ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

Б. С. НАХАПЕТЯН

СИЛЬНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ГИББСОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ДИСКРЕТНЫМ АРГУМЕНТОМ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

1°. В данной статье мы докажем выполнение свойства равномерного сильного перемешивания для гиббсовского случайного поля с дискретным аргументом и многочастичным вакуумным потенциалом и применим этот факт для доказательства сильной выпуклости удельной свободной энергии такого поля.

2°. Пусть Z^ν — целочисленная ν-мерная решетка ($\nu \geqslant 1$), каждой точке которой сопоставлено пространство X_t с стандартной σ-алгеброй его подмножеств A_t и заданной на A_t вполне конечной мерой μ_t такой, что $\mu_t(X_t) > 0$. Предполагается, что все пространства с мерой (X_t, A_t, μ_t) являются экземплярами одного и того же пространства с мерой (X, A, μ). Для каждого подмножества $I \subseteq Z^\nu$ определим пространство

$$X_I = \mathop{\times}_{t \in I} X_t ,$$

где $\times$ означает прямое произведение пространств. По определению $X_\varnothing = \varnothing$. В каждом из пространств X_I, $I \subseteq Z^\nu$ введем σ-алгебру измеримых подмножеств A_I и меру μ_I на ней. Для ограниченных множеств $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$* σ-алгебра A_I и мера μ_I определяются как произведение σ-алгебр A_t, $t \in I$ и произведение мер μ_t, $t \in I$ соответственно. Для неограниченных множеств I σ-алгебра A_I определяется как наименьшая σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, т. е. множествами вида $A \times X_{I \setminus J}$, $A \in A_J$ и $J \subset I$ — ограниченное множество, а мера μ_I определяется как мера, ограничения которой на σ-алгебры A_J, $J \subset I$, J — конечное множество, совпадают с μ_J.

Случайным полем с дискретным аргументом $t \in T$, $T \subseteq Z^\nu$ и значениями в множестве X называют систему случайных величин ξ_t, $t \in T$ со значениями в X. Распределением случайного поля назовем вероятностную меру P на (X_T, A_T) такую, что вероятность

$$Pr((\xi_t, t \in T) \in A) = P(A), \ A \in A_T.$$

Известно, что задание распределения P эквивалентно заданию согласованной системы конечномерных распределений $(P)_J$, $J \in W_T$** на (X_J, A_J). Согласованность означает, что

---

* Здесь и всюду в дальнейшем $|\cdot|$ — число элементов конечного множества.

** Для любого $I \subseteq Z^\nu$, $W_I = \{J : J \subset I, |J| < \infty\}$.

$$(P)_J(A) = (P)_I(A \times X_{I \setminus J}),\ A \in A_J,\ J \subset I.$$

Пусть $I,\ V \subset T$ — конечные множества такие, что $I \cap V = \varnothing$. Введем функцию

$$\gamma(I,\ V) = \sup_{A \in A_I,\ B \in A_V,\ (P)_V(B) > 0} |(P)_{I \cup V}(A/B) - (P)_I(A)|, \tag{2.1}$$

где $(P)_{I \cup V}(A/B)$ — условная вероятность события $A \in A_I$ при условии $B \in A_V$. Пусть функция $\varphi_I(d),\ d \in R^{(1)}$ такова, что $\varphi_I(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированном I. Мы скажем, что случайное поле $\xi_t,\ t \in T$ с распределением P удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания, если при любых конечных $I,\ V \subset T,\ I \cap V = \varnothing$ имеет место неравенство

$$\gamma(I,\ V) \leqslant \varphi_I(d(I,\ V)), \tag{2.2}$$

где $d(I,\ V)$ — расстояние между множествами I и V. Далее мы скажем, что последовательность распределений $P^{(m)} = \{(P^{(m)})_J,\ J \in W_T\}$ сходится при $m \to \infty$ к распределению $P = \{(P)_J,\ J \in W_T\}$, если при любых $J \in W_T$ и $A \in A_J$ имеем

$$\lim_{m \to \infty} (P^{(m)})_J(A) = (P)_J(A). \tag{2.3}$$

3°. Пусть θ — некоторый выделенный фиксированный элемент из X („вакуум"). Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu(\theta) = 1$. Для каждого $T \subseteq Z^\nu$ введем пространство

$$L_T = \bigcup_{J \in W_T} X_J$$

с σ-алгеброй измеримых множеств M_T и мерой m_T, сужения которых на каждое $X_J,\ J \subset T$ совпадают с A_J и μ_J, соответственно. Для каждого $I \subseteq Z^\nu$ и каждого элемента $x = (x_s,\ s \in I) \in X_I$ определим сдвиг $\tau_t,\ t \in Z^\nu$ этого элемента по правилу

$$\tau_t(x) = \{\tilde{x}_e,\ e \in I + t\} \in X_{I+t},\quad \tilde{x}_e = x_{e-t},\ e \in I + t.$$

