ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

А. А. КИТБАЛЯН

ЗАДАЧА α-КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ В КЛАССАХ ДАНЖУА—КАРЛЕМАНА

Введение

1°. В исследовании М. М. Джрбашяна [1] было введено понятие α-квазианалитичности, охватывающее, в частности, понятие классической квазианалитичности Адамара—Данжуа—Карлемана.

Приведем некоторые определения и формулировки основных результатов этого исследования.

Через $C_\alpha^{(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ обозначалось множество бесконечно-дифференцируемых на положительной полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, подчиненных условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{m\alpha})\varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

Рассматривались операторы последовательного дифференцирования функции $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ в смысле Вейля дробных порядков $\frac{n}{\rho}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, где положено $\frac{1}{\rho} = 1-\alpha$ $(\rho \geqslant 1)$:

$$D_\infty^{0/\rho}\varphi(x) \equiv \varphi(x), \quad D_\infty^{1/\rho}\varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha}\varphi(x),$$

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) \quad (n=2, 3, \cdots), \tag{2}$$

причем

$$D_\infty^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

Далее, для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^{(\infty)}$ вводились в рассмотрение следующие два класса бесконечно-дифференцируемых функций:

Класс $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ — множество функций, принадлежащих $C_\alpha^{(\infty)}$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant AB^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

и класс $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ — множество функций, принадлежащих C_α^∞ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+\alpha x^2)\,\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^nM_n\quad (n=1, 2,\cdots).$$

Для этих классов ставилась задача, аналогичная известной проблеме Адамара и сводящаяся к ней в случае $\alpha=0$:

какова должна быть последовательность чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для любой пары функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, принадлежащих одному из указанных классов, из равенств

$$D_-^{n/\rho}\varphi(0)=D_-^{n/\rho}g(0)\quad (n=0, 1, 2,\cdots)$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x)\equiv g(x)\ \text{при}\ 0\leqslant x<+\infty.$$

Такого рода классы $C_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n\}$ или $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ были названы α-квазианалитическими.

При этом очевидно, что 0-квазианалитические классы $C_0^*\{0,+\infty);\ M_n\}$ и $C_0\{[0,+\infty);\ M_n\}$ есть не что иное, как квазианалитический на $[0,+\infty)$ класс $C\{[0,+\infty);\ M_n\}$ в классическом смысле.

Решение задачи α-квазианалитичности при $0\leqslant\alpha<1$ в работе [1] проводилось сведением ее к проблеме Ватсона для угловых областей, лежащих в правой полуплоскости. Такое сведение осуществлялось методом теории интегральных преобразований и представлений функций с ядрами Миттаг-Леффлера, развитой М. М. Джрбашяном [2], в сочетании с рядом свойств операторов дробного дифференцирования функций в смысле Вейля.

В основных результатах об α-квазианалитичности введенных выше классов утверждалось следующее*.

Теорема А. 1°. Для α-квазианалитичности класса $C_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n\}$ $(0<\alpha<1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^\infty\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty,\tag{3}$$

где

$$T(r)=\sup_{n\geqslant1}\frac{r^n}{M_n}.\tag{4}$$

2°. Для α-квазианалитичности класса $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^\infty\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty.\tag{5}$$

Оба утверждения этой теоремы в случае $\alpha=0$ сводятся к классической теореме Данжуа-Карлемана.

---

* См. [1], теоремы 3 и 4.

Вместе с тем, в α-квазианалитических классах М. М. Джрбашяна при $0<\alpha<1$ охватываются функции, последовательные производные которых могут иметь существенно более быстрый рост, чем это допустимо для функций из классического квазианалитического класса Данжуа-Карлемана. Как уже указывалось (см. [1], стр. 239), например, если

$$M_n = (n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \log n \cdots \log_p n)^n, \ n \geqslant N_p \ (p > 1),$$

$$(\log_k a = \log \log_{k-1} a, \ k = 2, 3, \cdots, p),$$

то условие (5) выполняется и класс $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ является α-квазианалитическим, согласно теореме А. Между тем, так как $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 1$ при $0<\alpha<1$, то указанные классы заведомо неквазианалитичны в смысле Данжуа-Карлемана.

2°. В настоящей работе определение классов $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ распространяется на случай $-1<\alpha<0$ и ставится задача об α-квазианалитичности этих классов.

С этой целью в § 1 вводятся в рассмотрение операторы последовательного дифференцирования в смысле Вейля порядков $\frac{n}{\rho}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, „шаг“ которых $\frac{1}{\rho} = 1-\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ больше единицы. Определение классов функций $C_\alpha^{(\infty)}$ и $C_\alpha^{*(\infty)}$ распространяется на случай $-1<\alpha<0$, и доказывается ряд вспомогательных предложений.

Далее, в § 2, для произвольной последовательности чисел $\{M_n\}_1^\infty$ в случае $-1<\alpha<0$ определяются классы $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ и для функций, принадлежащих этим классам, как и в [1], ставится задача α-квазианалитичности.

Основной результат настоящей работы формулируется в следующем виде (§ 2, теоремы 1 и 2):

1°. *Для α-квазианалитичности класса* $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ *в случае* $-1<\alpha<0$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty,$$

где

$$T(r) = \sup \frac{r^n}{M_n} \cdot$$

2°. *Для α-квазианалитичности класса* $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<0)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty.$$

Таким образом, в итоге, теорема А распространяется на произвольное значение параметра α $(-1 < \alpha < 1)$.

Заметим, что в случае $-1 < \alpha < 0$ $\left(\text{т. е. } \frac{1}{2} < \rho < 1\right)$ доказательство основной теоремы вновь проводится методом интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, однако, возникающие в этом случае угловые области раствора $\frac{\pi}{\rho} > \pi$ создают ряд существенных трудностей аналитического характера.

3°. Особо подчеркнем существенную разницу между постановкой задачи классической или обобщенной квазианалитичности и α-квазианалитичности в случае $-1 < \alpha < 0$.

С этой целью напомним, что обобщенная проблема квазианалитичности, впервые поставленная и решенная С. Мандельбройтом [3], может быть сформулирована в следующем виде:

указать такие условия, связывающие последовательность положительных чисел $\{M_n\}$ *и возрастающую последовательность натуральных чисел* $\{\nu_n\}$, *что если бесконечно-дифференцируемая и ограниченная на полуоси* $[0, +\infty)$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|f^{(n)}(x)| < k^n M_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

для некоторой положительной константы k, *то из условий*

$$f(0) = f^{(\nu_n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

следовало бы, что $f(x) \equiv 0$ *на полуоси* $[0, +\infty)$.

Такие классы функций принято называть $\{\nu_n\}$-*квазианалитическими* на полуоси $[0, +\infty)$.

Проблема квазианалитичности в классическом смысле соответствует случаю $\nu_n = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Таким образом, если в случае обобщенной квазианалитичности каждая функция определяется единственным образом посредством своего значения и значения лакунарной последовательности производных в одной точке, то, как следует из анализа, проведенного в последнем пункте § 2 настоящей работы, в рассматриваемом нами случае α-квазианалитичности, функции классов $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 0)$ определяются посредством значений в точке моментов от производных функции по данной лакунарной последовательности $\nu_n = 2n - [n(1+\alpha)]$ с плотностью

$$D = \lim \frac{n}{\nu_n} = \frac{1}{1-\alpha} = \rho > \frac{1}{2}.$$

Это свидетельствует о качественной близости результатов настоящей статьи и результатов теорем С. Мандельбройта [3], хотя и эти задачи принципиально отличаются по своей постановке.

§ 1. Дифференциальные операторы порядка больше единицы и их свойства

1°. Приведем известные определения интеграла $D_{\infty}^{-\alpha} f(x)$ порядка α $(0<\alpha<\infty)$ и производной $D_{\infty}^{\alpha} f(x)$ порядка α $(0<\alpha\leqslant 1)$ в смысле Вейля (см., напр., [1]).

Если функция $f(x)$ определена и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то

$$D_{\infty}^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \quad (0<\alpha<\infty), \tag{1.1}$$

$$D_{\infty}^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1-\alpha)} f(x) \quad (0<\alpha\leqslant 1), \tag{1.2}$$

причем интеграл (1.1) существует при условии $x^{\alpha} f(x) \in L(0, +\infty)$ и, более того, $\lim\limits_{\alpha\to+0} D_{\infty}^{-\alpha} f(x) = f(x)$ во всех точках Лебега функции $f(x)$.

Далее, для любого фиксированного α $(-1<\alpha\leqslant 0)$ обозначим

$$\rho = \frac{1}{1-\alpha} \quad \left(\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1\right),$$

и на полуоси $(0, +\infty)$ введем в рассмотрение операторы последовательного дифференцирования функции $f(x)$ порядков $\frac{n}{\rho}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ в смысле Вейля:

$$D_{\infty}^{0} f(x) \equiv f(x), \tag{1.3}$$

$$D_{\infty}^{1/\rho} f(x) \equiv -\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} f(x), \tag{1.4}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho} f(x) \equiv D_{\infty}^{1/\rho} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} f(x) \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{1.5}$$

В частности, при $\rho=1$, из (1.3) и (1.5) следует, что

$$D_{\infty}^{n} f(x) \equiv f^{(n)}(x) \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.6}$$

Сразу же заметим, что если функция $f(x)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^{m\mu}}, \tag{1.7}$$

где $A = \text{const}$; $n, m = 0, 1, 2, \cdots$; $\mu>0$ (в дальнейшем мы будем рассматривать функции именно из таких классов), то формулу (1.4) можно представить также в следующем виде:

$$D_{-\infty}^{1/\rho} f(x) = -\frac{d^2}{dx^2} D_{-\infty}^{-(1+\alpha)} f(x). \tag{1.8}$$

В самом деле, составляя интегральный оператор $D_{-\infty}^{-(1+\alpha)} f(x)$ и производя интегрирование по частям, с учетом условий (1.7), получим

$$-\frac{d^2}{dx^2} D_{-\infty}^{-(1+\alpha)} f(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha+1} f'(t)\, dt =$$

$$= -\frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha} f'(t)\, dt = -\frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)} f'(x),$$

то есть соотношение (1.4).

