

В. С. АБРАМОВИЧ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ МОНТЕЛЯ
НА АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕСКОНЕЧНОГО
ПОРЯДКА В КРУГЕ

В связи с исследованием вопросов сходимости последовательностей голоморфных функций П. Монтель [1] показал, что если максимальный модуль $M(r)$ аналитической в единичном круге функции $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\ln M(r) = O((1-r)^{-\lambda}), \quad \lambda \geq 0 \quad (r \uparrow 1) \quad (1)$$

и $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $f(z)$ с учетом их кратностей, то справедливо неравенство

$$\lambda + 1 \geq \tau, \quad (2)$$

где τ — показатель сходимости нулей

$$\tau = \inf \left\{ \rho: \sum_n (1 - |z_n|)^\rho < +\infty \right\}. \quad (3)$$

Это неравенство означает, что порядок роста функции, определяемый как

$$\rho = \inf \{ \lambda: \ln M(r) < (1-r)^{-\lambda}, \quad r_0 < r < 1 \}, \quad (4)$$

не может быть меньше показателя сходимости ее нулей, уменьшенного на единицу.

Доказательство П. Монтеля было достаточно громоздким. Простое доказательство как неравенства (2), так и более общих соотношений, основанное на формуле Йексеза, было дано в монографии Р. Неванлинны [2].

Как хорошо известно, максимум модуля $M(r)$ аналитической в круге функции может иметь как угодно большой рост.

В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли так определить порядок роста (ρ) функции $f(z)$ и показатель сходимости ее нулей (τ), чтобы выполнялись 3 условия:

1) ρ и τ зависят от некоторого функционального параметра, изменение которого позволяет охватить функции с произвольно большой скоростью роста;

2) при некотором специальном значении этого параметра ρ и τ совпадают с соответствующими классическими характеристиками;

3) при всех значениях функционального параметра для ρ и τ имеет место неравенство Монтеля

$$\rho \geq \tau - 1. \quad (5)$$

Положительный ответ на этот вопрос, который получен в доказанной ниже теореме означает, что границы, в которых имеет место неравенство Монтеля для аналитических в круге функций, могут быть естественным образом раздвинуты как угодно далеко.

Заметим, что решение опирается на одну важную формулу М. М. Джрбашяна [3], имеющую принципиально более общую природу, чем классическая формула Йенсена.

Пусть $\omega(x) \in C[0, 1]$ — невозрастающая положительная функция, $\omega(1) \geq 0^*$.

Обозначая

$$z_\omega(r) = \left\{ \int_r^1 \omega(x) dx \right\}^{-1}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (6)$$

введем порядок роста (ρ_ω) и показатель сходимости нулей (τ_ω) , зависящие от функционального параметра $\omega(x)$, следующим образом:

$$\rho_\omega = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln z_\omega(r)} = \inf \{ \lambda: \ln M(r) < z_\omega^\lambda(r), \quad r_1 < r < 1 \}, \quad (7)$$

$$\tau_\omega = \inf \left\{ \mu: \sum_{n=1}^{\infty} z_\omega^{-\mu} (|z_n|)^{1/2} < +\infty \right\}, \quad (8)$$

где $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $f(z)$ с учетом их кратностей.

В специальном случае $\omega(x) \equiv 1$ введенные характеристики ρ_ω и τ_ω , очевидно, совпадают с классическими. Кроме того, из определения порядка ρ_ω непосредственно следует, что для любой аналитической в единичном круге функции $f(z)$ существует функция $\omega(x)$, удовлетворяющая указанным выше условиям, для которой

$$\rho_\omega(f) < +\infty.$$

Теорема. Для любого значения положительного и невозрастающего функционального параметра $\omega(x) \in C[0, 1]$, $\omega(1) \geq 0$, порядок ρ_ω (7) и показатель сходимости нулей τ_ω (8) аналитической в единичном круге функции $f(z)$ связаны неравенством Монтеля

$$\rho_\omega \geq \tau_\omega - 1. \quad (9)$$

Доказательство. Для функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$ с нормировкой $f(0) = 1$ (не нарушающей общности при рассмотрении ее роста), имеет место следующая формула М. М. Джрбашяна:

$$D_\omega(r) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{(\omega)} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta =$$

* Функцию $\omega(x)$ можно предполагать монотонной лишь вблизи точки $x = 1$.

$$= \sum_{0 < |z_k| < r} \int_{|z_k|/r}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t} \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt, \quad 0 < r < 1, \quad (10)$$

где

$$L^{(\omega)} \ln |f(re^{i\theta})| = \omega(1) \ln |f(re^{i\theta})| - \int_0^1 \ln |f(rxe^{i\theta})| \omega'(x) dx \quad (11)$$

всюду в круге $|z| < 1$, за исключением не более, чем счетного множества разрезов

$$\bigcup_{0 < |z_k| < 1} \{z: \arg z = \arg z_k, |z_k| \leq r < 1\},$$

$\nu(r)$ — число нулей функции $f(z)$ в круге $|z| \leq r$ с учетом их кратностей.

