ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

А. Г. БАЛАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

В настоящей заметке рассматривается задача описания тех относительно замкнутых подмножеств данной области, которые являются множествами единственности для аналитических функций, то есть обладают следующим свойством: из условия, что некоторая голоморфная в области функция стремится к нулю вдоль такого подмножества при подходе к границе области, следует, что эта функция тождественно обращается в нуль. В классической теореме Лузина-Привалова и некоторых ее современных обобщениях и усилениях единственность обеспечивается за счет „массивности" указанных подмножеств в терминах лебеговской меры или других мер и емкостей.

В связи с задачами равномерных и касательных приближений аналитическими функциями Н. У. Аракелян [1] обратил внимание на то обстоятельство, что свойство единственности связано с невозможностью аппроксимации аналитическими функциями и что множества единственности могут быть охарактеризованы не только „массивностью", но и своей „конструкцией", описываемой в топологических или иных терминах. В настоящей работе приводится одно достаточное условие единственности такого характера для подмножеств произвольной области на комплексной плоскости. В том случае, когда граница области состоит из одной точки, это достаточное условие является также и необходимым.

1°. **Обозначения.** Пусть D — область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, ∂D — граница области D, $\partial D \neq \varnothing$. Обозначим через $A(D)$ — класс функций, аналитических в D. Пусть $\rho(z_1, z_2)$ — сферическое расстояние между точками $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{C}}$ и $A, B \subset \overline{\mathbf{C}}$ — произвольные множества. Сферическое расстояние между множествами A и B определяется формулой

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{z \in A \\ \zeta \in B}} \rho(z, \zeta).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $V_\varepsilon(\partial D)$ ε-окрестность границы области D:

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in \overline{\mathbf{C}}:\ \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Определение 1. Пусть $G \subset D$ — открытое множество. Скажем, что граница ∂D является достижимой для G, если существует непрерывное отображение γ полуинтервала $[0,1)$ в G такое, что

$$\lim_{t\to 1} \rho(\gamma(t), \partial D) = 0.$$

Определение 2. Подмножество F области D называется D-ограниченным, если $\rho(F, \partial D)>0$ и D-неограниченным, если $\rho(F, \partial D)=0$.

Определение 3. Назовем относительно замкнутое множество $E\subset D$ множеством A-единственности для области D, если из двух условий

$$f\in A(D), \quad \lim_{\substack{z\to\partial D\\ z\in E}} f(z) = 0 \tag{1}$$

вытекает $f(z)\equiv 0$ в D.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbf{C}}$, $\partial D\neq\varnothing$, E — замкнутое в D множество. Если ∂D недостижима для $D\setminus E$, то множество E является множеством A-единственности для области D.*

2°. Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbf{C}}$, $\partial D\neq\varnothing$, и пусть $G\subset D$ — такая область, что ∂D недостижима для G. Тогда существует такой компакт $\Omega\subset D$, что все компоненты связности открытого множества $G\setminus\Omega$ являются D-ограниченными.*

Доказательство. Представляет интерес случай, когда G является D-неограниченной. Допустим вопреки утверждению леммы, что требуемого компакта Ω не существует. Тогда, если $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность компактов, $D_n\subset D_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$, то для любого $n=1, 2, \cdots$, среди компонент открытого множества $G\setminus D_n$ будет хоть одна D-неограниченная.

Построим теперь последовательность открытых множеств $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом.

На первом шаге, полагая $Q_0 = G$, обозначим через Q_1 объединение всех D-неограниченных компонент множества $G\setminus \overline{D}_1$. Имеем $Q_1\subset G$. Предположим, что Q_1 состоит из N_1 компонент, $1\leqslant N_1\leqslant\infty$. Возьмем в каждой из этих компонент по точке $z_{1,k}$, $k=1, 2, \cdots, N_1$. Эти точки назовем точками первого ранга.

