ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մաթեմատիկա X, № 3, 1975 Математика

А. А. ТАЛАЛЯН

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОГРАНИЧЕННЫМ ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

I. Банахом [1] была доказана

Теорема. Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x)\in L_2[0,1]$, можно определить полную в $L_2[0,1]$ ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

Эта теорема Банаха, для ясности приведенная нами в более частной чем в работе [1] формулировке, показывает, что никакие свойства функции $f(x)$ не могут гарантировать сходимость почти всюду ее рядов Фурье по всем полным ортонормированным системам одновременно.

В связи с этим представляет интерес исследование вопроса о возможности такого же явления для более узких классов полных ортонормированных систем, например, для класса систем $\{\varphi_n(x)\}$, состоящих из ограниченных в совокупности функций.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x)$, можно определить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных в совокупности функций, такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.*

II. Доказательство теоремы 1.

Прежде всего покажем, что теорема 1 получается как следствие приведенной ниже менее общей теоремы:

Теорема 2. *Если $f(x)\in L_2[0,1]$, $f(x)\geqslant M>0$ почти всюду на некотором отрезке $[1-\alpha, 1]$, $0<\alpha<1$, то можно определить полную в $L_2[0,1]$ о. н. систему $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных в совокупности ступенчатых функций, такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.*

В самом деле, если $f(x)\in L_2[0,1]$ и не эквивалентна нулю, то без ограничения общности можно считать, что $f(x)\geqslant M>0$ на некотором множестве E, $\mu(E)=\alpha>0$. Возьмем сохраняющее меру взаимно-однозначное (на множествах полной меры) отображение $p: [0,1]\to[0,1]$, переводящее множество E на отрезок $[1-\alpha, 1]$ (с точностью до множества меры нуль). Тогда функция $f(p^{-1}(x))$, будет удовлетворять условиям теоремы 2 и для нее существует полная система $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая требованиям теоремы 2. Остается заметить, что система $\{\varphi_n(p(x))\}$ будет полной ортонормированной системой равномерно ограниченных функций и ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе будет расходиться почти всюду.

Чтобы доказать теорему 2 сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $f(x)\in L_2[0,1]$, $f(x)\geqslant M>0$ почти всюду на интервале $\delta_1=[1-\alpha, 1]$, $0<\alpha<1$ и заданы две последовательности действительных чисел $\{a_k\}$, $\{a'_k\}$, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<+\infty,\ \sum a'^2_k<+\infty,\ a_k\neq 0,\ k=1,2,\cdots. \tag{1}$$

Тогда для произвольного интервала δ', $\delta'\subset\delta_1$ и любой последовательности положительных чисел ε_k, $k=1, 2,\cdots$, существуют последовательность интервалов Δ_k, $k=1, 2,\cdots$, и последовательность определенных на этих интервалах функций $\psi'_k(x)$, $k=1, 2,\cdots$, обладающие свойствами

A) Δ_k, $k=1, 2,\cdots$, *попарно не перекрываются и*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k=\delta',$$

B) *Каждая функция $\psi'_k(x)$ кусочно-постоянна на соответствующем интервале Δ_k и*

$$\left|\int\limits_{\Delta_k} f(x)\,\psi'_k(x)\,dx-(a_k-a'_k)\right|<\varepsilon_k,\quad \int\limits_{\Delta_k}\psi'^2(x)\,dx=M',$$

где M' — не зависящая от k постоянная.

Доказательство. Пусть k_s — последовательность тех значений k, для которых $a_{k_s}=a'_{k_s}$ (в частности $\{k_s\}$ может быть пустым множеством).

Положим

$$\mu_k=\begin{cases}0, & k=k_s\\ 1, & k\neq k_s.\end{cases}$$

Из (1) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\mu_k a'_k)^2=\alpha', \tag{2}$$

где α' — положительное число.