Наряду с операторами $D_{-\infty}^{\alpha}$ нам понадобятся также операторы Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$: $D_0^{-\beta}$ и D_0^{β}, которые определяются следующим образом [1]: для произвольной функции $f(x) \in L(0, l) (0 < l < +\infty)$ и любого β $(0 < \beta < +\infty)$

$$D_0^{-\beta} f(x) \equiv \frac{d^{-\beta} f(x)}{dx^{-\beta}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l), \tag{1.1′}$$

причем при $\beta = 0$ полагают $[D_0^{-\beta} f(x)]_{\beta=0} = f(x)$; если же функция $f(x) \in L(0, l)$ такова, что при данном β $(0 < \beta \leqslant 1)$ оператор $D_0^{-(1-\beta)} f(x)$ хотя бы почти всюду обладает производной, то

$$D_0^{\beta} f(x) \equiv \frac{d^{\beta} f(x)}{dx^{\beta}} \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\beta)} f(x). \tag{1.2′}$$

Далее, аналогично случаю операторов Вейля, для произвольного фиксированного β $(-1 < \beta \leqslant 0)$ введем в рассмотрение операторы

$$D_0^{1/\rho} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1+\beta)} \frac{d}{dx} f(x), \tag{1.4′}$$

$$D_0^{n/\rho} f(x) \equiv D_0^{1/\rho} D_0^{\frac{n-1}{\rho}} f(x) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.5′}$$

полагая, как и выше, что параметры ρ и β связаны друг с другом соотношением

$$\rho = \frac{1}{1-\beta}.$$

2°. Известно [1], что функции вида $e^{-\lambda^{\rho} x}$, а также $x^{\mu-1} E_{\rho}(\lambda x^{1/\rho}; \mu$ $(\rho > 0, \mu > 0)$, где

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \tag{1.9}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера, а λ-произвольный комплексный параметр, являются решениями задач типа Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка.

В частности, для случая, когда $\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1$, нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1.1. *Функция* $e_\rho(x, \lambda) = e^{-\lambda^\rho x}$ $\left(|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2\rho},\ \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1\right)$ *является решением задачи типа Коши:*

$$D_{\infty}^{1/\rho} y + \lambda y = 0,\ y(0)=1. \tag{1.10}$$

Доказательство. Случай $\rho = 1$ непосредственно проверяется в силу (1.6).

В случае же $\frac{1}{2}<\rho<1$ имеем

$$D_{\infty}^{1/\rho}(e^{-\lambda^\rho x}) = -\frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)}(-\lambda^\rho e^{-\lambda^\rho x}) =$$

$$= \lambda^\rho \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-\lambda^\rho x}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^\infty u^\alpha e^{-\lambda^\rho u}\,du\right]\cdot$$

Отсюда следует, что при $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2\rho}$

$$D_{\infty}^{1/\rho}(e^{-\lambda^\rho x}) = \lambda^\rho \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-\lambda^\rho x}}{\lambda^{\rho(1+\alpha)}\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t}\,dt\right] = -\lambda e^{-\lambda^\rho x},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. *Функция*

$$\mathrm{E}_\rho(x;\lambda) = E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)\cdot x^{\frac{1}{\rho}-1} \left(\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1\right), \tag{1.11}$$

где λ *— произвольный параметр, является решением следующей задачи типа Коши на полуоси* $[0, +\infty)$:

$$D_0^{1/\rho} y(x) - \lambda y(x) = 0, \tag{1.12}$$

$$D_0^{-\alpha} y(x)|_{x=0} = 1. \tag{1.12'}$$

Доказательство. Случай $\rho=1$ проверяется непосредственно, поскольку $\mathrm{E}_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$.

В случае же $\frac{1}{2}<\rho<1$ заметим, что при любом $\alpha\geqslant -1$ и $\beta>-1$ имеем*

$$D_0^{-\alpha}\left\{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},\ x\in(0, +\infty). \tag{1.13}$$

---

* См. [1], стр. 200.

Тогда, учитывая определения (1.4′), (1.11), а также формулу (1.13), получим

$$D_0^{1/\rho}\mathbf{E}_\rho(x;\lambda)=\frac{d}{dx}\,D_0^{-(1+\alpha)}\,\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k+1}{\rho}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}=\lambda\mathbf{E}_\rho(x;\lambda).$$

Остается проверить выполнение начального условия (1.12′).

С учетом (1.13) имеем

$$D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(x;\lambda)=D_0^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k+1}{\rho}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{k/\rho}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right)},$$

откуда непосредственно следует, что

$$D_0^{-\alpha}\ \mathbf{E}_\rho(x;\lambda)|_{x=0}=1.$$

3°. Следуя работе [1], определим на полуоси $[0,+\infty)$ следующие два класса функций: класс $C_\alpha^{(\infty)}$ $(-1<\alpha\leqslant 0)$ функций $\varphi(x$ обладающих на $[0,+\infty)$ всеми последовательными производным $D^n_\infty\varphi(x)=\varphi^{(n)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, которые подчинены условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{|\alpha|m})\varphi^{(n)}(x)|<+\infty\quad(n,m=0,1,2,\cdots)\qquad(1.14$$

и класс $C_\alpha^{*(\infty)}$ $(-1<\alpha\leqslant 0)$ функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0,+\infty$ всеми последовательными производными в смысле Вейля $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x$ $(n=0,1,2,\cdots)$, непрерывными на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющими условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{|\alpha|m})D^{n/\rho}\varphi(x)|<+\infty\quad(n,m=0,1,2,\cdots).\qquad(1.15$$

В случае $\alpha=0$ $(\rho=1)$ классы $C_0^{(\infty)}$ и $C_0^{*(\infty)}$ тождественны с классом функций $\varphi(x)$, бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0,+\infty$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|\varphi^{(n)}(x)|<+\infty\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

В работе [1] было доказано, что аналогичные классы $C_\alpha^{(\infty)}$ и $C_\alpha^{*(}$ определенные для случая $0\leqslant\alpha<1$, тождественны. Покажем теперь что и в случае $-1<\alpha<0$ эти классы обладают тем же свойством.

Лемма 1.3. *Классы* C_α^{∞} *и* $C_\alpha^{*(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *совпадают, причем для любой функции* $\varphi(x)\in C_\alpha^{(\infty)}\equiv C_\alpha^{*(\infty)}$ *на всей полуоси* $[0,+\infty$ *справедливы формулы*

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)=D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x),\qquad(1.16$$

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)=(-1)^k D_\infty^{-[(1+\alpha)n-k]}\varphi^{(2n-k)}(x),\qquad(1.17$$

$$\left(n=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ \ k=0,\ 1,\cdots,\ \left[\frac{n}{\rho}\right]\right),$$

$$\varphi^{(k)}(x)=(-1)^{n-k}\,D_{\infty}^{-\left(\frac{n}{\rho}-k\right)}\,D_{\infty}^{\frac{n}{\rho}}\,\varphi(x) \qquad (1.18)$$

$$\left(n=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ k=0,\ 1,\cdots\ \left[\frac{n}{\rho}\right]\right).$$

Доказательство. В предположении $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{(\infty)}$ покажем, что интегралы

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)\,n}\,\varphi^{(2n)}(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int\limits_{x}^{+\infty}\varphi^{(2n)}(t)(t-x)^{n(1+\alpha)-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int\limits_{0}^{\infty}t^{n(1+\alpha)-1}\,\varphi^{(2n)}(x+t)\,dt\quad(n=1,\ 2,\cdots) \qquad (1.19)$$

сходятся абсолютно и равномерно относительно x на всей полуоси $[0,\ +\infty)$ и определяют непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{|\alpha|\,m})\,D_{\infty}^{-(1+\alpha)\,n}\varphi^{(2n)}(x)|<+\infty\ \ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.20)$$

Если обозначить

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{|\alpha|\,m})\,\varphi^{(2n)}(x)|=A_{n,\,m},$$

то

$$|\varphi^{(2n)}(x)|\leqslant\frac{A_{n,m}}{1+x^{|\alpha|\,m}}\ \ (0\leqslant x<+\infty;\ n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots) \qquad (1.21)$$

и

$$|\varphi^{(2n)}(x+t)|\leqslant\frac{A_{n,\,m}}{1+(x+t)^{|\alpha|\,m}}\leqslant\frac{A_{n,\,m}}{1+t^{|\alpha|\,m}}\ \ (0\leqslant x,\ t<+\infty;$$

$$n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.21')$$

Отсюда получается оценка

$$|D^{-(1+\alpha)\,n}\,\varphi^{(2n)}(x)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int\limits_{0}^{\infty}|\varphi^{(2n)}(u+x)|\,u^{n(1+\alpha)-1}\,du\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{0}^{\infty}\frac{u^{n(1+\alpha)-1}}{1+u^{|\alpha|\,m}}\,du$$

и ввиду произвольности $m \geqslant 0$ интегралы (1.19) сходятся абсолютно и равномерно относительно x на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Далее, поскольку $x+t \geqslant 2\sqrt{xt} > \sqrt{xt}$ $(0 \leqslant x,\ t < +\infty)$, то имеем

$$|\varphi^{(2n)}(x+t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{A_{n,m}}{1+x^{|\alpha| m}} & \text{при } 1 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t < 1 \\ \dfrac{A_{n,m}}{1+(xt)^{\frac{|\alpha| m}{2}}} & \text{при } \leqslant 1 x < +\infty,\ 1 \leqslant t < +\infty. \end{cases} \tag{1.21''}$$

Разобьем интеграл (1.19) на два интеграла:

$$D^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int_0^\infty \varphi^{(2n)}(u+x)\, u^{n(1+\alpha)-1}\, du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int_0^1 \varphi^{(2n)}(u+x)\, u^{n(1+\alpha)-1}\, du +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int_1^\infty \varphi^{(2n)}(u+x)\, u^{n(1+\alpha)-1}\, du$$

и применим к ним неравенства (1.21″). Тогда получим

$$|D^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x)| \leqslant \frac{C_1}{1+x^{|\alpha| m}} + C_2\int_1^\infty \frac{u^{n(1+\alpha)-1}}{1+u^{\frac{|\alpha| m}{2}}}\, du,$$

что приводит к оценкам (1.20).