На втором шаге обозначим через Q_2 объединение всех D-неограниченных компонент открытого множества $Q_1\setminus D_2$, $Q_2\subset Q_1\subset G$. Предположим, что Q_2 состоит из N_2, $1\leqslant N_2\leqslant\infty$ областей. Возьмем в каждой из этих областей по точке $z_{2,k}$, $k=1, 2, \cdots, N_2$. Эти точки назовем точками второго ранга. Для любой точки $z_{2,k}$ имеем

$$z_{2,k}\in Q_2\subset Q_1,$$

следовательно существует непрерывная кривая $\gamma_{2,k}\subset Q_1$, соединяющая точку $z_{2,k}$ с некоторой точкой $z_{1,j}\in Q_1$ (а именно, с той точкой первого ранга, которая вместе с $z_{2,k}$ лежит в одной компоненте связно-

...и множества Q_1). Предположим теперь, что множества $\{Q_n\}_{n=1}^{p}$, ...$_n \subset Q_{n-1}$ уже построены, выбраны точки $z_{n,k} \in Q_n$, $k = 1, 2, \cdots, N_k$ ранга $n = 1, 2, \cdots, p$ и кривые $\gamma_{n,k} \subset Q_{n-1}$, причем $\gamma_{n,k}$ соединяет точку ...$_{,k}$ ранга n с некоторой точкой $z_{n-1,j}$ ранга $n-1$. Определим множество Q_{p+1} как объединение всех D-неограниченных компонент связности открытого множества $Q_p \setminus D_{p+1}$ и возьмем по точке $z_{p+1,k}$, ...$=1, 2, \cdots, N_{p+1}$ в каждой из этих компонент. Выберем дугу Жордана ...$_{p+1,k} \subset Q_p$, соединяющую точку $z_{p+1,k}$ с некоторой точкой z_{p,j_p} ранга p.

Если бы процесс построения множеств Q_n и кривых $\gamma_{n,k}$ оборвался на некотором конечном шаге, то утверждение леммы было бы выполнено, что противоречило бы нашему предположению. Поэтому можно считать, что процесс построения бесконечно продолжается. Тогда существует последовательность индексов $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой построены соответствующие кривые γ_{n,m_n} для всех $n = 1, 2, \cdots$, причем γ_{n,m_n} и $\gamma_{n+1,m_{n+1}}$ имеют общий конец z_{n,m_n}.

Рассмотрим непрерывную кривую

$$\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_{n,m_n},$$

лежащую в G. В силу построения кривых γ_{n,m_n} имеем

$$\bigcup_{n=p}^{\infty} \gamma_{n,m_n} \subset D \setminus D_{p-1}.$$

С другой стороны, в силу ограничений на последовательность $\{D_n\}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число p такое, что

$$D \setminus D_{p-1} \subset V_\varepsilon(\partial D).$$

Из этих двух условий следует, что кривая γ удовлетворяет условиям определения 1, то есть ∂D достижима для G. Полученное противоречие и доказывает справедливость леммы 1.

3°. Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Пусть f—некоторая аналитическая в D функция, для которой имеет место (1) и $\varepsilon > 0$—произвольное число. Выполнение для функции f соотношения (1) означает, что для $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in V_\delta(\partial D) \cap E. \tag{2}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in K, \tag{3}$$

где $K \subset D$—произвольный компакт. Можно не ограничивая общности считать, что K—замкнутая область, ограниченная такой конечной системой α замкнутых Жордановых спрямляемых кривых, что

$$\alpha \subset V_\delta(\partial D).$$

В силу равномерной непрерывности функции f на K для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z_1, z_2 \in K, \ \rho(z_1, z_2) < \eta. \tag{4}$$

Пусть теперь $\{G_n\}_{n=1}^N$, $(N \leqslant \infty)$ — семейство всех тех компонент связности открытого множества $D \setminus (E \cup K)$, для которых $\partial G_n \cap \alpha \neq \varnothing$. Множество $\alpha_n = (\partial G_n \cap \alpha) \setminus E$ может состоять:

а) из конечного или счетного числа открытых спрямляемых дуг Жордана с концами, лежащими на E,

б) конечного числа замкнутых спрямляемых кривых Жордана. При этом

$$\alpha_n \cap \alpha_m = \varnothing \quad \text{при} \quad n \neq m, \quad \bigcup_{n=1}^{N} \alpha_n = \alpha \setminus E.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} \text{дл. } \alpha_n \leqslant \text{дл. } \alpha < \infty,$$

так что существует лишь конечное множество индексов n, для которых либо α_n содержит замкнутые кривые Жордана, либо дл. $\alpha_n \geqslant \eta$.

Пусть для простоты это индексы $r = 1, 2, \cdots, N_1$; $N_1 < \infty$. Заметим теперь, что

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad z \in \alpha \setminus \bigcup_{n=1}^{N_1} \alpha_n. \tag{5}$$

В самом деле, при $z \in \alpha \cap E$ это следует из неравенства (2). В противном случае существует такой индекс $n > N_1$, что $z \in \alpha_n$, множество α_n содержит дугу Жордана с концами на E, сферического диаметра меньше η, содержащую точку z. Тогда неравенство (5) следует из (2) и (4).

Предположим теперь, что области G_n при $n = 1, 2, \cdots, N_2$ $(N_2 \leqslant N_1)$ D-неограничены, а при $n = N_2 + 1, \cdots, N_1$ — D-ограничены.

Рассмотрим множество

$$K_1 = \overline{K} \cup \bigcup_{n=N_2+1}^{N_1} \overline{G}_n.$$

Имеем согласно (2), (5)

$$|f(z)| < \varepsilon \text{ при } z \in \partial K_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{N_2} c_n, \tag{6}$$

так как

$$\partial \left(\bigcup_{n=N_2+1}^{N_1} \overline{G}_n \right) \setminus \alpha \subset E \cap V_\delta(\partial D).$$

Множество K_1 расширим за счет части границы $\bigcup_{n=1}^{N_1} \alpha_n$ следующим образом.

В силу условий теоремы, граница ∂D недостижима для G_n при $n = 1, 2, \cdots, N_2$. Тогда в силу леммы 1 существуют компакты $\Omega_n \subset D$ такие, что все компоненты $G_n \setminus \Omega_n$ являются D-ограниченными. Так как при расширении компакта Ω_n это свойство не нарушается и $N_2 < \infty$, то существует область $\Omega \subset D$, $K_1 \subset \Omega$, ограниченная конечной системой γ спрямляемых кривых Жордана такая, что все компоненты связности множества $\bigcup_{n=1}^{N_2} G_n \setminus \Omega$ D-ограничены. Обозначим эти компоненты через $\{G_n^{''}\}$, $n = 1, 2, \cdots, N_3$, $N_3 < \infty$. Существует число $\eta > 0$ такое, что при $z_1, z_2 \in \gamma$, $\rho(z_1, z_2) < \eta$ имеет место (4). Так как контур γ имеет конечную длину, то лишь конечное число связных дуг совокупности $\partial\Omega \cap \bigcup_{n=1}^{N_3} G_n$ имеет сферический диаметр больше η. Пусть для простоты, это дуги γ_n, $n = 1, 2, \cdots, N_4$; $N_4' < \infty$, а соответствующие им компоненты связности множества $\bigcup_{n=1}^{N_3} G_n \setminus \Omega$ обозначим через G_n', $n = 1, 2, \cdots, N_4'$, $N_4' \leqslant N_4$, $N_4' \leqslant N_3$. На всех остальных дугах, т. е. для $\partial\Omega \cap \bigcup_{n=N_4'+1}^{N_3} \overline{G_n}$ аналогично (5) получаем