Назовем потенциалом взаимодействия измеримую функцию Φ, определенную на пространстве $L = L_{Z^\nu}$ и инвариантную относительно всех сдвигов $\tau_t,\ t \in Z^\nu$. Потенциал Φ называется вакуумным, если $\Phi(x) = 0$ для любого $x \in X_I,\ I \in W_{Z^\nu}$, у которого $x_t = \theta$ хотя бы при одном $t \in I$. В дальнейшем нас будет интересовать класс B^θ вакуумных потенциалов, удовлетворяющих условию

$$\|\Phi\| = \sum_{J \in W^0_{Z^\nu}} \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \tag{3.1}$$

где $W_I^t = \{J:\ t \in J \subset I,\ |J| < \infty\},\ I \subseteq Z^\nu$ и 0 — нуль решетки Z^ν. Класс вакуумных потенциалов образует банахово пространство с нормой (3.1). Для всякого конечного множества $I \subset Z^\nu$ и любого множества $\bar{I} \subseteq Z^\nu \setminus I$ определим функцию

$$\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x)=\sum_{J\in\mathbb{F}_I\setminus\varnothing}\ \sum_{\bar{J}\in\mathbb{F}\bar{I}}\Phi(x_J,\ \bar{x}_{\bar{J}}),\ x\in X_I,\ \bar{x}\in x_{\bar{I}}.$$

Здесь и далее, если $x=(x_t,\ t\in I)\in X_I$, $I\subseteq Z^\nu$, то через x_J будем обозначать набор $(x_t,\ t\in J)$, $J\subseteq I$. Гиббсовским распределением вероятностей (р. в.) $\Gamma_I^{\Phi,\bar{x}}$ в конечном множестве $I\subset T$ с потенциалом $\Phi\in B^0$ и граничными условиями $\bar{x}\in X_{T\setminus I}$ назовем абсолютно непрерывное относительно меры μ_I р. в. на $(X_I,\ A_I)$ с плотностью

$$P_I^{\bar{x},\Phi}(x)=Z_I^{\Phi-1}(\bar{x})\exp\{-\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x)\},$$

$$Z_I^{\Phi}(\bar{x})=\int_{X_I}\exp\{-\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x)\}\,\mu_I(dx).$$

Распределение Гиббса в конечном множестве $\Gamma_I^{\Phi,\bar{x}}$, $I\subset T$ нам удобно будет трактовать как распределение случайного поля ξ_t, $t\in T$ такого, что $\xi_t=\bar{x}_t$ при $t\in T\setminus I$ с вероятностью единица, и что совместное распределение случайных величин ξ_t, $t\in I$ задается как $\Gamma_I^{\Phi,\bar{x}}$. Назовем распределение P на $(X_T,\ A_T)$ предельным для гиббсовских распределений в конечных множествах из T, если существует расширяющаяся последовательность конечных множеств $I_1\subset I_2\subset\cdots$, дающих в сумме T и последовательность граничных условий $\bar{x}^{(m)}\in X_{T\setminus I_m}$ такая, что последовательность распределений $\Gamma_{I_m}^{\Phi,\bar{x}(m)}$ имеет своим пределом распределение P. Пусть M_T^{Φ} — замкнутая (в смысле сходимости (2.3)) выпуклая оболочка совокупности распределений случайных полей, являющихся предельными для гиббсовских распределений в конечных множествах из T и потенциалом Φ. Элемент множества M_T^{Φ} назовем р. в. гиббсовского случайного поля на T соответствующим потенциалу Φ. При $T=Z^\nu$ имеем просто гиббсовское случайное поле с потенциалом Φ.

4°. Здесь будут приведены основные результаты, содержащиеся в статье.

Рассмотрим пространство $X_t^*=X_t\setminus\theta$, σ-алгебру $A_t^*=\{A\cap X_t^*\colon A\in A_t\}$ и меру μ_t^*, являющуюся сужением меры μ на σ-алгебру A_t^*. Так же как и в разделе 2 настоящей работы введем пространства

$$X_I^*=\mathop{\times}_{t\in I}X_t^*,\ I\subseteq Z^\nu,\ L_\Lambda^*=\bigcup_{J\in\mathbb{F}_\Lambda}X_J^*,\ \Lambda\subseteq Z^\nu,$$

σ-алгебры A_I^* и меры μ_I^*. Пусть

$$C_{\Phi,\mu}^{(1)}=\frac{e^{\|\Phi\|}\mu^*(X^*)}{1+e^{\|\Phi\|}\mu^*(X^*)},\ C_{\Phi,\mu}^{(2)}=2\,(1+2e^{\|\Phi\|}\mu^*(X^*))(\exp\{e^{\|\Phi\|}-1\}-1).$$

Обозначим

$$N^{\theta}_{\mu} = \{\Phi : C^{(1)}_{\Phi,\mu}(1 + C^{(2)}_{\Phi,\mu}) < 1, \Phi \in B^{\theta}\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Для всякого потенциала $\Phi \in N^{\Phi}_{\mu}$ соответствующее ему гиббсовское случайное поле на T, $T \subseteq Z^{\nu}$ существует, единственно и удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания.*

Отметим, что в случае гиббсовских случайных полей с непрерывным аргументом и парным вакуумным потенциалом аналогичный результат получен Минлосом (см.[5], [6]). Другим методом подобные результаты получены Добрушиным ([1], [2]), но в применении к гиббсовским случайным полям они требуют более сильного ограничения на потенциал, а именно условия

$$\sum_{J \in W^0_{Z^{\nu}}} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty.$$

Метод доказательства теоремы 1, примененный в данной статье, отличен от метода, примененного Минлосом и использует корреляционные уравнения, являющиеся обобщением корреляционных уравнений Галлавоти—Миракль-Соля ([7])*.