Интервалы Δ_k, $k=1, 2,\cdots$, удовлетворяющие условию A), возьмем так, чтобы

$$\mu(\Delta_k) = \frac{(a_k - \mu_k a_k')}{\alpha'} \cdot \mu(\delta'). \qquad (3)$$

Для определения функций $\psi_k'(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, рассмотрим два случая

1°. Пусть интервал Δ_k, таков, что $k = k_s$, $s = 1, 2, \cdots$. Разделим Δ_k на два равных интервала Δ_k', Δ_k'', $\Delta_k = \Delta_k' \cup \Delta_k''$ и положим

$$\psi_k'(x) = \frac{a_k - a_k'}{\int\limits_{\Delta_k'} f(x)\,dx}, \quad x \in \Delta_k'. \qquad (4)$$

Из (4) и из того, что $\Delta_k \subset \delta' \subset \delta_1$, $f(x) \geqslant M$ почти всюду на δ_1, получаем

$$\int\limits_{\Delta_k'} f(x)\,\psi_k'(x)\,dx = a_k - a_k', \qquad (5)$$

$$\int\limits_{\Delta_k'} \psi_k'^2(x)\,dx = \frac{(a_k - a_k')^2\,\mu(\Delta_k')}{\left(\int\limits_{\Delta_k'} f(x)\,dx\right)^2} < \frac{(a_k - a_k')^2}{M^2 \cdot \mu(\Delta_k')}.$$

Так как $\mu(\Delta_k') = \frac{1}{2}\,\mu(\Delta_k)$, то в силу (3) и равенства $\mu_k = 1$ при $k \neq k_s$ имеем

$$\frac{a_k - a_k'}{M^2\,\mu(\Delta_k')} = \frac{2\alpha'}{M^2\,\mu(\delta')}.$$

Зафиксируем число

$$M' > \frac{2\alpha'}{M^2 \cdot \mu(\delta')},$$

и полагая

$$\gamma_k = M' - \int\limits_{\Delta_k'} \psi'^2(x)\,dx, \qquad (6)$$

определим на интервале Δ_k'' функцию $\psi_k'(x)$ так, чтобы

$$\left|\int\limits_{\Delta_k''} f(x)\,\psi_k'(x)\,dx\right| < \varepsilon_k, \qquad \int\limits_{\Delta_k''} \psi'^2(x)\,dx = \gamma_k. \qquad (7)$$

Последнему условию, очевидно, можно удовлетворить, взяв вместо $\psi_k'(x)$ рассмотренную на Δ_k'' достаточно далекую функцию Радемахера, умноженную на подходящую постоянную.

Из соотношений (5), (6) и (7) вытекает, что в рассмотренном случае 1°, определенные вышеуказанным образом функции $\psi_k^{'}(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, удовлетворяют условию B.

Рассмотрим теперь случай

2°. Интервал $\Delta_k^{'}$ таков, что $k = k_s$ для некоторого значения s. В этом случае полагаем

$$\psi_k^{'}(x) = \sqrt{\frac{M'}{\mu(\Delta_k)}}\, r_{n_k}(\Delta_k, x), \quad x \in \Delta_k, \tag{10}$$

где $r_{n_k}(\Delta_k, x)$ — функция Радемахера, суженная на интервале Δ_k с номером n_k настолько большим, что

$$\int\limits_{\Delta_k} f(x)\, r_{n_k}(\Delta_k, x)\, dx < \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\frac{M'}{\mu(\Delta_k)}}}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает выполнение условия B), так как в рассматриваемом случае $a_k^{'} - a_k = 0$.