Докажем теперь формулы (1.16), (1.17) и (1.18) леммы.

Заметим, что при $n=0$ эти формулы очевидны, так как $\varphi^{(0)}(x) \equiv \equiv \varphi(x)$, $D^0\varphi(x) \equiv \varphi(x)$.

Пусть теперь $n > 1$. Установим сначала методом полной индукции формулу (1.16). С этой целью заметим, что согласно (1.21)

$$\varphi^{(2n)}(t) = O(t^{-|\alpha| m}) \tag{1.22}$$

при $t \to +\infty$ $(n,\ m = 0, 1, 2, \cdots)$, и рассмотрим оператор

$$D_\infty^{-(1+\alpha)}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^\alpha \varphi(t)\, dt.$$

Двукратным интегрированием по частям отсюда получим

$$D_\infty^{-(1+\alpha)}\varphi(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\Gamma(\alpha+1)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha+2}\varphi''(t)\, dt.$$

Теперь уже, согласно формуле (1.8), которая представляет оператор

$D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)$ для функций $\varphi(x)\in C_\alpha^{(\infty)}$, имеем

$$D_\infty^{1/\rho}\varphi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}D_\infty^{-(1+\alpha)}\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_x^\infty (t-x)^\alpha\varphi''(t)\,dt =$$
$$= D_\infty^{-(1+\alpha)}\varphi''(x),$$

иначе говоря, формула (1.16) справедлива при $n=1$.

В работе [1] установлено*, что если γ_1 и $\gamma_2\in[0,+\infty)$ и функция $f(x)$ такова, что $x^{\gamma_1}f(x)$, $x^{\gamma_2}f(x)$ и $x^{\gamma_1+\gamma_2}f(x)$ принадлежат классу $L(0,+\infty)$, то почти всюду на $(0,+\infty)$ имеем

$$D_\infty^{-\gamma_1}D_\infty^{-\gamma_2}f(x) = D_\infty^{-(\gamma_1+\gamma_2)}f(x). \tag{1.23}$$

Заметим, далее, что согласно (1.22) функции

$$x^{1+\alpha}\varphi^{(2(n-1))}(x),\ x^{(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2(n-1))}(x) \text{ и } x^{(1+\alpha)n}\varphi^{(2(n-1))}(x)$$

абсолютно интегрируемы при всяком $n\geqslant 1$. Тогда, как следует из (1.23), почти всюду на $(0,+\infty)$ имеет место тождество

$$D_\infty^{-(1+\alpha)}D_\infty^{-(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2(n-1))}(x) \equiv D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2(n-1))}(x) \quad (n\geqslant 1).$$

Правая часть этого тождества путем двукратного интегрирования по частям и с учетом (1.22) запишется так:

$$D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2(n-1))}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_x^\infty (t-x)^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2(n-1))}(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{[n(1+\alpha)+1][n(1+\alpha)]\,\Gamma(n(1+\alpha))}\int_x^\infty \varphi^{(2n)}(t)\,(t-x)^{n(1+\alpha)-1}\,dt,$$

откуда следует, что

$$\frac{d^2}{dx^2}D^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2(n-1))}(x) = \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int_x^\infty \varphi^{(2n)}(t)\,(t-x)^{n(1+\alpha)-1}\,dt =$$
$$= D^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x). \tag{1.24}$$

Если теперь предположим, что формула (1.16) верна при $n-1$, то есть

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2(n-1))}(x),$$

то из (1.24) получим

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv D_\infty^{1/\rho}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}D_\infty^{-(1+\alpha)}D_\infty^{-(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2(n-1))}(x) =$$
$$= -\frac{d^2}{dx^2}D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2(n-1))}(x) = D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x),$$

что и требовалось доказать.

Более того, функция $\varphi(x)$ обладает на $[0,+\infty)$ всеми последовательными производными в смысле Вейля $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ $(n\geqslant 0)$, подчиненными, в силу (1.20), условиям

---

* См. § 2, стр. 203--204.

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{|\alpha| m}) D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| < +\infty \quad (n;\ m=0, 1, 2, \cdots).$$

Это, в свою очередь, означает, что любая функция $\varphi(x)$, принадлежащая классу $C_\alpha^{(\infty)}$, принадлежит также классу $C_\alpha^{*(\infty)}$, иначе говоря, имеет место включение $C_\alpha^{(\infty)} \subset C_\alpha^{*(\infty)}$.

Теперь докажем формулу (1.17). Заметим, что при $k=0$ она совпадает с (1.16). Пусть $n \geqslant 1$. Если $[(\alpha+1)\ n]=0$, то формула (1.17) вновь совпадает с (1.16). Положим, наконец, что при $n \geqslant 1$ $[(\alpha+1)\ n] \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant [(\alpha+1)\ n]$. Тогда, составляя выражение для $D_\infty^{-k} \varphi^{(2n)}(x)$ и интегрируя его k раз по частям, с учетом (1.22) получим

$$D_\infty^{-k} \varphi^{(2n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_x^\infty (t-x)^{k-1} \varphi^{(2n)}(t)\, dt = (-1)^k \varphi^{(2n-k)}(x), \tag{1.25}$$

$$1 \leqslant k \leqslant [(\alpha+1)\ n].$$

Вновь, в силу свойства (1.23), имеем

$$D_\infty^{-(1+\alpha) n} \varphi^{(2n)}(x) = D_\infty^{-[(\alpha+1) n-k]}\ D_\infty^{-k} \varphi^{(2n)}(x),$$

поэтому

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_\infty^{-(1+\alpha) n}\ \varphi^{(2n)}(x) = (-1)^k D_\infty^{[(\alpha+1) n-k]}\ \varphi^{(2n-k)}(x),$$

$$1 \leqslant k \leqslant [(\alpha+1)\ n],$$

и формула (1.17) доказана.

Выберем теперь произвольную функцию $\varphi(x)$ из класса $C_\alpha^{*(\infty)}$.

Для нее имеют место оценки

$$|D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant \frac{B_{n,m}}{1+x^{|\alpha| m}} \quad (n,\ m=0, 1, 2, \cdots), \tag{1.15'}$$

где через $B_{n,m}$ обозначены значения точной верхней грани в формуле (1.15).

Точно таким же способом, как при установлении соотношения (1.20), убедимся в том, что

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{|\alpha| m}) D_\infty^{-(1+\alpha)} D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| < +\infty \quad (n, m \geqslant 0),$$

т. е., что

$$|D_\infty^{-(1+\alpha)} D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant \frac{C_{n,m}}{1+x^{|\alpha| m}} \quad (n,\ m=0, 1, 2, \cdots), \tag{1.26}$$

где $C_{n,m} = \text{const}$.

Докажем теперь, что всюду на полуоси $[0, +\infty)$ справедливо тождество

$$D_\infty^{-1/\rho} D_\infty^{1/\rho} \varphi(x) \equiv -\varphi(x) \quad \left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right). \tag{1.27}$$

С этой целью заметим, что имеет место соотношение

$$D_\infty^{-1/\rho}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int\limits_x^\infty (t-x)^{-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\varphi(t)\,dt=-\frac{d}{dx}D_\infty^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}\varphi(x),$$

причем вынос операции дифференцирования из под знака интеграла, как легко видеть, допустим. Отсюда, используя формулы (1.1) и (1.8), интегрированием по частям получим

$$D_\infty^{-1/\rho}D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)=-\frac{d}{dx}D_\infty^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)=$$

$$=-\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}\int\limits_x^\infty (t-x)^{-\alpha}D^{-(1+\alpha)}\varphi(t)\,dt\right]=$$

$$=-\frac{d^2}{dx^2}D_\infty^{-(1-\alpha)}D_\infty^{-(1+\alpha)}\varphi(x),$$

так как проинтегрированный член в силу (1.26) обращается в нуль. Наконец, отсюда, согласно свойству (1.23) дробных интегралов в смысле Вейля, имеем

$$D_\infty^{-1/\rho}D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)=-\frac{d^2}{dx^2}D^{-2}\varphi(x)\equiv-\varphi(x),$$

т. е. тождество (1.27) или, что то же самое, формула (1.18) при $n=1$ и $k=0$ установлены.

Вновь применим метод полной индукции. Если предположить, что при данном $n\geqslant 2$ справедлива более общая формула

$$\varphi(x)=(-1)^{n-1}D_\infty^{-\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x),\ D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}, \tag{1.28}$$

то из нее и из (1.27) будет следовать

$$\varphi(x)=(-1)^{n}D_\infty^{-\frac{n-1}{\rho}}D_\infty^{-1/\rho}D_\infty^{1/\rho}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x)=$$

$$=(-1)^{n}D_\infty^{-n/\rho}D_\infty^{n/\rho}\varphi(x), \tag{1.29}$$

т. е. соотношение (1.18) окажется справедливым при любом $n\geqslant 0$ и $k=0$. Наконец, путем последовательного дифференцирования формулы (1.29) по x приходим к формуле (1.18) леммы в случае любых $n\geqslant 0$ и $k=0, 1,\cdots,\left[\frac{n}{\rho}\right]$.

Остается установить, что из $\varphi(x)\in C_\alpha'^{(\infty)}$ следует принадлежность этой функции классу $C_\alpha^{(\infty)}$. С этой целью запишем формулу (1.18) в виде

$$\varphi^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}-k\right)}\int\limits_0^\infty t^{n/\rho-k-1}D_\infty^{n/\rho}\varphi(x+t)\,dt \tag{1.18'}$$

и заметим, что в ней число n и, следовательно, числа k

$$\left(0 \leqslant k \leqslant \left|\frac{n}{\rho}\right|\right)$$

могут быть произвольно большими.

При этом, ввиду того, что $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$, из (1.18′) следует

$$|D_\infty^{n/\rho}\varphi(x+t)| \leqslant \frac{B_{n,m}}{1+(xt)^{|\alpha|m}} \quad (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.30}$$

Из соотношений (1.18′) и (1.30) вытекает, что функция $\varphi(x)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$ и, более того, что

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{|\alpha|m})\,\varphi^{(k)}(x)| < +\infty \quad (m;\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Иначе говоря, доказана принадлежность функции $\varphi(x)$ классу C_α^*, то есть включение $C_\alpha^{*(\infty)} \subset C_\alpha^{(\infty)}$.