В статистической механике важную роль играет функция

$$f(\Phi) = \lim_{m \to \infty} \frac{\ln Z^{\Phi}_{I_m}(\bar{x}_m)}{|I_m|}, \; I_1 \subset I_2 \subset \cdots, \; \bigcup_m I_m = Z^{\nu}, \tag{4.1}$$

называемая удельной свободной энергией. Обычным путем (см. [9]) показывается, что при всех $\Phi \in B^{\theta}$ для каждой последовательности множеств I_m, $m=1,2,\cdots$, стремящейся к бесконечности по Ван-Хову и для любых граничных условий $\bar{x}_m \in X_{Z^{\nu} \setminus I_m}$, $m=1, 2$, предел (4.1) существует и не зависит от выбора последовательности I_m и граничных условий $\bar{x}_m$, $m = 1, 2, \cdots$.

Используя терминологию, введенную в ([8]), сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $S \subset B^{\theta}$—некоторое компактное множество и $K \subseteq B^{\theta}$—некоторый конус. Пусть множество $K \cap E^{(1)}$, где $E^{(1)}$—единичная сфера в B^{θ} -- компактно. Тогда функция $f(\Phi)$ сильно выпукла на множестве S по направлениям из конуса K.*

---

* Здесь автор пользуется случаем искренне поблагодарить Р. А. Минлоса, чьи указания способствовали получению окончательного вида корреляционных уравнений, используемых в настоящей статье.

Отметим, что теоремой 2 дан положительный ответ на вопрос, поставленный в работе ([8]) о возможности доказательства сильной выпуклости функции $f(\Phi)$ для потенциалов из B^0.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Р. Л. Добрушину за постановку задачи и внимание к работе.

5°. Для произвольного гиббсовского случайного поля $\Gamma_\Lambda^{\bar{x},\Phi}$ в конечном сосуде $\Lambda \subset T$ введем соответствующую ему корреляционную функцию $\rho_\Lambda^{\bar{x}}$, определенную на элементах L_T^* и равную

$$\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x) = (p_\Lambda^{\Phi,\bar{x}})^I(x) = \int_{X_{\Lambda\setminus I}} p_\Lambda^{\Phi,\bar{x}}(x, y)\,\mu_{\Lambda\setminus I}(dy) \text{ при } x \in X_I^*,\ I \subseteq \Lambda,$$

$$\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x) = 0 \qquad\qquad \text{при } x \in L_T^* \setminus L_\Lambda^*.$$

Пусть $I,\ V \subset \Lambda$ — конечные множества, $I \cap V = \varnothing$, $x \in X_I^*$, $y \in X_V^*$, $\bar{x} \in X_{T\setminus\Lambda}$. Введем обозначения (ср. [7]):

$$A_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{J\in W_I^t,\ \bar{J}\in W_{T\setminus\Lambda}} \Phi(x_J, \bar{x}_{\bar{J}})^*,$$

$$B_t^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{J\in W_I^t,\ \bar{J}\in W_{T\setminus\Lambda}} \Phi(x_J, y, \bar{x}_{\bar{J}}),$$

$$I_t^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{J\in W_I^{t*},\ \bar{J}\in W_{T\setminus\Lambda},\ J'\in W_{V\setminus\varnothing}} \Phi(x_J, y_{J'}, \bar{x}_{\bar{J}}),$$

$$K_t^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(S_1,\cdots,S_n)}^{*} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-B_t^{\bar{x}}(x,\, y_{S_j})} - 1\right),$$

где $\sum^*$ распространяется на все наборы $(S_1,\cdots, S_n)$, $S_i \in W_V$, $i = 1, 2,\cdots, n$ такие, что $\bigcup_j S_j = V$. Справедливы соотношения

$$\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x, y) = A_t^{\bar{x}}(x) + I_t^{\bar{x}}(x, y) + \hat{\Phi}^{\bar{x}}(x', y),\ x' = X_{I\setminus t}, \tag{5.1}$$

$$e^{-I_t^{\bar{x}}(x, y)} = \prod_{\varnothing\neq J'\in W_V} \left(1 + \left(e^{-B_t^{\bar{x}}(x,\, y_{J'})} - 1\right)\right) = 1 + \sum_{J'\in W_{V\setminus\varnothing}} K^{\bar{x}}(x, y_{J'}).$$

Аналогично ([7]), исходя из (5.1) можно показать, что корреляционная функция удовлетворяет следующему соотношению:

$$\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x) = \psi_\Lambda(x)\, e^{-A_t^{\bar{x}}(x)} \left[\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x') - \int_{X_t^*} \rho_\Lambda^{\bar{x}}(x', z)\, \mu_t^*(dz) + \right.$$