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$, $f(x) > M > 0$ почти всюду на интервале $[1-\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, и $\varepsilon > 0$, $c > 0$ — произвольные постоянные.*

Тогда для любой конечной системы кусочно-постоянных функций $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x)$, равных нулю на некотором интервале $[1-\eta, 1]$, можно определить конечную ортонормированную систему $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ кусочно-постоянных функций, удовлетворяющую условиям

1) *каждая функция $\varphi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ортогональна всем функциям $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant N$.*

2) *Все функции $\varphi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, обращаются в нуль на некотором интервале $[1-\beta, 1]$, $0 < \beta < \eta$.*

3) *Если $c_k = \int\limits_0^1 f(x)\, \varphi_k(x)\, dx$, то существует множество $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 1 - \varepsilon$ такое, что*

$$\max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left| \sum_{k=i}^{j} c_k \varphi_k(x) \right| > c, \quad x \in E. \tag{12}$$

Доказательство. Положим

$$\gamma = \frac{1}{2} \min(\varepsilon, \eta) \tag{13}$$

и отрезок $[0, 1-\gamma]$ представим в виде суммы попарно непересекающихся интервалов A_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x)$ постоянны. Возьмем произвольную о.н. систему $\{\psi_n(t)\}$ кусочно-постоянных функций такую, что

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt = 0, \ n=1, 2, \cdots \tag{14}$$

и некоторый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \tag{15}$$

неограниченно расходится почти всюду на [0,1].

Очевидно, можно считать $a_k \neq 0$, $k=1, 2, \cdots$, а в качестве системы $\{\psi_n(t)\}$ можно взять систему расходимости, построенную Д. Е. Меньшовым (см. [3], стр. 193) или же системы, полученные из систем Хаара или Уолша после некоторых перестановок (исключая из этих систем функцию, равную единице).

Обозначим через $\psi_n(A_i, x)$ функцию, полученную из $\psi_n(t)$ при линейном отображении отрезка [0,1] на интервал A_k и положим

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(A_i, x), & x \in A_i, \ 1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 & , \ x \in [1-\gamma, 1]. \end{cases} \tag{16}$$

Так как

$$\int_{A_i} \psi_n(A_i, x)\, \psi_m(A_i x)\,dx = \begin{cases} \mu(A_i), & n = m \\ 0 & , \ n \neq m \end{cases} \tag{17}$$

и

$$\int_{A_i} \psi_n(A_i, x)\,dx = 0, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{18}$$

то функции $\Phi_n(x)$ на отрезке $[0,1-\gamma]$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^{1-\gamma} f_i(x)\, \Phi_n(x)\,dx = 0, \ 1 \leqslant i < N, \ n=1, 2, \cdots \tag{19}$$

$$\int_0^{1-\gamma} \Phi_n(x)\, \Phi_m(x)\,dx = \begin{cases} \mu([0,1-\gamma]) = 1-\gamma, & n = m \\ 0 & , \ n \neq m. \end{cases} \tag{20}$$

Полагая

$$a_k' = \int_0^1 f(x)\, \Phi_k(x)\,dx = \int_0^{1-\gamma} f(x)\, \Phi_k(x)\,dx \tag{21}$$

и учитывая (20), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k'^2 < +\infty. \tag{22}$$

Возьмем $0 < \beta < \gamma$ и применим лемму 1, полагая в ее формулировке $\delta' = (1-\gamma, 1-\beta)$ и $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \cdots$, такими, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{23}$$

Тогда определяются интервалы Δ_k, $k=1, 2,\cdots$ и функции $\psi_k'(x)$ такие, что

$$\Delta_i \cap \Delta_j = 0, \ i \neq j, \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = (1-\gamma, 1-\beta), \tag{24}$$

$$\left| \int_{\Delta_k} f(x) \psi_k'(x)\, dx - (a_k - a_k') \right| < \varepsilon_k, \ k=1, 2,\cdots, \tag{25}$$

$$\psi_k'(x) = 0, \ x \overline{\in} \Delta_k, \ k=1, 2,\cdots, \tag{26}$$

$$\int_{\Delta_k} \psi'^2(x)\, dx = M', \ k = 1, 2,\cdots, \tag{27}$$

где M' — постоянная, не зависящая от k.

