \{x_0\}$.

Предположим, что система компактов $\{p_l\}_{l=0}^{n-1}$, и, соответственно, элементы $\{s_l\}_{l=0}^{n-1}$ выбраны удовлетворяющими условиям (2) п. 1, причем $x_0 \in \mathrm{Int}\, p_l$, $p_l \in G_l$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Пусть для $s_n \in S$, $s_n \neq e$, $s_n \cdot x_0 \in G_n \cap \mathrm{Int}\, p_{n-1}$. Существование компакта p_n, $x_0 \in \mathrm{Int}\, p_{n-1}$, $p_n \subset G_n \cap \mathrm{Int}\, p_{n-1}$, такого, что $p_n \cap s_n \cdot p_n = \varnothing$, $s_n \cdot p_n \subset \mathrm{Int}\, p_{n-1}$, очевидно.

Система $\{p_i\}_{i=0}^{n}$ и элементы $\{s_i\}_{i=0}^{n}$ по-прежнему удовлетворяют условиям (2) п. 1, причем $x_0 \in \operatorname{Int} p_i$, $p_i \subset G_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Допустимая система $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ построена, причем, в виду того, что

$$\bigcap_{n=0} p_n = \{x_0\}, \quad \mu\Big(\bigcap_{n=0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n\Big) > 0.$$

Следствие. Предположим, что динамическая система (X, S), для которой X не имеет изолированных точек, а S действует свободно, удовлетворяет условию B (см. п. 0). Тогда для каждой S-эргодической квазиинвариантной меры μ существует допустимая система $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которой $\mu\big(\bigcap_{n=0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n\big) > 0$ (в обозначениях п. 1).

В самом деле, если μ — дискретная мера, то условия леммы 2 выполнены. Пусть μ — непрерывная мера, G — открытое множество положительной меры, $\varepsilon > 0$. В силу регулярности меры μ существует замкнутое $F \subset G$, $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Из условия B следует, что найдется $s \in S$, $s \neq e$ такое, что $F \subset G \cap s \cdot G$. Тогда $\mu(G \cap s \cdot G) > \mu(G) - \varepsilon$ и условия леммы 1 также выполнены.

Из этого следствия и леммы 2 вытекает непосредственно следующий результат.

Теорема. *Каждое фактор-состояние типа меры на скрещенном произведении, построенном по динамической системе* (X, S), *удовлетворяющей условию* B, *где* X — *метризуемый компакт без изолированных точек, а группа* S *действует свободно, ассоциировано с некоторым диагонализуемым состоянием на алгебре* $\mathbf{B} = \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2 C$ *при подходящем выборе подалгебры Сакаи.*

Ленинградский государственный
университет

Поступила 11.II.1975

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ. Ֆակտոր-վիճակներ, ըստ դինամիկ սիստեմի կառուցված խաչաձև արտադրյալների վրա *(ամփոփում)*

Հաշվելի խմբի գործողությամբ մետրիկելի կոմպակտի վրա դինամիկ սիստեմով կառուցված խաչաձև արտադրյալի համար, ցույց է տրված կոնկրետ եղանակ, $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2C$ РГФ— *հանրահաշվին *-իզոմորֆ ֆակտոր-հանրահաշվով ենթահանրահաշիվ կառուցելու համար, ենթադրելով, որ սիստեմն ունի ենթակոմպակտների որոշակի հաջորդականություն։ Ապացուցված է, որ եթե սիստեմը բոլոր ենթակոմպակտների բնական տոպոլոգիայով և գործողությամբ տարածության բավարարում է վերադառնալու պայմանին, սկզբնական կոմպակտը չունի մեկուսացված կետեր, իսկ խմբի գործողությունը ազատ է, ապա ամեն մի չափի տեսքի ֆակտոր-վիճակ համապատասխան խաչաձև արտադրյալի վրա կարելի է ստանալ ելնելով* $\times M_2C$*-ի վրա ինչ-որ դիագոնալ վիճակից։*

V. A. ARZUMANIAN. *Factor-states on the cross-products constructed by dinamical systems* (summary)

For the cross-product constructed by a dinamical system on metrisable compact with countable group action a certain way to obtain subalgebras with *UHF*

quotient algebra $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2\, C$ is proposed provided the system possesses certain sequence of subcompacts. If the system satisfies the recurrence condition the space of all subcompacts with natural topology and action, the initial compact has no isolated points and the group action is free then it is proved that each measure-type factor-state on the corresponding cross product may be obtained starting with some diagonal state on $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} M_2\, C$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Zeller-Meier.* Produits croisés d'une C^* — algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl., 47, 1968, 101—239.
2. *Ж. Диксмье.* C^*-алгебры и их представления, М., Изд. „Наука", 1974.
3. *Р. Т. Пауэрс.* Представления равномерно гиперфинитных алгебр и их связь с неймановскими кольцами, Сб. пер. „Математика", 13: 4, 1969, 94—124.
4. *S. Sakai.* C^*-algebras and W^*-algebras, Springer—Verlag, Berlin, 1971.
5. *А. М. Вершик.* *-алгебры и динамические системы, Доклад в ЛМШ по некоммутативной теории вероятностей в Казани, 1971.
6. *П. Халмош.* Лекции по эргодической теории, М., Изд. ИЛ., 1959.
7. *P. Shields.* The theory of Bernoulli shifts, Chicago Lectures in Math., 1973.
8. *А. М. Вершик.* Счетные группы, близкие к конечным. В книге Ф. Гринлиф, Инвариантные средние на топологических группах, М., Изд. „Мир", 1973.