---

* Точка t берется из I первой в смысле лексикографического порядка.

$$+ (G_\Lambda^{\bar{x}}\ \rho_\Lambda^{\bar{x}})(x)], \tag{5.2}$$

$$(G_\Lambda^{\bar{x}}\ \rho_\Lambda^{\bar{x}})(x) = \sum_{J \in W_\Lambda \setminus I} \int_{X_J^*} K_i^{\bar{x}}(x, y)[\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x', y) -$$

$$-\int_{X_i^*} \rho_\Lambda^{\bar{x}}(x', y, z)\ \mu_i^*\ (dz)]\ \mu_J^*\ (dy),$$

$$\psi_\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_I^*,\ I \subseteq \Lambda \\ 0, & x \in L_T^* \setminus L_\Lambda^*. \end{cases}$$

Из (5.2) находим

$$\int_{X_i^*} \rho_\Lambda^{\bar{x}}(x', z)\ \mu_i^*(dz) =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{X_i^*} \psi_\Lambda(x', z)\ e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} [\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x') + (G_\Lambda^{\bar{x}}\ \rho_\Lambda^{\bar{x}})(x', z)]\ \mu_i^*(dz)}{\displaystyle 1 + \int_{X_i^*} \psi_\Lambda(x', z)\ e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)}\ \mu_i^*(dz)}. \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.2), окончательно получаем

$$\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x) = \psi_\Lambda(x) \frac{e^{-A_i^{\bar{x}}(x)}}{1 + \displaystyle\int_{X_i^*} e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)}\ \mu_i^*(dz)} - [\rho_\Lambda^{\bar{x}}(x') -$$

$$-\int_{X_i^*} e^{-A_i(x', z)} (G_\Lambda^{\bar{x}}\ \rho_\Lambda^{\bar{x}})(x', z)\ \mu_i^*(dz) +$$

$$+ (1 + \int_{X_i^*} e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)}\ \mu_i^*(dz))\ (G_\Lambda^{\bar{x}}\ \rho_\Lambda^{\bar{x}})(x)],\ x \in X_I. \tag{5.4}$$

Рассмотрим банахово пространство B_T^* ограниченных функций φ, заданных на L_T^* с нормой $\|\varphi\| = \sup_{J \in W_T} \{\|\varphi\|_J\}$, где

$$\|\varphi\|_J = \int_{X_J^*} |\varphi(x)|\ \mu_J^*(dx)$$

и введем здесь при всех $\Lambda \subseteq T$ и всех $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}$ операторы $K_\Lambda^{\bar{x}}$, действующие по формуле

$$(K_\Lambda^{\bar{x}} \varphi)(x) = \gamma^{\bar{x}}(x)\,[(S\varphi)(x) + (T_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(x)],$$

где

$$\gamma^{\bar{x}}(x) = \frac{e^{-A_t^{\bar{x}}(x)}}{1 + \int\limits_{X_t^*} e^{-A_t^{\bar{x}}(x', z)}\,\mu_t^*(dz)},$$

$$(S\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x') & \text{при } |I| > 1,\ x \in X_I \\ 0 & \text{при } |I| = 1,\ x \in X_I, \end{cases}$$

$$(T_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(x) = \Big(1 + \int\limits_{X_t^*} e^{-A_t^{\bar{x}}(x', z)}\,\mu_t^*(dz)\Big)(G_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(x) -$$

$$-\int\limits_{X_t^*} e^{-A_t^{\bar{x}}(x', z)} \cdot (G_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(x', z)\,\mu_t^*(dz),$$

$$(G_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(x) = \sum_{J \in W_\Lambda \setminus I}\ \int\limits_{X_J^*} K_I^{\bar{x}}(x, y)[\varphi(x', y) -$$

$$-\int\limits_{X_t^*} \varphi(x', y, z)\,\mu_t^*(dz)]\,\mu_J^*(dy).$$

Очевидны следующие неравенства:

$$\|\gamma^{\bar{x}}(S\varphi)\|_I \leqslant C^{(1)}_{\Phi,\mu}\|\varphi\|_{I'}, \qquad I' = I/t, \tag{5.5}$$

$$\|\gamma^{\bar{x}}(T_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)\|_I \leqslant C^{(1)}_{\Phi,\mu}(1 + 2e^{\|\Phi\|}\mu^*(X^*))\|\sup_{\bar{x} \in X_{T\setminus\Lambda},\, z \in X_t^*} |(G_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(\cdot, z)|\|_{I'}, \tag{5.6}$$

$$\|\sup_{\bar{x} \in X_{T\setminus\Lambda},\, z \in X_t^*} |(G_\Lambda^{\bar{x}}\varphi)(\cdot, z)|\|_{I'} \leqslant \sum_{J \in W_\Lambda \setminus I}\ \sup_{x \in X_I^*,\, y \in X_J^*,\, \bar{x} \in X_{T\setminus\Lambda}} |K_I^{\bar{x}}(x, y)| \times$$

$$\times (\|\varphi\|_{I' \cup J} + \|\varphi\|_{I \cup J}). \tag{5.7}$$

Аналогично ([7]) можно показать, что

$$\sum_{J \in W_\Lambda \setminus I}\ \sup_{x \in X_I^*,\, y \in X_J^*,\, \bar{x} \in X_{T\setminus\Lambda}} |K_I^{\bar{x}}(x, y)| \leqslant \exp\{e^{\|\Phi\|} - 1\} - 1.$$