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad z \in \partial\Omega \cap \bigcup_{n=N_4'+1}^{N_3} \overline{G_n}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь множество

$$K_2 = K_1 \cup \left(\Omega \cap \bigcup_{n=1}^{N_3} \overline{G_n}\right)$$

(будем считать, что область $D \setminus \Omega$ не имеет D-неограниченной компоненты). Из (2), (6), (7) имеем

$$|f(z)| < \varepsilon \text{ при } z \in \partial K_2 \setminus \bigcup_{n=1}^{N_4'} \overline{G_n'}. \tag{8}$$

Расширим множество K_2 за счет части границы $\bigcup_{n=1}^{N_4'} \gamma_n$ прибавлением к нему D-ограниченных компонент $\overline{G_n'}$, $n = 1, 2, \cdots, N_4'$. Полученное таким образом множество K_3 D-ограничено и на ∂K_3, согласно (2) и (8), имеем $|f(z)| < \varepsilon$. Следовательно по принципу максимума

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad z \in K_3,$$

что завершает доказательство, поскольку $K \subset K_3$.

4°. Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть E—замкнутое в $\mathbf{C}$ множество. Если бесконечность достижима для $\mathbf{C} \setminus E$, то существует целая функция $G(z) \not\equiv 0$ такая, что*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in E}} G(z) = 0.$$

Доказательство. Из условия леммы 2 вытекает существование бесконечной жордановой кривой $\gamma \subset CE$. Опишем вокруг γ бесконечную жорданову кривую γ_1, начинающуюся и оканчивающуюся на бесконечности и пусть $\gamma_1 \cap E = \varnothing$. Через E_1 обозначим ту из двух областей, получающихся при разбиении плоскости с помощью кривой γ_1, которая содержит множество E.

В работе М. В. Келдыша [2] доказано, что в этом случае существует целая функция $G(z)$ такая, что

$$|G(z)| < \exp\{-|z|^{1/2-\eta}\}, \quad G(z) \not\equiv 0,$$

где $\eta > 0$ — любое число. Следовательно лемма 2 доказана, поскольку $E \subset E_1$.

Следствием теоремы 1 и леммы 2 является

Теорема 2. *Пусть E—замкнутое в $\mathbf{C}$ множество. E является множеством A-единственности для $\mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда $\partial\mathbf{C} = \{\infty\}$ не достижима для CE.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 20.V.1974

Հ. Գ. ԲԱԼԱՔՅԱՆ. Կամայական տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է տրված տիրույթի նկատմամբ փակ այնպիսի ենթաբազմությունների նկարագրման հարցը, որոնք անալիտիկ ֆունկցիաների համար հանդիսանում են միակության բազմություններ։

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ. Դիցուք D*-ն տիրույթ է* C*-ում,* $\partial D \neq \varnothing$, E*-ն փակ է* D*-ի նկատմամբ։ Եթե* ∂D*-ն հասանելի չէ* D/E*-ի համար, ապա* E *բազմությունը* D *տիրույթի համար հանդիսանում է* A *միակության բազմություն։*

Այն դեպքում, երբ D*-ի եզրը միայն մեկ կետից է բաղկացած, նշված պայմանը հանդիսանում է նաև անհրաժեշտ։*

H. G. BALAKIAN. *On the uniqueness of analytical functions in arbitrary domains* (summary)

The problem of description of closed subsets of given domain, wich are sets of uniqueness for analytical functions is considered.

Theorem. Let D is a domain in $\overline{C}$, $\partial D \neq \varnothing$, E is closed with respect to D. If ∂D is not attainable for $D \setminus E$, then E is an A-uniqueness set for D.

When the boundary of D contains only one point, the noted condition is also ressary.

ЛИТЕРАТУРА

Н. У. Аракелян. Approximation complexe et propriétés des functions analytiques, Actes, Congres intern. Math., 1970, v. 2, 595—600.

М. В. Келдыш. О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР, 47, № 4, 1945, 243—245.