Положим

$$\varphi_k(x) = \frac{\Phi_k(x) + \psi_k'(x)}{\sqrt{1-\gamma+M'}}, \ k = 1, 2,\cdots. \tag{28}$$

Легко видеть, что $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0,1]$ система ступенчатых функций, каждая из которых ортогональна всем функциям $f_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Далее имеем

$$c_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma+M'}} \left(a_k' + \int_{\Delta_k} f(x) \psi_k'(x)\, dx \right)$$

и согласно (25), получаем

$$c_k = \frac{a_k + \xi_k}{\sqrt{1-\gamma+M'}}, \ k = 1, 2,\cdots, \tag{29}$$

где $|\xi_k| \leqslant \varepsilon_k$, $k = 1, 2,\cdots$.

Из (28), (29) и (23) непосредственно следует неограниченная расходимость почти всюду на $[0,1-\gamma]$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{30}$$

ибо, как вытекает из (16) и из расходимости ряда $\sum a_n \psi_n(A_i, x)$ на интервале A_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, ряд

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{1-\gamma+M'}} \cdot \Phi_n(x)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0,1-\gamma]$.

Ясно, что при достаточно большом n частичная сумма $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ ряда (30) будет удовлетворять условию 3) леммы 2, так как множество E, в каждой точке которого выполнено (12) при достаточно большом n может иметь меру, большую чем $1-\gamma-\frac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon$ (см. (13)).

Выполнены также условия 1) и 2) леммы 2, ибо функции $\varphi_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant n$, ортогональны функциям $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_p(x)$ и обращаются в нуль на интервале $[1-\beta, 1]$ (см. 16), (24), (26) и (28)).

Лемма 3. *Если $f_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant p$, —конечная ортонормированная система ступенчатых функций, обращающихся в нуль на некотором интервале $[1-\beta, 1]$, $0<\beta<1$ и $F(x)$ — произвольная функция класса $L_2[0,1]$, то для любого $\varepsilon>0$ можно определить конечную ортонормированную систему $\psi_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant n$, ступенчатых функций, обладающих свойствами:*

1) *Каждая из функций $\psi_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant n$, ортогональна функциям $f_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant p$ и все функции $\psi_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant n$ равны нулю на некотором интервале $[1-\gamma, 1]$, $0<\gamma<1$,*

2) *Существует*

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x)+\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k(x)$$

такая, что $\|\Phi(x)-F(x)\|_{L_2}<\varepsilon$.

Доказательство. Дополним систему $\{f_i(x)\}_{i=1}^{p}$ до полной ортонормированной системы $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ и возьмем

$$G(x)=\sum_{k=1}^{p+m} a_k f_k(x), \tag{31}$$

где

$$\|G(x)-F(x)\|_{L_2}<\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{32}$$

Для произвольного $\eta>0$ существуют кусочно-постоянные функции $g_1(x), g_2(x),\cdots, g_m(x)$ такие, что

$$\|g_i(x)-f_{p+i}(x)\|_{L_2}<\eta,\ 1\leqslant i\leqslant m, \tag{33}$$

$$g_i(x)=0,\ x\in[1-\gamma, 1],\ i=1, 2,\cdots, m \tag{34}$$

для некоторого $\gamma>0$, где $\gamma<\beta$.

Числа

$$c_k^{(i)}=\int_0^1 g_i(x) f_k(x)\,dx,\ 1\leqslant k\leqslant p,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

малы, а именно, в силу ортогональности системы $\{f_i(x)\}$ и условия (33) имеем

$$|c_k^{(i)}| \leqslant \eta, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{35}$$

Поэтому функции

$$g_i'(x) = g_i(x) - \sum_{k=1}^{p} c_k^{(i)} f_k(x), \ 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{36}$$

ортогональные функциям $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant p$, мало отличаются от соответствующих $f_{p+i}(x)$, а именно

$$\|g_i'(x) - f_{p+i}(x)\|_{L_2} \leqslant (p+1)\ \eta, \tag{37}$$

и тогда имеем также

$$\left| \|g_i'(x)\|_{L_2} - 1 \right| \leqslant (p+1)\ \eta, 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{38}$$

$$\left| \int_0^1 g_i'(x)\, g_j'(x)\, dx \right| < [2 + (p+1)\ \eta]\ (p+1) \cdot \eta, \ i \neq j. \tag{39}$$