Из этого соотношения, а также из (5.5), (5.6), (5.7) следует, что

$$\|K_\Lambda^{\bar{x}}\| \leqslant C^{(1)}_{\Phi,\mu}(1 + C^{(2)}_{\Phi,\mu}). \tag{5.8}$$

Рассмотрим в пространстве $B_T^{\bullet}$ уравнение

$$\varphi = \psi_\Lambda \gamma^{\bar{x}} \alpha + \psi_\Lambda K_\Lambda^{\bar{x}} \varphi, \tag{5.9}$$

где

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_I, \ |I| = 1, \ I \subset T \\ 0, & x \in X_I, \ |I| > 1, \ I \subset T. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\Phi \in N_\mu^0$ единственным решением данного уравнения является корреляционная функция $\rho_\Lambda^{\bar{x}}$. Отметим, что хотя корреляционные функции были введены нами лишь при конечных Λ уравнение (5.9) имеет смысл при любом $\Lambda \subset T$. Далее под корреляционной функцией $\rho_\Lambda^{\bar{x}}$, $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}$, где Λ уже не обязательно конечно, будет пониматься решение уравнения (5.9).

Далее, для любых конечных непересекающихся множеств I, $J \subset T$ обозначим

$$r^t(I, J) = \sum_{\bar{J} \in W_J^t} \sup_{x \in X_{\bar{J} \cup J}} |\Phi(x)|, \quad r(I, J) = \max_{t \in I} \{r^t(I, J)\}, \quad r^{\Phi, \mu}(I, J) = \frac{C_{\Phi, \mu}^{(2)}}{\|\Phi\|} r(I, J).$$

Для любого конечного I и произвольного $V \subset T$, $I \cap V = \varnothing$ положим

$$\alpha_T(I, V) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{J_1 \in W_{T \setminus I}} \sum_{J_2 \in W_{T \setminus (I \cup J_1)}} \cdots \sum_{\substack{J_k \in W_{T \setminus (I \cup J_1 \cup \cdots \cup J_{k-1})} \\ J_k \cap V \neq \varnothing}} \delta_{\Phi, k} \times$$

$$\times r^{\Phi, \mu}(I, J_1) \, r^{\Phi, \mu}(I \cup J_1, J_2) \cdots, r^{\Phi, \mu}(I \cup J_1 \cup \cdots \cup J_{k-1}, J_k),$$

$$\delta_{\Phi, k} = \sum_{n > k} C_n^k \, (C_{\Phi, \mu}^{(1)})^n.$$

Справедлива следующая основная

Лемма. *Пусть* $I \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T$, I — *конечно*, $x_1 \in X_{T \setminus \Lambda_1}$, $x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}$ *и* u — *наибольшее из множеств* $S \subset T \setminus \Lambda_2$ *таких, что* $(x_1)_S = (x_2)_S$. *Тогда существует константа* $D_{\Phi, \mu}$, $0 < D_{\Phi, \mu} < \infty$, *зависящая только от* Φ *и меры* μ *такая, что*

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\| \leqslant D_{\Phi, \mu} (\alpha_T(I, T \setminus \Lambda_1) + \alpha_T(I, T \setminus (\Lambda_1 \cup U))).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in X_{T / \Lambda_1}$, $\hat{x}_2 \in X_{T / \Lambda_1}$ таковы, что $(\tilde{x})_u = (x_1)_u = (x_2)_u$ и $\tilde{x}_t = \theta$ при $t \in T \setminus (\Lambda_1 \cup U)$,

$$(\hat{x}_2)_{T \setminus \Lambda_2} = x_2, \quad (\hat{x}_2)_t = \theta, \quad t \in \Lambda_2 / \Lambda_1$$

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\|_I \leqslant \|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \rho_{\Lambda_1}^{\tilde{x}}\|_I + \|\rho_{\Lambda_1}^{\hat{x}_2} - \rho_{\Lambda_1}^{\tilde{x}}\|_I + \|\rho_{\Lambda_1}^{\hat{x}_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\|_I. \tag{5.10}$$

Далее, используя уравнение (5.9), легко получить следующие равенства:

$$\hat{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2} = \psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2} (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \hat{\rho}_{\Lambda_2}^{x_2} + \psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2} (\hat{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2})^{*},$$

$$\rho_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2})^{n} (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \rho_{\Lambda_2}^{x_2},$$

и следовательно

$$\|\hat{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\|_I \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|(\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2})^{n} (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\|_I . \tag{5.11}$$