Лемма полностью доказана.

Лемма 1.4. *Для любой функции* $\varphi(x) \in C_\alpha^* \equiv C_\alpha^{*(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *имеют место соотношения*

$$D_\infty^{n/\rho}\,\varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\,D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\,\varphi(x)\right\} \quad (n=1,\ 2,\cdots), \tag{1.31}$$

причем функции

$$\psi_n(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,D_\infty^{n/\rho}\,\varphi(x) \quad (n=1,\ 2,\cdots) \tag{1.32}$$

удовлетворяют условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{|\alpha|m})\,\psi_n(x)| < +\infty \quad (n;\ m=1,\ 2,\cdots). \tag{1.33}$$

Доказательство. При $n=1$ формула (1.31) совпадает с формулой (1.16) леммы 1.3. Положим $n \geqslant 2$ и запишем формулу (1.16), заменив в ней n на $n-1$:

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\,\varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha)(n-1)}\,\varphi^{(2(n-1))}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n-1))}\int_x^\infty (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)-1}\,\varphi^{(2(n-1))}(t)\,dt. \tag{1.34}$$

Правую часть равенства (1.34) дважды проинтегрируем по частям, заметив при этом, что проинтегрированный член каждый раз обращается в нуль ввиду (1.22):

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\,\varphi(x) = \frac{1}{[(\alpha+1)(n-1)+1](\alpha+1)(n-1)\,\Gamma((1+\alpha)(n-1))} \times$$

$$\times \int\limits_{x}^{\infty} (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)+1} \varphi^{(2n)}(t)\, dt.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n-1))} \int\limits_{x}^{\infty} (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)-1} \varphi^{(2n)}(t)\, dt =$$

$$= D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n)}(x). \tag{1.35}$$

Применим, далее, к обеим частям тождества (1.35) оператор $D_{\infty}^{-(1+\alpha)}$. Тогда, в силу (1.23) и (1.16), будем иметь

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) \right\} \equiv D_{\infty}^{-(1+\alpha)} D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n)}(x) =$$

$$= D_{\infty}^{-(1+\alpha)\, n} \varphi^{(2n)}(x) = D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x),$$

и формула (1.31) доказана.

Запишем теперь тождество (1.35), заменив в нем $n-1$ на n:

$$\psi_n(x) \equiv D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha)\, n} \varphi^{(2n+2)}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)\, n)} \int\limits_{x}^{\infty} t^{(1+\alpha)\, n-1} \varphi^{(2n+2)}(x+t)\, dt.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (1.21′) функций $\varphi^{(2n)}(x+t)$, мы точно таким же способом, как при доказательстве оценки (1.20) леммы 1.3, приходим к утверждению (1.33). Доказательство завершено.

§ 2. Теоремы об α-квазианалитичности новых классов бесконечно-дифференцируемых функций

1°. В работе [1] для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^{\infty}$ и для любого α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ были введены в рассмотрение классы функций $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$. Распространим теперь их определение на случай, когда $-1 < \alpha < 0$ и $\rho = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Множество функций $\varphi(x)$, принадлежащих классу $C_{\alpha}^{*(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$ и дополнительно удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |D^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant AB^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{2.1}$$

назовем классом $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$.

Далее, обозначим через $C_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ подмножество функций $\psi(x)$ класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+|\alpha| x^2)\, \psi^{(n)}(x)| < A_1 B_1^n M_n, \tag{2.2}$$

причем, как в (2.1), так и в (2.2) положительные постоянные A, B, A_1, B_1, вообще говоря, зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Для каждого из классов $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<0)$ сформулируем задачу, аналогичную известной проблеме Ж. Адамара:

указать условие, которому должна удовлетворять последовательность положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для любой пары функций* $u(x)$ *и* $v(x)$, *принадлежащих классу* $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ (*или классу* $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$) $(-1<\alpha<0)$, *из равенств*

$$D_\infty^{n/\rho}\, u(0) = D_\infty^{n/\rho}\, v(0) \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3}$$

следовало бы, что

$$u(x) \equiv v(x) \tag{2.4}$$

всюду на полуоси $[0, +\infty)$.

Эта задача была полностью решена в работе [1] в случае $0\leqslant\alpha<1$ (т. е. при $\rho\geqslant 1$), причем такого рода классы $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ были названы *α-квазианалитическими*. Мы будем придерживаться того же названия и в случае $-1<\alpha<0$ (то есть при $\frac{1}{2}<\rho<1$).

Отметим также, что в частном случае $\alpha=0$ (т. е. при $\rho=1$) классы $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_0\{[0, +\infty); M_n\}$ совпадают с множеством бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0\leqslant x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{2.1'}$$

т. е. с классом квазианалитических в обычном смысле функций, для которого в свое время была поставлена проблема Ж. Адамара.

Поскольку классы $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<0)$ аддитивны, т. е. вместе с любой парой функций $u(x)$ и $v(x)$ в каждый из них входят также и функции $u(x)\pm v(x)$, то поставленная задача может быть сформулирована в следующем виде:

указать условие, которому должна удовлетворять последовательность положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для любой функции* $\varphi(x)$, *принадлежащей классу* $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ (*или классу* $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$) $(-1<\alpha<0)$, *из равенства нулю ее самой и всех ее обобщенных производных* $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ *в точке* $x=0$, *т. е. из равенств*

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))}\int_0^\infty \varphi^{(2n)}(t)\, t^{n(1+\alpha)-1}\, dt = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{2.5}$$

следовало бы, что

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x < +\infty. \tag{2.6}$$

В настоящем параграфе будут установлены следующие две теоремы, являющиеся решением поставленной задачи об α-квазианалитичности классов $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ в случае $-1 < \alpha < 0$.

Теорема 1. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 0)$ *был бы α-квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty, \tag{2.7}$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \tag{2.8}$$

— функция А. Островского, ассоциированная с последовательностью $\{M_n\}_1^\infty$.

Теорема 2. *Для α-квазианалитичности класса* $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 0)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty, \tag{2.9}$$

где функция $T(r)$ *определена по формуле* (2.8).

2°. Прежде, чем приступить к доказательству этих теорем, приведем ряд необходимых для этого фактов, изложенных в работе [1] и докажем несколько лемм.

Начнем со свойств функции $T(r)$. Известно*, что в случае

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty \tag{2.10}$$

функция $T(r)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, более того, ее можно определить по формуле

$$T(r) = \max_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{2.8'}$$

Если же

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{M_n} < C < +\infty, \tag{2.10'}$$

---

* См., напр., [3].

то при $r > C$ $T(r) \equiv +\infty$.

Отметим также, что поскольку в случае (2.10) $T(r) \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$, то можно найти такое $r_0 \geqslant 1$, начиная с которого выполняется неравенство $\log T(r) \geqslant 0$, $r > r_0$.

Далее, следуя [1], введем в рассмотрение функцию

$$p(r) = \begin{cases} \log T(r_0) \text{ при } r \in [0, r_0] \\ \log T(r) \text{ при } r \in [r_0, +\infty), \end{cases} \tag{2.11}$$

которая непрерывна и монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{r \to +\infty} p(r) = +\infty$. Более того, из неравенств $T(r) \geqslant \frac{r^n}{M_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ и $\varliminf\limits_{r \to +\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} \geqslant n$ $(n=1, 2, \cdots)$ можно заключить, что

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{p(r)}{\log r} = +\infty. \tag{2.12}$$

Теперь, вновь следуя работе [1], введем в рассмотрение некоторые геометрические понятия. При любом $\frac{1}{2} < \rho \leqslant 1$ составим угловые области

$$\Delta_\rho = \left\{\zeta;\ |\text{Arg}\,\zeta| < \frac{\pi}{2\rho};\ 0 < |\zeta| < +\infty\right\} \tag{2.13}$$

и

$$\Delta_\rho^* = \left\{\zeta;\ \frac{\pi}{2\rho} < |\text{Arg}\,\zeta| \leqslant \pi;\ 0 < |\zeta| < +\infty\right\}, \tag{2.13'}$$

взаимно дополняющие друг друга до всей плоскости ζ, а также область

$$D_\rho(\nu) = \left\{\zeta;\ \text{Re}\,\zeta^\rho > \nu;\ |\text{Arg}\,\zeta| < \frac{\pi}{2\rho}\right\},\ \nu \geqslant 0, \tag{2.14}$$

и ее дополнение $D_\rho^*(\nu) \equiv C\overline{D_\rho\ (\nu)}$.

Границей областей $D_\rho(\nu)$ и $D_\rho^*(\nu)$ является кривая

$$L_\rho(\nu) \equiv \left\{\zeta;\ \text{Re}\,\zeta^\rho = \nu;\ |\text{Arg}\,\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\right\}, \tag{2.15}$$

уравнение которой в полярных координатах (r, φ) запишется так:

$$r = \left(\frac{\nu}{\cos \rho\varphi}\right)^{1/\rho},\quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ \nu > 0. \tag{2.16}$$

Если обозначить через $L_\rho^+(\nu)$ и $L_\rho^-(\nu)$ ветви кривой $L_\rho(\nu)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях

$$L_\rho^+(\nu) \equiv \left\{\zeta;\ \text{Re}\,\zeta^\rho = \nu;\ 0 \leqslant \arg\zeta < \frac{\pi}{2\rho}\right\}, \tag{2.17}$$

$$L_\rho^-(\nu) \equiv \left\{\zeta;\ \operatorname{Re}\zeta^\rho = \nu;\ -\frac{\pi}{2\rho} < \arg\zeta \leqslant 0\right\}, \qquad (2.17')$$

то, как следует из (2.16), уравнения кривых $L_\rho^\pm(\nu)$ можно записать также в виде

$$\varphi = \varphi_\pm(r) = \pm\frac{1}{\rho}\arc\cos\frac{\nu}{r^\rho}\cdot \qquad (2.18)$$

Обозначим, наконец, через $\Delta_\rho(\tau)$ образ угла Δ_ρ при параллельном переносе его $\zeta = z - \tau$ в точку $z = \tau$ $(-\infty < \tau < +\infty)$:

$$\Delta_\rho(\tau) \equiv \left\{z;\ |\arg(z-\tau)| < \frac{\pi}{2\rho};\ 0 < |z-\tau| < +\infty\right\}, \qquad (2.19)$$

а дополнение замкнутой области $\overline{\Delta_\rho(\tau)}$ до всей плоскости z обозначим через $\Delta_\rho^*(\tau)$:

$$\Delta_\rho^*(\tau) \equiv \left\{z;\ |\arg(z-\tau)| > \frac{\pi}{2\rho};\ 0 < |z-\tau| < +\infty\right\}\cdot \qquad (2.19')$$

3°. В процессе доказательства теоремы 1 нам понадобятся еще две леммы, касающиеся поведения функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)$, введенной по формуле (1.9), в угловых областях вида (2.19) и (2.19′), а также свойств преобразований с ядрами типа $E_\rho(z;\mu)$.