Пусть функции $g_{k_i}'(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $n \leqslant m$, линейно независимы и остальные функции $g_i'(x)$ являются их линейными комбинациями. Учитывая (38) и (39), легко видеть, что ортогонализацией методом Шмидта функций $g_{k_i}'(x)$ получим функции

$$\psi_j(x) = c_1^{(j)}\, g_{k_1}'(x) + \cdots + c_j^{(j)}\, g_{k_j}'(x), \ c_j > 0, \tag{40}$$

которые ортогональны, нормированы и вместе с тем удовлетворяют неравенствам

$$\|\psi_j(x) - g_{k_j}'(x)\|_{L_2} < \varepsilon(\eta, m), \tag{41}$$

где $\varepsilon(\eta, m)$ зависит только от η и m и для фиксированного m стремится к нулю при $\eta \to 0$.

Из (31), (32), (33) и (41) следует, что при достаточно малом η функции $\psi_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, будут удовлетворять условию 2) леммы 3. Условию 1) леммы 3 эти функции удовлетворяют согласно (34), (36) и (40). Тем самым лемма 3 доказана.

Использованием лемм 2 и 3 легко доказывается

Лемма 4. *Для любой функции $f(x) \in L_2[0,1]$, где $f(x) > M > 0$ почти всюду на некотором отрезке $[1-\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, можно определить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$, обладающую следующими свойствами:*

1) *функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$ кусочно-постоянны на $[0,1]$ и, следовательно, каждая из них—ограниченная функция.*

2) *Система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит две непересекающиеся подсистемы*

$$\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}, \ \{\varphi_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}, \text{ где } \{\varphi_{n_k}(x)\}$$

состоит из ограниченных в совокупности функций и является системой сходимости, а система $\{\varphi_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такова, что ряд

Фурье функции $f(x)$ по этой системе почти всюду на $[0,1]$ *неограниченно расходится.*

Доказательство. Возьмем всюду плотную в L_2 $[0,1]$ последовательность $\{F_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и определим первую функцию $\varphi_1(x)$ как функцию $r_1(x)$ системы Радемахера, суженную на некотором интервале $[0,1-\gamma_1]$, $0<\gamma_1<1$, точнее полагаем

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-\gamma_1}}\cdot r_1([0,1-\gamma_1],\ x), & x\in[0,1-\gamma_1]\\ 0 & , x\overline{\in}[0,1-\gamma_1].\end{cases} \tag{42}$$

Предположим, что определена конечная ортонормированная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_l}$ кусочно-постоянных функций, обращающихся в нуль на интервале $[1-\gamma_l,\ 1]$, $0<\gamma_l<1$.

Разделим отрезок $[0,1-\gamma_l]$ на конечное число интервалов $\Delta_k^{(l)}$, $1\leqslant k\leqslant k_l$ таких, что на каждом из них постоянны все функции $\varphi_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant N_l$ и определим функцию $\varphi_{N_l+1}(x)$ как сужение функции $r_{l+1}(x)$ системы Радемахера на каждом $\Delta_k^{(l)}$, точнее полагаем

$$\varphi_{N_l+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-\gamma_l}}\, r_l(\Delta_k^{(l)},\ x), & x\in\Delta_k^{(l)},\ 1\leqslant k\leqslant k_l\\ 0 & , x\in[1-\gamma_l,\ 1].\end{cases} \tag{43}$$

После этого применим лемму 2, взяв в ее формулировке вместо функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_l+1}$, и полагая $\varepsilon=\varepsilon_l$, $c=c_l$, где в дальнейшем $\varepsilon_l\to 0$, $c_l\to+\infty$ при $i\to\infty$.

Тогда определяются кусочно-постоянные функции $\varphi_{N_l+2}(x)$, $\varphi_{N_l+3}(x),\cdots,\varphi_{m_l}(x)$, обладающие следующими свойствами.