Оценим сумму данного ряда. Воспользовавшись неравенством $|e^{-a}-1| \leqslant \frac{|a|}{b} |e^{b}-1|$ при $b > |a|$ (b, a — действительные числа), можем написать

$$\sup_{x \in X_J^*,\, y \in X_J^*,\, x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}} |K_I^{x_2}(x, y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(S_1, \cdots, S_n)} \left(\frac{e^{\|\Phi\|}-1}{\|\Phi\|} \right)^{n} \prod_{j=1}^{n}$$

$$\sup_{x \in X_J^*,\, y \in X_{S_j},\, x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}} |B_I^{x_2}(x, y)|.$$

Учитывая, что

$$\sum_{J \in W_2 \setminus J} \sup_{x \in X_J^*,\, y \in X_J^*,\, x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}} |B_I^{x_2}(x, y)| \leqslant \|\Phi\|,$$

имеем

$$\sum_{J \in W_{\Lambda_2} \setminus I} \sup_{x \in X_J^*,\, y \in X_J^*,\, x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}} |K_I^{x_2}(x, y)| \leqslant \frac{\exp |e^{\|\Phi\|}-1| - 1}{\|\Phi\|} \sum_{J \in W_{T \setminus I}} r(I, J). \tag{5.12}$$

Воспользовавшись соотношениями (5,6), (5.7) и (5.12), получаем оценку

$$\|\gamma^{x_2}(T_{\Lambda_2}^{x_2} \varphi)\|_I \leqslant C_{\Phi, \mu}^{(1)} \sum_{J \in W_{T \setminus I}} \frac{r^{\Phi, \mu}(I, J)}{2} (\|\varphi\|_{I \cup J} + \|\varphi\|_{I \cup J}), \tag{5.13}$$

которую в дальнейшем будем использовать наряду с оценкой

$$\|\gamma^{x_2}(S\varphi)\|_I \leqslant C_{\Phi, \mu}^{(1)} \|\varphi\|_{I} . \tag{5.14}$$

Далее отметим, что при всех I, $\tilde{I} \subset T$ имеет место равенство

$$\sum_{J \in W_{T \setminus I}} r^{t}(I, J) = \sum_{J \in W_{T \setminus \tilde{I}}} r^{t}(\tilde{I}, J),$$

и следовательно

---

* Здесь было использовано равенство $\hat{K}_{\Lambda_1}^{x_2} \hat{\rho}_{\Lambda\Lambda_1}^{x_2} = K_{\Lambda_1}^{x_2} \hat{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2}$.

$$\sum_{J\in W_T\setminus I} r^{\Phi,\mu}(I,\ J) \geqslant \sum_{J\in W_{T\setminus \widetilde I}} r^{t}(\widetilde I,\ J). \tag{5.15}$$

Учитывая (5.15), (5.13), (5.14), а также неравенство

$$\|(\psi_{\Lambda_2}-\psi_{\Lambda_1})\,\rho^{x_2}_{\Lambda_2}\|_I \leqslant \chi_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(I),$$

$$\chi_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(I)=\begin{cases}1, & I\subset\Lambda_2\setminus\Lambda_1\\ 0, & I\not\subset\Lambda_2\setminus\Lambda_1,\end{cases}$$

можем написать

$$\|(\psi_{\Lambda_1}K^{x_2}_{\Lambda_2})^n\,(\psi_{\Lambda_2}-\psi_{\Lambda_1})\,\rho^{x_2}_{\Lambda_2}\|_I \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} C_n^k\,(C^{(1)}_{\Phi,\mu})^n \sum_{J_1\in W_{T\setminus I}}\ \sum_{J_2\in W_{T\setminus(I\cup J_1)}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{\substack{J_k\in W_{T\setminus(I\cup J_1\cup\cdots\cup J_{k-1})}\\ J_k\not\subset\Lambda_1}} r^{\Phi,\mu}(I,\ J_1)\cdots e^{\Phi,\mu}(I\cup J_1\cdots J_k,\ J_k),$$

после чего очевидно, что

$$\|\hat\rho^{x_2}_{\Lambda_1}-\psi_{\Lambda_1}\rho^{x_2}_{\Lambda_2}\|_I \leqslant \alpha_T(I,\ T\setminus\Lambda_1). \tag{5.16}$$

Следуя тем же путем, что и при получении (5.11), имеем

$$\|\rho^{x_1}_{\Lambda_1}-\bar\rho^{x}_{\Lambda_1}\|_I \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|(\psi_{\Lambda_1}K^{x_1}_{\Lambda_1})^n\,[\psi_{\Lambda_1}\alpha(\gamma^{x_1}-\widetilde\gamma^{x})+\psi_{\Lambda_1}(K^{x_1}_{\Lambda_1}-\bar K^{x}_{\Lambda_1})\,\rho^{x_1}_{\Lambda_1}\|_I.$$

Воспользовавшись известным неравенством

$$\left|\prod_{l=1}^{n} a_l-\prod_{l=1}^{n} b_l\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|\prod_{j\neq k}\max\{|a_j|,\ |b_j|\},\quad a_j,\ b_j$$