Лемма 2.1. *Для любого* $\rho\left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$ *при* $z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}$ *и* $0 \leqslant t < +\infty$ *справедлива оценка*

$$\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M}{(1+t^{1/\rho})^2}, \qquad (2.20)$$

где $M > 0$ — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Известно (см., [2]), что функция $E_\rho(z;\mu)$ в случае $\frac{1}{2} < \rho < 1$ имеет следующую асимптотику:

для любого μ и произвольного $\theta \in \left(\frac{1}{2}, \rho\right)$

$$E_\rho(z;\mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \sum_{k=1}^{m} \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-m-1}) \qquad (2.21)$$

при $z \in \Delta_\theta$, $|z| \to \infty$;

$$E_\rho(z;\mu) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-m-1}) \qquad (2.22)$$

при $z \in \overline{\Delta_0^*}$, $|z| \to \infty$.

Отсюда вытекают следующие оценки:

$$\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_1\,(1+|z|\,t^{1/\rho})^{\rho-1}\,e^{\,t\,Re\,z^\rho} + \frac{M_2}{(1+|z|\,t^{1/\rho})^2} \tag{2.21'}$$

при $z \in \Delta_\theta,\ t \geqslant 0$;

$$\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{(1+|z|\,t^{1/\rho})^2} \tag{2.22'}$$

при $z \in \overline{\Delta_\theta^*}$, $t \geqslant 0$, где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от z и t.

Для того чтобы оценить функцию $E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)$ в замкнутой области $\overline{\Delta_\rho^*(-1)}$, выберем произвольную точку $z \in \Delta_\rho^*(-1)$ и заметим, что поскольку при $\frac{1}{2} < \theta < \rho$ имеем $\frac{\pi}{2\rho} < \frac{\pi}{2\theta} < \pi$ и $\overline{\Delta_\theta^*} \subset \Delta_\rho^*$, то всегда найдется такое число $\theta \in \left(\frac{1}{2},\ \rho\right)$, для которого точка z, а вместе с ней и весь луч $t^{1/\rho} z$ $(t \geqslant 0)$ будут принадлежать углу Δ_θ^*. Очевидно также, что в случае $z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}$

$$\underline{\min}_{z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}} \{|z|\} = 1. \tag{2.23}$$

Из (2.23) и оценки (2.22′) вытекает оценка (2.20) во всей замкнутой области $\overline{\Delta_\rho^*(-1)}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *ограничена и непрерывна на полуоси* $[0, +\infty)$, *а также принадлежит одновременно классам* $L(0, +\infty)$ *и* $L_2(0, +\infty)$.

Обозначим через $\Phi_\rho(z)$ $\left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$ *ее преобразование с ядром Миттаг-Леффлера*

$$\Phi_\rho(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1}\,\varphi(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Тогда, если

$$\Phi_\rho(z) \equiv 0 \ \text{при}\ z \in \Delta_\rho^*, \tag{2.25}$$

то $\varphi(t) \equiv 0$ *на всей полуоси* $[0, +\infty)$.

Доказательство. Завершенная теория интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера изложена в монографии [2] (см. главу IV). В частности, из теоремы 4.1 главы IV работы [2] следует, что для произвольного $\rho > \frac{1}{2}$ функция $\Phi_\rho(z)$ аналитична в области Δ_ρ^* при $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, причем из оценки (2.20) в случае $\varphi(t) \in$

$\in L\,(0, +\infty)$ легко вытекает (см. лемму 4 работы [1]), что $\Phi_\rho(z)$ кроме того непрерывна в замкнутом угле $\overline{\Delta^*_\rho}$.

Отсюда заключаем, что тождество (2.25) выполняется во всей замкнутой области $\overline{\Delta^*_\rho}$ и, в частности, на его граничных лучах

$$z = e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}\, r^{\frac{1}{\rho}} \quad (0 \leqslant r < +\infty):$$

$$\Phi_\rho\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}\, r^{\frac{1}{\rho}}\right) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}\, r^{\frac{1}{\rho}}\, t^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho - 1}\, \varphi(t)\, dt \equiv 0, \tag{2.26}$$

причем интегралы (2.26) сходятся равномерно относительно параметра r в любом промежутке $[0, R]$ $(0 < R < +\infty)$.

Далее, как уже было показано в процессе доказательства леммы 1.2, при любом $\varkappa > 0$ имеем

$$D_0^{-\varkappa}\left\{r^{1/\rho - 1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)\right\} = r^{1/\rho - \varkappa - 1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho} + \varkappa\right) \ (r > 0),$$

и если обозначить $\mu = \dfrac{1}{\rho} + \varkappa$, то отсюда получим

$$D_0^{-\varkappa}\left\{r^{1/\rho - 1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)\right\} = r^{\mu - 1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \mu\right) \ (r > 0). \tag{2.27}$$

Умножим теперь тождества (2.26) на $r^{1/\rho - 1}$ и применим к ним оператор $D_0^{-\varkappa}$, где $\varkappa = \dfrac{2\rho - 1}{2\rho} > 0$ $\left(\text{тогда } \mu = 1 + \dfrac{1}{2\rho},\ \dfrac{1}{2} < \mu < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\rho}\right)$, причем из характера сходимости интегралов (2.26) следует возможность внесения оператора $D_0^{-\varkappa}$ под знак интеграла. В результате, с учетом (2.27) будем иметь

$$r^{\mu - 1} \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}\, r^{1/\rho}\, t^{1/\rho}; \mu\right) t^{\mu - 1}\, \varphi(t)\, dt \equiv 0, \ r \in (0, +\infty). \tag{2.28}$$

Теперь уже, согласно теореме 1* работы [1], справедливой при любых ρ и μ

$$\left(\frac{1}{2} < \rho < +\infty,\ \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

и при $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, приходим к обращению формулы (2.28), то есть к тождеству $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in [0, +\infty)$.

4°. Приступим, наконец, к доказательству теоремы 1. При этом мы будем в основном придерживаться схемы доказательства теоремы 3 работы [1].

Необходимость. Покажем, что условие

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr < +\infty \quad (-1 < \alpha \leqslant 0) \tag{2.29}$$

влечет за собой существование нетривиальной функции $\varphi(x) \in C_{*}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$, которая удовлетворяет условиям

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.30}$$

где, как обычно, $\rho = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{2} < \rho \leqslant 1\right)$.

Заметим, что если функция $T(r)$ обеспечивает выполнение условия (2.29), то можно считать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty,$$

так как в противном случае имели бы $T(r) \equiv +\infty$ при $r \geqslant r_0$. Поэтому функцию $T(r)$ можно определить по формуле (2.8′).

Введем в рассмотрение функцию

$$p_0(r) = p(r) + 2\log\left(1 + \frac{r}{r_0}\right), \quad r \geqslant 0, \tag{2.31}$$

где $p(r)$ определена по формуле (2.11). Функция $p_0(r)$, как и $p(r)$, неотрицательна, непрерывна и не убывает на полуоси $[0, +\infty)$. Более того, из условия (2.29) следует также, что

$$\int_{1}^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \tag{2.32}$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\rho}{2\rho - 1} \quad (1 < \gamma < +\infty). \tag{2.33}$$

При фиксированном $\rho\left(\dfrac{1}{2} < \rho \leqslant 1\right)$ построим области Δ_ρ, Δ_ρ^{-}, $D_\rho(\nu)$ и $D_\rho^{*}(\nu)$, определенные по (2.13), (2.13′) и (2.14).

В работе Н. У. Аракеляна [4] введено понятие простого угла Жордана: рассматриваются кривые C_+ и C_-, расположенные в плоскости $\zeta = re^{i\varphi}$, не имеющие общих точек кроме $\zeta = 0$ и представляющиеся непрерывными функциями в полярных координатах (r, φ) уравнениями $\varphi = \varphi_+(r)$, $\varphi = \varphi_-(r)$, $0 \leqslant r < +\infty$, причем $-\infty \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_\pm(r) < \varphi_2 \leqslant +\infty$ и $0 < \varphi_+(r) - \varphi_-(r) < 2\pi$ при $0 \leqslant r < +\infty$.

Тогда область G, ограниченная кривой $C = C_+ \cup C_-$ и содержащая область $\varphi_-(r) < \varphi < \varphi_+(r)$, $0 \leqslant r < +\infty$, называется простым углом Жордана, а величины

$$\varphi(r) = \varphi_+(r) - \varphi_-(r)\,(0 < \varphi(r) < 2\pi) \text{ и } \psi(r) = \frac{1}{2}\left[\varphi_+(r) + \varphi_-(r)\right]$$

называются соответственно раствором и биссектрисой угла G.

Из уравнений (2.18) кривых $L_\rho^\pm(\nu)$ непосредственно замечаем, что область $D_\rho(\nu)$ представляет собой ***простой угол Жордана*** (с точностью до параллельного переноса) в плоскости $\zeta = re^{i\varphi}$, раствора

$$\varphi(r) = \frac{2}{\rho} \arc\cos \frac{\nu}{r^\rho}, \tag{2.34}$$

биссектрисой которого служит луч $[\nu^{1/\rho}, +\infty)$ положительной вещественной полуоси.