1°. Функции системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{m_l}$ попарно ортогональны, нормированы и обращаются в нуль на некотором интервале $[1-\beta_l,\ 1]$, $0<\beta_l<\gamma_l<1$.

2°. Существует множество $E_l\subset[0,1]$ такое, что

$$\mu(E_l)>1-\varepsilon_l, \tag{44}$$

$$\max_{N_l+1\leqslant p<q\leqslant m_l}\left|\sum_{k=p}^{q}c_k\varphi_k(x)\right|>c_l,\ x\in E_l, \tag{45}$$

где

$$c_k=\int_0^1 f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,\ N_l+2\leqslant k\leqslant m_l. \tag{46}$$

Теперь применим лемму 3, взяв в ее формулировке вместо функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^{p}$ функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{m_l}$. Согласно этой лемме существуют функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=m_l+1}^{N_{l+1}}$, обладающие свойствами:

3°. Система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_l+1}$ ортогональна, нормирована и состоит из кусочно-постоянных функций, обращающихся в нуль на некотором интервале $[1-\gamma_{l+1}, 1]$, $0<\gamma_{l+1}<\gamma_l<1$.

4°. Существует линейная комбинация

$$\Phi_l(x) = \sum_{k=1}^{N_l+1} c_k^{(l)} \varphi_k(x) \tag{47}$$

такая, что

$$\|\Phi_l(x) - F_l(x)\|_{L_2} < \varepsilon_l. \tag{48}$$

Так как свойство 3° обеспечивает применимость лемм 2 и 3 и для $i+1$, то доказано существование ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, натуральных чисел $N_l < m_l < N_{l+1}$ и множеств E_l, удовлетворяющих условиям 2°, 3° и 4° для всех $i=1, 2, 3, \cdots$.

На основании сказанного легко видеть, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем требованиям леммы 4. В самом деле, полнота системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует из (47) и (48), где $i=1, 2, \cdots$, если учесть, что $\varepsilon_l \to 0$ и $\{F_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ — всюду плотное множество в $L_2[0,1]$. Далее, из (43) следует, что функции $\varphi_{N_l+1}(x)$, $i=1, 2, \cdots$, ограничены в совокупности, ибо по построению $\gamma_l \to 1$, и образуют ортонормированную систему сходимости, т. е. из сходимости ряда $\sum a_l^2$ вытекает сходимость почти всюду на $[0,1]$ ряда $\sum a_l \varphi_{N_l+1}(x)$, так как этим свойством обладает система Радемахера.

Наконец из (44) и (45), где $\varepsilon_l \to 0$, $c_l \to +\infty$, вытекает, что ряд Фурье функции $f(x)$ (фигурирующей в формулировке леммы 4) по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=N_l+2}^{m_l}$, $i=1, 2, \cdots$, неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 2.

В доказательстве используются матрицы

$$A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant 2^k,\ k=1, 2, \cdots; \tag{49}$$

введенные А. М. Олевским [2] следующим образом:

$$a_{1j}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}},\ 1 \leqslant j \leqslant 2^k, \tag{50}$$

и если $1 < i \leqslant 2^k$, $i = 2^s + \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant 2^s$, $0 \leqslant s \leqslant k+1$, то

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}},\ (\nu-1)\,2^{k-s}+1 \leqslant j \leqslant (2\nu-1)\,2^{k-s-1} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}},\ (2\nu-1)\,2^{k-s-1}+1 \leqslant j \leqslant \nu\cdot 2^{k-s} \\ 0, \quad \text{для остальных } j. \end{cases} \tag{51}$$

В дальнейшем наряду с (50) нам нужны еще следующие два свойства матрицы (49) (см. [2], стр. 5).

I°. Матрица A_k ортогональна при каждом k, II°. Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| < c, \ 1 \leqslant j < 2^k, \ k = 1, 2, \cdots, \tag{52}$$

где c — постоянная, не зависящая от k.