— действительные числа, можем написать

$$\|\sup_{x\in X^*_I}|(G^{x_1}_{\Lambda_1}-\bar G^{x}_{\Lambda_1})\,\rho^{x_1}_{\Lambda_1}\|_I \leqslant 2\sum_{J\in W_{\Lambda_1\setminus I}}\ \sup_{x\in X^*_I,\ y\in X^*_J}|K^{x_1}_I(x,\ y)-$$

$$-\bar K^{x}_I(x,\ y)| \leqslant 2\,e^{\Xi}\sum_{J\in W_{\Lambda_1\setminus I}}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ \sum^{*}_{(S_1,\ldots,S_n)} n\,\max_{\{k\}}\ \sup_{x\in X^*_I,\ y\in X^*_{S_k}},$$

$$|e^{-B^{x_1}_I(x,\ y)+\bar B^{x}_I(r,\ y)}-1|\prod_{j\neq k}\max_{\{k\}}\ |\sup_{x\in X^*_I,\ y\in X^*_{S_j}}|e^{-B^{x_1}_I(x,\ y)}-1|,$$

$$\sup_{x\in X^*_I,\ y\in X^*_{S_j}}|e^{-\widetilde B^{x}_I(r,\ y)}-1|| \leqslant D^{(1)}_{\Phi}\sum_{J\in W_{\Lambda_1\setminus I}}\ \sup_{x\in X^*_I,\ y\in X^*_J}|B^{x_1}_I(x,\ y)-$$

$$-\bar B^{x}_I(x,\ y)| \leqslant D^{(1)}_{\Phi,\mu}\sum_{J\in W_{T\setminus I},\ J\not\subset U\cup\Lambda_1} r^{\Phi,\mu}(I,\ J^*).$$

---

* Всюду в дальнейшем $D^{(l)}_{\Phi}$, $D^{(l)}_{\Phi,\mu}$, $l=1,\ 2,\cdots$ означают константы, зависящие только от Φ и от φ, μ такие, что $0<D^{(l)}_{\Phi}$, $D^{(l)}_{\Phi,\mu}<\infty$.

Окончательно

$$\|\sup_{x\in X_I^{\bullet}} (G_{\Lambda_1}^{x_1} - G_{\Lambda_1}^{\bar{x}})\, \rho_{\Lambda_1}^{x_1}\|_I \leqslant D_{\Phi,\mu}^{(1)} \sum_{\substack{J\in W_{T\setminus I}\\ J\bar{\in} U\cup\Lambda_1}} r^{\Phi,\mu}(I,\ J). \tag{5.17}$$

Воспользовавшись неравенством (5.17) наряду с легко выводимыми неравенствами

$$\|e^{-A_I^{x_1}} - e^{-A_I^{\bar{x}}}\|_I \leqslant D_{\Phi}^{(2)} \sup_{x\in X_I^{\bullet}} |A_I^{x_1}(x) - A_I^{\bar{x}}(x)| \leqslant D_{\Phi,\mu}^{(2)} \sum_{\substack{J\in W_{T\setminus I}\\ J\bar{\in} U\cup\Lambda_1}} r^{\Phi,\mu}(I,\ J),$$

$$\left\| \int_{X_I^{\bullet}} \left(e^{-A_I^{x_1}(\cdot,\,z)} - e^{-A_I^{\bar{x}}(\cdot,\,z)}\right) \mu_I^{\bullet}(dz) \right\|_I \leqslant \tilde{D}_{\Phi,\mu}^{(2)} \sum_{\substack{J\in W_{T\setminus I}\\ J\bar{\in} U\cup\Lambda_1}} r^{\Phi,\mu}(I,\ J)$$

довольно просто показать, что

$$\|\psi_{\Lambda_1}\alpha\,(\gamma^{x_1} - \gamma^{\bar{x}}) + \psi_{\Lambda_1}(K_{\Lambda_1}^{x_1} - K_{\Lambda_1}^{\bar{x}})\, \rho_{\Lambda_1}^{x_1}\|_I \leqslant D_{\Phi,\mu}^{(3)} \sum_{\substack{J\in W_{T\setminus I}\\ J\bar{\in} U\cup\Lambda_1}} r^{\Phi,\mu}(I,\ J).$$

после чего очевидно существование константы $D_{\Phi,\mu}^{(4)}$ такой, что

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}}\|_I \leqslant D_{\Phi,\mu}^{(4)}\, \alpha_T(I,\ T\setminus(\Lambda_1\cup U)). \tag{5.18}$$

Совершенно аналогично

$$\|\rho_{\Lambda_2}^{x_2} - \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}}\|_I \leqslant D_{\Phi,\mu}^{(5)}\, \alpha_T(I,\ T\setminus(\Lambda_1\cup U)). \tag{5.19}$$

Из соотношений (5.16), (5.18), (5.19) и следует лемма.