Если отобразить комплексную плоскость ζ на плоскость z посредством функции $z = -\zeta$, то область $D_\rho^*(\nu)$ перейдет в простой угол Жордана $G_\rho(\nu)$ раствора

$$\theta(r) = 2\pi - \frac{2}{\rho}\arc\cos\frac{\nu}{r^\rho}\cdot \tag{2.34'}$$

Как доказано в работе [4] (лемма 7), если G — угол Жордана раствора $\theta(r)$ плоскости z, причем

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\theta(t)} = +\infty, \tag{2.35}$$

а $p_0(r) > 0$ — любая неубывающая на полуоси $[0, +\infty)$ функция, для которой

$$\int_1^\infty p_0(r)\, e^{-\pi \int_1^r \frac{dt}{t\theta(t)}} \frac{dr}{r\theta(r)} < +\infty, \tag{2.36}$$

то существует целая функция $F(z)$, не имеющая нулей во всей плоскости z и удовлетворяющая неравенству

$$|F(z)| < e^{-p_0(|z|)}, \; z \in \overline{G}\,. \tag{2.37}$$

Покажем, что функции $\theta(r)$ и $p_0(r)$, введенные согласно (2.34') и (2.31), удовлетворяют условиям (2.35) и (2.36).

Поскольку, согласно (2.34') и (2.33), $\lim\limits_{r\to\infty} \theta(r) = \dfrac{\pi}{\gamma}$, то расходимость интеграла (2.35) очевидна.

Проверим теперь, что выполняется неравенство

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{r\theta(r)} - \frac{\gamma}{\pi r}\right] dr < +\infty. \tag{2.38}$$

В самом деле, с учетом (2.33) имеем

$$\left|\frac{1}{r\theta(r)}-\frac{\gamma}{\pi r}\right|=\frac{\left|2\pi-\frac{\pi}{\gamma}-\frac{2}{\rho}\arccos\frac{\nu}{r^{\rho}}\right|}{r}=$$

$$=\frac{2\left|\arcsin\frac{\nu}{r^{\rho}}\right|}{\rho r}\leqslant\frac{C_1}{r^{1+\rho}},\tag{2.39}$$

где $C_1=\mathrm{const}$. Из оценки (2.39) непосредственно следует справедливость условия (2.38).

Убедимся, наконец, что если неубывающая функция $p_0(r)$ удовлетворяет условию (2.32), то из (2.38) следует, что она удовлетворяет также неравенству (2.36).

Действительно, имеем

$$\pi\int_1^r\frac{dt}{t\theta(t)}=\pi\int_1^r\left|\frac{1}{t\theta(t)}-\frac{\gamma}{\pi t}\right|dt+\gamma\log r,$$

поэтому

$$J=\int_1^{\infty}p_0(r)\,e^{-\pi\int_1^r\frac{dt}{t\theta(t)}}\frac{dr}{r\theta(r)}=\int_1^{\infty}p_0(r)\,e^{-\pi\int_1^r\left[\frac{1}{t\theta(t)}-\frac{\gamma}{\pi t}\right]dt}\frac{dr}{r^{1+\gamma}\theta(r)}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\theta(r)>\frac{\pi}{\gamma}>0$ для всех $r\in[0,+\infty)$, а также из (2.38) и (2.32) получим

$$J<C_2\int_1^{\infty}\frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}}dr<+\infty.$$

Итак, из (2.36), согласно лемме 7 работы [4], существует целая функция $F(z)$, удовлетворяющая в замкнутой области $\overline{G_\rho(\nu)}$ неравенству (2.37). Или, если вернуться к переменной ζ, целая функция $F_1(\zeta)=F(-z)$ будет удовлетворять оценке

$$|F_1(\zeta)|<e^{-p_0(|\zeta|)},\quad\zeta\in\overline{D_\rho^*(\nu)}.\tag{2.37$'$}$$

Заметим далее, что из (2.37′) с учетом (2.12) имеем

$$\max_{\varphi}|F_1(re^{i\varphi})|=O(r^{-\omega}),\quad r\to+\infty\tag{2.40}$$

для любого $\omega>1$ при $\zeta=re^{i\varphi}\in\overline{D_\rho^*(\nu)}$ и, в частности, при $\zeta\in\overline{\Delta_\rho^*}$.

Итак, полученная функция $F_1(\zeta)\not\equiv0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 работы [1] в угловой области Δ_ρ^*. Следовательно, по этой теореме она допускает интегральное представление

$$F_1(\zeta) = \int_0^{\infty} E_\rho\left(\zeta t^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\ t^{1/\rho-1}\,\varphi(t)\,dt, \quad \zeta \in \Delta_\rho^*, \tag{2.41}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} F_1(\zeta)\,d\zeta, \ t \in [0, +\infty), \tag{2.42}$$

а L_ρ — граница угловой области Δ_ρ^*, пробегаемая в положительном направлении. Очевидно, что $\varphi(t) \not\equiv 0$. Докажем, что $\varphi(t)$ — искомая функция из класса $C_\alpha^*\{[0, +\infty);\ M_n\}$, удовлетворяющая условиям (2.5).

С этой целью прежде всего покажем, что в интегральном представлении (2.42) контур L_ρ можно заменить на $L_\rho(\nu)$ $(\nu > 0)$.

В самом деле, заметим, что функция $e^{-t\zeta^\rho}$ аналитична в области $\Delta_\rho \supset D_\rho(\nu)$, причем

$$|e^{-t\zeta^\rho}| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \zeta \in \Delta_\rho, \quad t \in [0, +\infty) \\ e^{-\nu t} & \text{при} \quad \zeta \in L_\rho(\nu),\ t \in [0, +\infty). \end{cases} \tag{2.43}$$

Относительно функции $F_1(\zeta)$, аналитической в области $D_\rho^*(\nu) \setminus \overline{\Delta_\rho^*}$, из соотношения (2.40), справедливого в этой области, можно утверждать, что при $|\zeta| \to \infty$, $\zeta \in D_\rho^*(\nu) \setminus \overline{\Delta_\rho^*}$, функция $F_1(\zeta)$ стремится к нулю быстрее, чем $\dfrac{1}{|\zeta|^2}$.

Отсюда, согласно теореме Коши, в формуле (2.42) контур интегрирования L_ρ можно заменить контуром $L_\rho(\nu)$.

Итак, справедлива формула

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho(\nu)} e^{-t\zeta^\rho} F_1(\zeta)\,d\zeta, \ t \in [0, +\infty), \tag{2.42'}$$

причем, как уже отмечалось, оценка (2.40) имеет место и при $\zeta = re^{i\varphi} \in L_\rho(\nu)$. Отсюда следует, что функция $\varphi(t)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, а ее производные допускают следующие представления:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{L_\rho(\nu)} e^{-t\zeta^\rho}\zeta^{\rho n} F_1(\zeta)\ d\zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.44}$$

причем эти интегралы сходятся абсолютно и равномерно на полуоси $[0, +\infty)$.

Оценим $\varphi^{(n)}(t)$ с учетом неравенств (2.43):

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leqslant \frac{e^{-\nu t}}{2\pi}\int_{L_\rho(\nu)} |\zeta|^{n\rho}\,|F_1(\zeta)|\,|d\zeta| \quad (n=0, 1, 2, \cdots), \tag{2.45}$$

отсюда непосредственно имеем

$$\sup_{0<t<+\infty} |(1+t^{|\alpha| m})\, \varphi^{(n)}(t)| < +\infty \quad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots).$$

Согласно (1.14) это означает, что $\varphi(t) \in C_{*}^{(\infty)}(-1<\alpha\leqslant 0)$ или, по лемме 1.3, также, что $\varphi(t) \in C_{\alpha}^{*(\infty)}\ (-1<\alpha\leqslant 0)$.

Покажем теперь, что. более того, функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C_{*}^{*}\{[0, +\infty);\ M_n\}$. Заметим сначала, что из (1.10) следует справедливость тождества

$$D_{\infty}^{1/\rho} e^{-t\zeta^{\rho}} \equiv -\zeta e^{-t\zeta^{\rho}},\ \zeta \in \Delta_{\rho},$$

откуда вытекает, что для любого $\nu \geqslant 1$

$$D_{\infty}^{n/\rho}\ e^{-t\zeta^{\rho}} \equiv (-1)^n \zeta^n e^{-t\zeta^{\rho}},\ \zeta \in L_{\rho}(\nu) \subset \Delta_{\rho}. \tag{2.46}$$

Применим теперь оператор $D_{\infty}^{n/\rho}$ к обеим частям формулы (2.42′), тогда, с учетом (2.46), получим

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int\limits_{L_{\rho}(\nu)} e^{-t\zeta^{\rho}} \zeta^n F_1(\zeta)\, d\zeta \quad (n = 1,\ 2, \cdots), \tag{2.47}$$

причем нетрудно убедиться в законности ввода оператора $D_{\infty}^{n/\rho}$ под знак интеграла.

Из (2.47) следуют оценки

$$|D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(t)| \leqslant \frac{e^{-\nu t}}{2\pi} \int\limits_{L_{\rho}(\nu)} |\zeta|^n\, |F_1(\zeta)|\, |d\zeta| \quad (n = 1,\ 2, \cdots),$$

которые в силу (2.37′) и (2.31) равносильны неравенствам

$$\sup_{0<t<+\infty} |D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(t)| \leqslant C_3(\nu)\, e^{-\nu t} \max_{\zeta\in L_{\rho}(\nu)} \{|\zeta|^n \exp\{-p(|\zeta|)\}\} \tag{2.48}$$

$$(n = 1,\ 2, \cdots),$$

где

$$C_3(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_{\rho}(\nu)} \frac{|d\zeta|}{\left(1+\frac{|\zeta|}{r_0}\right)^2}.$$

есть величина конечная.

Наконец, согласно [1] (см. лемму 10, стр. 217), имеем

$$\max_{\zeta\in L_{\rho}(\nu)} \{|\zeta|^n \exp\{-p(|\zeta|)\}\} \leqslant AB^n M_n \quad (n = 1,\ 2, \cdots). \tag{2.49}$$

Из неравенств (2.48) и (2.49) вытекает, что

$$\sup_{0<t<+\infty} |e^{\nu t} D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(t)| \leqslant AB^n M_n \quad (n = 1,\ 2, \cdots),$$

откуда, в частности, следует, что функция $\varphi(t)$ входит в класс $C_{*}^{*}\{[0, +\infty);\ M_n\}$.