Пусть полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ определена согласно лемме 4, т. е. удовлетворяет условиям 1) и 2) этой леммы. Обозначим для краткости

$$\psi_i(x) = \varphi_{n_{2i}}(x), \ i=1, 2, \cdots; \ \Phi_i(x) = \varphi_{m_i}(x), \ i=1, 2, \cdots, \tag{53}$$

где по определению (см. условие 2) леммы 4) $\{\varphi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченная в совокупности система сходимости, а $\{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система, ряд Фурье по которой функции $f(x)$ неограниченно расходится почти всюду. Далее, обозначив через

$$\{\varphi_{\nu_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \setminus (\{\varphi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty})$$

остальные функции системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, положим

$$\psi_i'(x) = \varphi_{n_{2i+1}}(x), \ i=1, 2, \cdots; \ \Phi_i'(x) = \varphi_{\nu_i}(x), \ i=1, 2, \cdots. \tag{54}$$

Подпоследовательность $\{A_{k_q}\}_{q=1}^{\infty}$ матриц (49) выберем так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2^{k_q}}} \cdot \max |\Phi_q(x)| \leqslant 1, \ \frac{1}{\sqrt{2^{k_q}}} \cdot \max |\Phi_q'(x)| \leqslant 1, \ q = 1, 2, \tag{55}$$

и функции, определенные соотношениями (53) и (54) распределим по группам $\{\varphi_{k_q, i}^{(1)}(x)\}_{i=1}^{2^{k_q}}$ (соответственно $\{\varphi_{k_q, i}^{(2)}(x)\}_{i=1}^{2^{k_q}}$, $q = 1, 2, \cdots$) следующим образом.

Обозначим

$$p_0 = 0, \ p_\nu = \sum_{q=1}^{\nu} 2^{k_q} - \nu, \ \nu = 1, 2, \cdots,$$

и положим

$$\varphi_{k_\nu, 1}^{(1)}(x) = \Phi_\nu(x), \ \varphi_{k_\nu, i+1}^{(1)}(x) = \psi_{p_{\nu-1}+i}(x) \tag{56}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu} - 1, \ \nu = 1, 2, \cdots),$$

$$\varphi_{k_\nu, 1}^{(2)}(x) = \Phi_\nu'(x), \ \varphi_{k_\nu, i+1}^{(2)}(x) = \psi_{p_{\nu-1}+i}'(x), \tag{57}$$

$$1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu} - 1, \ \nu = 1, 2, \cdots.$$

Линейным преобразованием при помощи матрицы A_{k_ν}, $\nu = 1, 2, \cdots$, примененной к каждой группе (56) и (57), определим функции

$$\Phi_{k_\nu, i}^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}} a_{ji}^{(k_\nu)} \varphi_{k_\nu, j}^{(1)}(x), \ 1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \ \nu = 1, 2, \cdots, \tag{58}$$

$$\Phi^{(2)}_{k_\nu, i}(x) = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}} a_{ij}^{(k_\nu)} \varphi^{(2)}_{k_\nu, j}(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{59}$$

Из (53), (54), (56), (57) и из ортогональности матриц A_k $k = 1, 2, \cdots$, следует, что функции $\Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)$, $\Phi^{(2)}_{k_\nu, i}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$, образуют полную ортонормированную систему кусочно постоянных функций. Кроме того из (55) и из свойства II° матрицы A_k следует, что функции этой системы ограничены в совокупности.