Отметим, что для произвольного гиббсовского случайного поля в конечном сосуде $\Lambda\subset T$ и граничными условиями $\bar{x}\in X_{T\setminus\Lambda}$ плотность $\rho_{\Lambda}^{\bar{x},\Phi}$ связана с его корреляционной функцией следующим образом:

$$(\rho_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) = \sum_{J\subset\tilde{I}} (-1)^{|J|} \|p_{\Lambda}^{\bar{x}}(x_{I\setminus\tilde{I}}\,\cdot)\|_J,\quad \tilde{I} = \{t\colon x_t = \theta,\ t\in I\}. \tag{5.20}$$

Формулой (5.20) определение плотности можно распространить и на произвольные Λ. Далее легко видеть, что имеет место соотношение

$$|(\Gamma_{\Lambda_1}^{x_1})_I(A) - (\Gamma_{\Lambda_2}^{x_2})_I(A)| \leqslant 2^{|I|}\, \|p_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1} p_{\Lambda_2}^{x_2}\|_I \leqslant$$
$$\leqslant 2^{|I|} D_{\mu,\Phi}^{(5)}\, [\alpha(I,\ T\setminus\Lambda_1) + \alpha(I,\ T\setminus(\Lambda_1\cup U))],\quad A\in A_I. \tag{5.21}$$

Заметим теперь, что из соотношений (5.21) вытекают все утверждения теоремы 1. Действительно, покажем, что распределение $\{(\Gamma_T^{\Phi,\mu})_I,\ I\in W_T\}$ является предельным для гиббсовских распределений в конечных сосудах независимо от выбора последовательности расширяющихся множеств и граничных условий (т. е. является единственным гиббсовским распределением, соответствующим данному потенциалу). Действительно из (5.21) имеем

$$|(\Gamma^{\overline{x}_m, \Phi}_{\Lambda_m})_I(A) - (\Gamma^{\overline{x}, \Phi}_T)_I(A)| \leqslant 2^{|I|+1} D^{(5)}_{\mu, \Phi_0}(I, T \setminus \Lambda_m) \cdot \tag{5.22}$$

Очевидно, что правая часть (5.22) стремится к нулю при $m \to \infty$. Для доказательства равномерного сильного перемешивания данного гиббовского случайного поля, исходя из (5.21), полагая $\Lambda_1 = T \setminus V$, $\Lambda_2 = T$, имеем

$$\frac{1}{\int\limits_B (p^{\Phi, \overline{x}}_T)_V(y)\,\mu_V(dy)} \left| \int\limits_B (\Gamma^{\Phi, \overline{y}}_{T \setminus V})_I(A)(p^{\Phi, \overline{x}}_T)_V(y)\,\mu_V(dy) - \int\limits_B (\Gamma^{\Phi, \overline{x}}_T)_I(A) \times \right.$$

$$\left. \times (p^{\Phi, \overline{x}}_T)_V(y)\,\mu_V(dy) \right| \leqslant D^{(6)}_{\mu, \Phi}\,\alpha(I, V), \; B \in A_V.$$

Полагая $\varphi_I(d(I, V)) = D^{(6)}_{\mu, \Phi}\,\alpha_T(I, V)$, завершаем доказательство теоремы 1.

В заключение отметим, что теорема 2 доказывается совершенно аналогично основной теореме статьи [8].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.XI.1974

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ. Դիսկրետ արգումենտով պատահական գիբսյան դաշտի ուժեղ խառնումը և նրա մի քանի կիրառությունները *(ամփոփում)*

Կլասիկ ստատիստիկական ֆիզիկայի բազմամասնիկ վակուումային պոտենցիալ ունեցող ցանցային սիստեմների լայն դասի համար ապացուցվում է համապատասխան գիբսյան պատահական դաշտերի գոյությունը, միակությունը և հավասարաչափ ուժեղ խառնումը։ Արդյունքները կիրառվում են այդ դաշտերի տեսակարար ազատ էներգիայի ուժեղ ուռուցիկությունը ապացուցելու։

B. S. NAHAPETIAN. *Strong mixing property of the Gibbs random field and its applications* (summary)

The strong mixing property of the Gibbs random field is proved for a large class of lattice systems. This result is applied to show the strong convexity of specific free energy.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Добрушин.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, Теор. вер. и ее прим. 2, 1968, 201—229.
2. *Р. Л. Добрушин.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ и его прил., 4, 1968, 31—43.
3. *Р. Л. Добрушин.* Гиббсовские поля. Общий случай, Функц. анализ и его прил., 1, 1969, 27—35.
4. *Р. Л. Добрушин.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений, Теор. вер. и ее прим., 3, 1970, 469—497.

5. *Р. А. Минлос.* Предельное распределение Гиббса, Функ. анализ и его прил., 2, 1967, 60—73.
6. *Р. А. Минлос.* Регулярность предельного распределения Гиббса, Функц. анализ и его прил., 3, 1967, 40—54.
7. *G. Gallavotti* and *S. Miracle-Sole.* Correlation Functions of a Lattice System, Commun. Math. Phys., 7, 1968, 274—288.
9. *Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян.* Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики. Теор. и мат. физика, 20, вып. 2, 1974.
9. *D. Ruelle.* Statistical Mechanics. Rigorous Results, New York, Amsterdam, 1969.