Нам осталось проверить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет также условиям $D_{-}^{n/\rho}\varphi(0)=0$ $(n=0, 1, 2,\cdots)$. Для этого заметим, что из формул (2.42′) и (2.46) получаем

$$D_{-}^{n/\rho}\varphi(0)=\frac{(-1)^{n}}{2\pi i}\int\limits_{L_{\rho}(\nu)}\zeta^{n}F_{1}(\zeta)\,d\zeta\ (n=0, 1, 2,\cdots). \tag{2.50}$$

Теперь уже, как и выше, из аналитичности функции $F_1(\zeta)$ в области $D_{\rho}^{*}(\nu)\setminus\overline{\Delta_{\rho}^{*}}$ и из асимптотической оценки (2.40), согласно теореме Коши, будем иметь, что все интегралы (2.45) равны нулю.

Необходимость доказана.

Достаточность. Теперь предположим, что выполняется условие (2.7) теоремы и докажем, что всякая функция $\varphi(t)\in C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$, удовлетворяющая равенствам (2.5), тождественно равна нулю на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Итак, пусть $\varphi(t)\in C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$, тогда имеем $\varphi(t)\in C_{\alpha}^{*}(-$ и по лемме 1.3 $\varphi(t)\in C_{\alpha}^{*}$. Кроме того, из условий(1.14) при $n=0$ получим также, что $\varphi(t)\in L(0, +\infty)$ и $\varphi(t)\in L_2(0, +\infty)$ одновременно. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 2.2, преобразование с ядром Миттаг-Леффлера такой функции

$$\Phi_{\rho}(z)=\int\limits_{0}^{+\infty}E_{\rho}\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\varphi(t)\,dt \tag{2.24}$$

является функцией, аналитической в области Δ_{ρ}^{*} и непрерывной в замкнутой области $\overline{\Delta_{\rho}^{*}}$ (кроме, быть может, точки $z=\infty$).

Положим, далее, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0)=D_{-}^{n/\rho}\varphi(0)=0\ (n=0, 1, 2,\cdots)$$

и докажем, что функцию $\Phi_{\rho}(z)$ можно представить также в виде

$$\Phi_{\rho}(z)=\frac{(-1)^{n}}{z^{n}}\int\limits_{0}^{\infty}E_{\rho}\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}D_{-}^{n/\rho}\varphi(t)\,dt,\ z\in\Delta_{\rho}^{*} \tag{2.51}$$

при любом $n\geqslant1$ и $\frac{1}{2}<\rho\leqslant1$. В случае $\rho=1$ это доказано в [1].

Пусть $\frac{1}{2}<\rho<1$.

Как следует из леммы 1.2, функция $\mathbf{E}_{\rho}(t; z)$, введенная по формуле (1.11), удовлетворяет дифференциальному уравнению в дробных производных

$$D_{0}^{1/\rho}\mathbf{E}_{\rho}(t, z)\equiv z\mathbf{E}_{\rho}(t, z),$$

которое, в силу (1.4′) и (1.11), можно переписать в следующем виде:

$$E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1} \equiv \frac{1}{z}\frac{d}{dt}\left\{ D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} \mathbf{E}_\rho (t;\ z)\right\}. \qquad (2.52)$$

Подставляя правую часть соотношения (2.52) в формулу (2.24), получим

$$\Phi_\rho (z) = \frac{1}{z}\int_0^{\infty} \varphi (t)\, d\left[D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} \mathbf{E}_\rho (t,\ z)\right], \qquad (2.53)$$

откуда интегрированием по частям имеем

$$\Phi_\rho (z) = -\frac{1}{z}\int_0^{\infty} \varphi' (t)\, D_0^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dt} \mathbf{E}_\rho (t, z)\right\} dt, \qquad (2.54)$$

ввиду того, что проинтегрированный член

$$\varphi (t)\, D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} \mathbf{E}_\rho (t;\ z) = \varphi (t)\, E_\rho (zt^{1/\rho};\ 1)$$

обращается в нуль на концах промежутка $[0, +\infty)$. Это следует из условия $\varphi (0)=0$, а также из того, что

$$E_\rho (zt^{1/\rho};\ 1) = O\left(t^{-1/\rho}\right) \qquad (2.55)$$

при $t \to +\infty$ и $z \in \Delta_\rho^*$.

Приведем теперь обобщенную формулу интегрирования по частям, которая выведена в работе [1]: для каждого $\beta > 0$ и для любых функций $f_1 (t)$ и $f_2 (t)$, измеримых на полуоси $(0, +\infty)$ и таких, что

$$f_1 (t)\, D_\infty^{-\beta}\, f_2(t) \in L\,(0, +\infty),\ f_2 (t)\, D_0^{-\beta} f_1 (t) \in L\,(0, +\infty), \qquad (2.56)$$

имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f_1 (t)\, D_\infty^{-\beta}\, f_2 (t)\, dt = \int_0^{\infty} f_2 (t)\, D_0^{-\beta} f_1 (t)\, dt. \qquad (2.57)$$

В работе [1] также проверено, что функция $\mathbf{E}_\rho (t, z) \in L\,(0, +\infty)$, а функции $f_1 (t) = \dfrac{d}{dt} \mathbf{E}_\rho (t,\ z)$ и $f_2 (t) = \varphi' (t)$ удовлетворяют условиям (2.56). Следовательно, к интегралу формулы (2.54) применима формула (2.57).

В результате получим

$$\Phi_\rho (z) = -\frac{1}{z}\int_0^{\infty} D_\infty^{-(1+\alpha)} \left\{\frac{d}{dt}\, \varphi (t)\right\} d\mathbf{E}_\rho (t;\ z). \qquad (2.58)$$

Заметим теперь, что из определения (1.11) функции $\mathbf{E}_\rho (t;\ z)$ и из условия (2.55) при $\frac{1}{2} < \rho < 1$ имеем

$$\mathrm{E}_\rho(0,\ z)=0,\ \mathrm{E}_\rho(t,\ z)=O(t^{-1}) \tag{2.59}$$

при $t\to+\infty$ и $z\in\Delta_\rho^*$.

Еще раз проинтегрируем по частям интеграл (2.58), тогда с учетом (2.59) получим формулу (2.51) при $n=1$:

$$\Phi_\rho(z)=-\frac{1}{z}\int\limits_0^\infty E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,D_\infty^{1/\rho}\varphi(t)\,dt,\ z\in\Delta_\rho^*.$$

Проведем полную индукцию. Полагая, что формула (2.51) верна при $n-1$, из тождества (2.52) получим

$$\Phi_\rho(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}\int\limits_0^\infty D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\,d\left[D_0^{-(1+\alpha)}\frac{d}{dt}\mathrm{E}_\rho(t;z)\right],\ z\in\Delta_\rho^*.$$

Интегрируя правую часть этой формулы по частям, будем иметь

$$\Phi_\rho(z)=\frac{(-1)^n}{z^n}\int\limits_0^\infty D_0^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dt}\mathrm{E}_\rho(t,\ z)\right\}\frac{d}{dt}\left\{D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\right\}dt, \tag{2.60}$$

так как и здесь проинтегрированный член

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\ D_0^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dt}\mathrm{E}_\rho](t,\ z)\right\}=E_\rho(zt^{1/\rho},\ 1)\ D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)$$

обращается в нуль на концах промежутка $[0,\ +\infty)$, в силу формулы (2.55), а также условия $D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(0)=0$.

Далее, из леммы 1.4 следует, что функции

$f_1(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{E}_\rho(t,\ z)$ и $f_2(t)=\frac{d}{dt}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)$ удовлетворяют условиям формулы (2.57), обеспечивающим ее применение к интегралу (2.60).

Тогда получим

$$\Phi_\rho(z)=\frac{(-1)^n}{z^n}\int\limits_0^\infty\frac{d}{dt}\{\mathrm{E}_\rho(t,\ z)\}\ D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dt}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\right\}dt,$$

наконец, снова интегрируя по частям последний интеграл, придем к соотношению

$$\Phi_\rho(z)=\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}\int\limits_0^\infty\mathrm{E}_\rho(t,\ z)\,\frac{d}{dt}D_\infty^{-(1+\alpha)}\frac{d}{dt}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\,dt,$$

причем проинтегрированный член вновь обращается в нуль, в силу условий (2.59) и неравенств (1.20). В итоге, если учесть (1.4) и (1.5), мы получим формулу (2.51) при любом натуральном $n\geqslant1$.

Докажем теперь, что $\Phi_\rho(z)\equiv 0$ при $z\in\Delta^*_\rho$.

С этой целью рассмотрим угловую область

$$\Delta^*_\rho(-1)=\left\{z;\ \frac{\pi}{2\rho}<|\arg(z+1)|\leqslant\pi;\ 0\leqslant|z+1|<+\infty\right\}$$

раствора $2\pi-\frac{\pi}{\rho}=\frac{\pi}{\gamma}$, получающуюся параллельным переносом области Δ^*_ρ в точку $z=-1$.

Из оценки (2.20) следует, что при любом $\frac{1}{2}<\rho<1$

$$\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right|<\frac{C_4}{(1+t^{1/\rho})^2},\quad z\in\overline{\Delta^*_\rho(-1)},\ 0\leqslant t<+\infty,$$

где постоянная $C_4>0$ не зависит от z и t.

Отсюда, а также из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty\frac{t^{1/\rho-1}}{(1+t^{1/\rho})^2}\,dt\quad\text{при}\quad\frac{1}{2}<\rho<1$$

вытекает, что

$$\int\limits_0^\infty\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right|t^{1/\rho-1}\,dt\leqslant C_5<+\infty,\quad z\in\overline{\Delta^*_\rho(-1)},\tag{2.61}$$

для всех $\rho\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

Поскольку, очевидно, $\Delta^*_\rho(-1)\subset\Delta^*_\rho$, то из представления (2.51) функции $\Phi_\rho(z)$, из оценки (2.61), а также из неравенств (2.1) получим

$$|\Phi_\rho(z)|<\frac{AM_n\,C_5\,|z|^{\rho-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{|z|}{B}\right)^n},\quad z\in\overline{\Delta^*_\rho(-1)},\ n=1,\ 2,\cdots.\tag{2.62}$$

А из (2.62), в силу определения (2.8) функции $T(r)$, имеем

$$|\Phi_\rho(z)|\leqslant\frac{C_6\,|z|^{\rho-\frac{1}{2}}}{T\left(\frac{|z|}{B}\right)},\quad z\in\overline{\Delta^*_\rho(-1)},\tag{2.63}$$

где C_6 не зависит от z.