Действительно, так как по определению

$$|\varphi_{n_k}(x)| \leqslant Q, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

где Q — постоянная, то имеем также (см. (53), (54), (56) и (57))

$$|\varphi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)| \leqslant Q, \quad |\varphi^{(2)}_{k_\nu, i}(x)| \leqslant Q, \quad 2 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{60}$$

и тогда из (50), (52), (55), (56), (57) получим

$$|\Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)| \leqslant 1 + c \cdot Q, \quad |\Phi^{(2)}_{k_\nu, i}(x)| \leqslant 1 + c \cdot Q, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots.$$

Легко видеть, что ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)$, $1 \leqslant i < 2^{k_\nu}$, $\nu = 1, 2$, неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$. В самом деле, обозначив

$$c_{k_\nu, i} = \int_0^1 f(x)\, \Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)\, dx, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots \tag{61}$$

и учитывая ортогональность матрицы A_{k_ν}, получим

$$\sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} c_{k_\nu, i}\, \Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x) = \sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} b_{k_\nu, i}\, \varphi^{(1)}_{k_\nu, i}(x), \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{62}$$

где

$$b_{k_\nu, i} = \int_0^1 f(x)\, \varphi^{(1)}_{k_\nu, i}(x)\, dx, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{63}$$

С другой стороны, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} b_{k_\nu, i}\, \varphi^{(1)}_{k_\nu, i}(x) \tag{64}$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$, ибо согласно (56) его ν-тая частная сумма имеет вид

$$\sum_{q=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{2^{k_q}} b_{k_q, i}\, \varphi^{(1)}_{k_q, i}(x) = \sum_{q=1}^{\nu} b_q \Phi_q(x) + \sum_{l=1}^{p_\nu} d_l\, \psi_l(x), \tag{65}$$

где

$$b_q = \int_0^1 f(x)\, \Phi_q(x)\, dx, \; d_i = \int_0^1 f(x)\, \psi_i(x)\, dx$$

и последовательность первых сумм правой части равенства (65) почти всюду неограниченно расходится согласно определению функций $\Phi_q(x)$ (см. 53)), а последовательность вторых сумм правой части (65) сходится к конечному пределу почти всюду на $[0,1]$, согласно определению функций $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots$ (см. (53)), образующих подсистему системы сходимости $\{\varphi_{n_i}(x)\}$. Из (62) и из расходимости ряда (64) следует расходимость почти всюду ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} c_{k_\nu, i}\, \Phi^{(1)}_{k_\nu, i}(x).$$

Таким образом, определены две ортонормированные системы

$$\{\Phi^{(1)}_{k_\nu, i}\}_{i=1}^{2^{k_\nu}},\; \nu=1, 2, \cdots, \quad \{\Phi^{(2)}_{k_\nu, i}(x)\}_{i=1}^{2^{k_\nu}},\; \nu=1, 2, \cdots,$$

ограниченных в совокупности кусочно-постоянных функций, такие что их объединение дает полную систему и, кроме того, ряд Фурье функции $f(x)$ по первой системе расходится почти всюду.

Путем применения обычного приема, функции указанной полной системы можно расположить в таком порядке, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ по вновь полученной системе расходился почти всюду. Для этого нужно функции первой системы расположить идущими подряд большими отрезками, а функции второй системы поместить между этими отрезками. Теорема 2 (а следовательно и теорема 1) доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1974

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Ըստ սահմանափակ լրիվ օրթոգոնալ սիստեմների Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցված է, որ կամայական զրոյից տարբեր $f(x) \in L_2[0,1]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\{\varphi_n(x)\}$ հավասարաչափ սահմանափակ լրիվ օրթոգոնալ և նորմավորված սիստեմ, այնպիսին, որ $f(x)$-ի Ֆուրյեի շարքը ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմի տարամետ է համարյա ամենուրեք։

A. A. TALALIAN. *On the convergence of Fourier series by bounded complete orthogonal systems* (summary)

It is proved, that for every nonzero $f(x) \in L_2[0,1]$ a bounded complete orthonormal system $\{\varphi_n(x)\}$ exists, such that the Fourier series of $f(x)$ by $\{\varphi_n\}$ diverges almost everywhere.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. С. Банах*. Sur la divergence des series orthogonales, Studia Math., 9. 1940, 139—155.
2. *А. М. Олевский*. Об одной ортогональной системе и ее применениях, Матем. сб., 71 (113): 3, 1966, 297—336.
3. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, М., 1958.