Теперь рассмотрим два случая.

а) Если $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{M_n}<r_0<+\infty$ $(r_0>1)$, то, как было отмечено выше (см. (2.10′)), $T(r)\equiv+\infty$ при $r\geqslant r_0>1$ и, следовательно, условие (2.7) выполняется. Но тогда из неравенства (2.63) вытекает, что $\Phi_\rho(z)\equiv 0$ в области $Q\subset\Delta^*_\rho$:

$$Q = \Delta_\rho^*(-1) \cap \{|z| > r_0\} \neq \varnothing,$$

и, значит, во всей области Δ_ρ^*.

б) В случае же, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty$, рассмотрим вспомогательную функцию $F(z) = \Phi_\rho(-1-z)$, аналитическую в замкнутой угловой области $\overline{\Delta}_\gamma$ раствора $\dfrac{\pi}{\gamma}$, где, как всегда, $\gamma = \dfrac{1}{1+\alpha}$, в силу (2.63), удовлетворяющую неравенству

$$|F(z)| \leqslant \frac{C_7\,|z+1|^{\rho-\frac{1}{2}}}{T\left(\dfrac{|z+1|}{B}\right)}, \quad z \in \overline{\Delta}_\gamma. \tag{2.63'}$$

Функция $T(r)$ монотонно стремится к $+\infty$ быстрее любой степени r, следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{z\in\overline{\Delta}_\gamma} \{|F(z)|\} \leqslant C_8 \tag{2.64}$$

и, кроме того, найдется такое $r_0 \geqslant 2$, что при $r \geqslant r_0$ функция

$$q(r) \equiv C_8 \frac{(r+1)^{\rho-\frac{1}{2}}}{T\left(\dfrac{r+1}{B}\right)} \tag{2.65}$$

удовлетворяет неравенству $q(r) \leqslant 1$ $(r > r_0)$.

Если теперь определить неотрицательную функцию

$$p(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \in [0, r_0] \\ -\log q(r) & \text{при } r \in [r_0, +\infty), \end{cases} \tag{2.66}$$

то из (2.63′) придем к неравенству

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant C_8\, e^{-p(r)} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma};\ 0 \leqslant r < +\infty\right). \tag{2.67}$$

С другой стороны, из (2.65) и (2.66) имеем

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr = -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log\left[C_8(1+r)^{\rho-1/2}\right]}{r^{1+\gamma}}\,dr +$$

$$+ \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log T\left(\dfrac{r+1}{B}\right)}{r^{1+\gamma}}\,dr,$$

причем первый интеграл в правой части сходится, а второй, очевидно, расходится, ввиду расходимости интеграла (2.7).

Итак, функция $F(z)$ в области $\overline{\Delta}_\gamma^\delta$ удовлетворяет неравенству (2.67) и в то же время

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty.$$

Отсюда, вследствие теоремы A (1°) работы [1] вытекает тождество $F(z) \equiv 0$ при $z \in \overline{\Delta_\gamma}$ или, что одно и то же, тождество $\Phi_\rho(z) \equiv 0$ при $z \in \overline{\Delta^*_\rho(-1)}$.

Учитывая аналитичность функции $\Phi_\rho(z)$ в области $\Delta^*_\rho \supset \overline{\Delta^*_\rho(-1)}$, можем заключить, что тождество $\Phi_\rho(z) \equiv 0$ выполняется во всей области Δ^*_ρ.

Из этого тождества, в силу того, что $\varphi(t) \in L(0, +\infty)$ и $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, согласно лемме 2.2, имеем

$$\varphi(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < +\infty.$$

Теорема полностью доказана.

Что касается доказательства теоремы 2, то оно проводится строго по схеме доказательства теоремы 4 работы [1], и поэтому мы на нем останавливаться не будем. Отметим, однако, что в случае $-1 < \alpha < 0$ при доказательстве теоремы 2 приходится существенно использовать леммы 1.3, 1.4, 2.1 и 2.2.

5°. В заключение проведем сравнение между теоремой 2 настоящей работы и одним из результатов относительно обобщенной проблемы квазианалитичности С. Мандельбройта [3].

С этой целью введем обозначение $\varkappa = [n(1+\alpha)] - 1$ и заметим, что интегралы (2.5) после $(\varkappa+1)$-кратного интегрирования по частям можно представить в виде

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int\limits_0^{\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{n(1+\alpha)-1}\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{\Gamma(n(1+\alpha)-[n(1+\alpha)]+1)} \int\limits_0^{\infty} \varphi^{(2n-[n(1+\alpha)])}\, t^{n(1+\alpha)-[n(1+\alpha)]}\, dt. \qquad (2.68)$$

Если теперь рассмотреть возрастающую последовательность $\nu_n = 2n - [n(1+\alpha)]$ плотности $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n} = \frac{1}{1-\alpha} = \rho > \frac{1}{2}$, то условия (2.5) с учетом (2.68) запишутся в виде

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(0) = \frac{(-1)^{\nu_n}}{\Gamma(\theta_n+1)} \int\limits_0^{\infty} \varphi^{(\nu_n)}(t)\, t^{\theta_n}\, dt = 0, \qquad (2.5')$$

где $\theta_n = n(1+\alpha) - [n(1+\alpha)]$, $0 \leqslant \theta_n < 1$.

Составим, далее, для заданной последовательности $\{M_n\}$ функцию $B(\sigma) = \log T(e^\sigma)$, где $T(r)$ введено по (2.8), и заметим, что

$$B(\sigma) = \sup_{n \geq 1} (n\sigma - \log M_n).$$

Согласно основной теореме относительно обобщенной квазианалитичности, класс $C(M_n)$ функций, бесконечно дифференцируемых на полуоси и удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n M_n, \ k = \text{const},$$

будет $\{\nu_n\}$-квазианалитическим на полуоси, если выполняется одно из „предположений" $U\left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{\nu_n\}\right]$ или

$$U_j\left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{\nu_n\}\right] \ (j = 1, 2, 3)^*.$$

Заметим, в частности, что предположение $U_1\left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{\nu_n\}\right]$ формулируется так:

Существует некоторая постоянная k, $\frac{1}{2} < k < D$, такая, что

$$\int_1^{\infty} B(\sigma)\, e^{-\frac{\sigma}{2\left(k - \frac{1}{2}\right)}} d\sigma = +\infty. \tag{2.69}$$

В наших терминах условие (2.69) запишется в виде

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1 + \frac{1}{2k - 1}}} dr = +\infty, \tag{2.70}$$

где k — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{2} < k < \rho. \tag{2.71}$$

Вследствие (2.71), интеграл (2.70) и интеграл (2.9) теоремы 2 связаны неравенством

$$\int_1^R \frac{\log T(r)}{r^{1 + \frac{1}{2k - 1}}} dr < \int_1^R \frac{\log T(r)}{r^{1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr$$

при любом $R > 1$.

Итак, в случае выполнения предположения $U_1\left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{\nu_n\}\right]$ (которое, заметим, лишь достаточно для $\{\nu_n\}$-квазианалитичности класса $C(M_n)$) интеграл (2.9) также расходится, что является необходимым и достаточным условием для α-квазианалитичности класса $C_\alpha([0, +\infty)$;

---

[*] См. [2], стр. 118—121.

$M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$. Если же интеграл (2.9) расходится, то это еще не влечет за собой расходимости интеграла (2.70).

Приведенные рассуждения показывают, что как уже отмечалось во введении, результат теоремы 2, будучи сформулирован в терминах α-квазианалитичности, качественно близок к результатам С. Мандельбройта, несмотря на существенное различие между постановками задач α-квазианалитичности и обобщенной квазианалитичности.

Автор выражает искреннюю благодарность академику АН Армянской ССР профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи, а также за внимание и ценные советы при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.VII.1974

Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԼՅԱՆ. Քվազիանալիտիկության խնդիր Դանժուա-Կառլեմանի դասերում *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մտցված α-քվազիանալիտիկության գաղափարը տարածվում է ֆունկցիաների ավելի լայն դասի վրա։

Այդ նպատակով մտցվում են n(n=0,1,2...) կարգի հաջորդական դիֆերենցման օպերատորներ Վեյլի իմաստով $\frac{1}{2} < \rho < 1$ *դեպքում.*

Սահմանվում են $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ *և* $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ *ֆունկցիաների դասեր* $-1 < \alpha < 0$ $\left(\frac{1}{\rho} = 1-\alpha\right)$ *դեպքում և ապացուցվում է, որ նրանց α-քվազիանալիտիկության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի բավարարվեն համապատասխանաբար*

$$\int_1^\infty \frac{\log (r)}{r^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dr = +\infty \quad և \quad \int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty$$

պայմանները, որտեղ $T(r) = \sup\limits_{n\geq 1} \frac{r^n}{M_n}$.

A. A. KITBALIAN. *The α-quasianalilicity problem in the Denjot-Carleman classes* (summary)

The concept of "α-quasianalyticity "as introduced by M. M. Djrbashian is extended to a broader class of functions.

For this purpose the operators of consecutive differentiation (in the sence of Weil of order $\frac{n}{\rho}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ $1/2 < \rho < 1$ are introduced.

The classes $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ and $C_\alpha\{[0, \infty); M_n\}$ for $-1 < \alpha < 0$, $(1/\rho = 1-\alpha)$ happen to be quasianalytical if

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dr = +\infty \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty,$$

are correspondingly, with $T(r) = \sup\limits_{n>1} \frac{r^n}{M_n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 3, 1968, 171—248.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
3. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., ИИЛ, 1955.
4. *Н. У. Аракелян.* Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях, Матем. сб., 53 (95): 4, 1961, 515—538.