Из (11) непосредственно следует неравенство

$$|L^{(\omega)} \ln |f(re^{i\theta})|| \leq (\omega(1) - \int_0^1 \omega'(x) dx) \ln M(r),$$

согласно которому для $D_\omega(r)$ имеем оценку

$$D_\omega(r) < C_\omega \ln M(r) \quad (0 < r < 1). \quad (12)$$

Покажем, что для функции $f(z)$ соотношение

$$\frac{D_\omega(r)}{\ln M(r)} = O(x_\omega^{-\alpha}(r)), \quad \alpha \geq 0 \quad (r \uparrow 1) \quad (13)$$

влечет за собой неравенство

$$\rho_\omega \geq \tau_\omega - 1 + \alpha. \quad (9')$$

Отсюда будет вытекать неравенство (9) теоремы, так как вследствие (12) соотношение (13) всегда имеет место для некоторого $\alpha \geq 0$.

С помощью (10) оценим снизу $D_\omega(r')$ при условии $r < r' < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} D_\omega(r') &= \int_0^{r'} \frac{\nu(t)}{t} \omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt \geq \int_0^r \nu(t) \omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt \geq \\ &\geq \nu(r) \int_r^{r'} \omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt = r' \nu(r) x_\omega^{-1}\left(\frac{r}{r'}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Полагая здесь $r' = r^{1/2}$ и учитывая (13), получим

$$\nu(r) x_\omega^{-1}(r^{1/2}) = O(x_\omega^{-\alpha}(r^{1/2})) \ln M(r^{1/2}). \quad (15)$$

Пусть $\rho' > \rho_\omega$, тогда по определению ρ_ω (7)

$$\ln M(r^{1/2}) < x_\omega^{\rho'}(r), \quad r_0 < r < 1$$

и, следовательно

$$x_{\omega}^{r'-1} (r^{1/2}) = O\left(\frac{1}{v(r)}\right) \quad (r \uparrow 1). \quad (16)$$

Полагая здесь $r = |z_n|$, $n = 1, 2, \dots$ и учитывая очевидное неравенство $v(|z_n|) \geq n$, получаем

$$\{x_{\omega}(|z_n|^{1/2})\}^{-(r'+1-\alpha)} \leq O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (17)$$

Отсюда из определения τ_{ω} (8) вытекает

$$\tau_{\omega} \leq \inf_{r' > 1; \rho > \rho_{\omega}} \gamma \cdot (\rho' + 1 - \alpha) = \rho_{\omega} + 1 - \alpha,$$

что завершает доказательство.

В качестве примера рассмотрим класс функций, максимальный модуль которых допускает оценку

$$\ln \ln M(r) < O\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad (r \uparrow 1). \quad (18)$$

Положим

$$x_{\omega}^*(r) = \exp(1-r)^{-1} \quad (0 \leq r < 1).$$

Согласно (6) это соответствует выбору

$$\omega^*(r) = (1-r)^{-2} e^{-(1-r)^{-1}}.$$

Тогда

$$\rho_{\omega}^* = \inf \left\{ \lambda: \ln \ln M(r) < \frac{\lambda}{1-r}, \quad r_k < r < 1 \right\}.$$

Заметим, что если $x_{\omega}(r)$ удовлетворяет соотношению

$$x_{\omega}(r^{1/2}) \sim C x_{\omega}^{\alpha}(r) \quad (1 \leq \alpha < +\infty), \quad (19)$$

то определение τ_{ω} (8) равносильно следующему:

$$\tau_{\omega} = \frac{1}{\alpha} \inf \left\{ \mu: \sum_{n=1}^{\infty} (x_{\omega}^{-\mu}(|z_n|)) < +\infty \right\}. \quad (20)$$

Легко проверить, что в рассматриваемом случае для $x_{\omega}^*(r)$ выполняется условие (19) при $\alpha = 2$. Поэтому, полагая в соответствии с (20)

$$\tau_{\omega}^* = \frac{1}{2} \inf \left\{ \mu: \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu}{1-|z_n|}\right) < +\infty \right\}, \quad (21)$$

согласно установленной теореме имеем неравенство Монтеля

$$\rho_{\omega}^* \geq \tau_{\omega}^* - 1.$$

Автор в заключение выражает искреннюю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за ценные замечания.

Гаганрогский радиотехнический институт

Поступила 4.III.1974

Վ. Ս. ԱՐԲԱՄՈՎԻՉ. Շրջանում անալիտիկ անվերջ կարգի ֆունկցիաների վրա Մոնտելի մի
րեորեն մտադրված մասին (ամփոփում)

Հոդվածում $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի ρ_ω աճման կարգը և τ_ω զրոների զուգամիտության
ցուցիչը սահմանվում են այնպես, որ բավարարում են հետևյալ պայմանները.

1. ρ_ω -ն և τ_ω -ն կախված են դրական և շնվազող $\omega(x) \in C[0, 1]$, $\omega(1) > 0$ ֆունկցիոնալ պարամետրից, որի փոփոխումը թույլ է տալիս ընդգրկել աճի կամայական մեծ արագություն ունեցող ֆունկցիաներ:

2. $\omega(x) \equiv 1$ դեպքում ρ_ω -ն և τ_ω -ն համընկնում են համապատասխան կլասիկ խտրակ-
տերիստիկների հետ:

3. $\omega(x)$ ֆունկցիոնալ պարամետրի կամայական արժեքների դեպքում ρ_ω -ի և τ_ω -ի
համար տեղի ունի Մոնտելի անհավասարությունը, $\rho_\omega > \tau_\omega - 1$:

V. S. ABRAMOVICH. *An extension of Montel's theorem on analytical functions of infinite order in the circle (summary)*

The paper defines the order of (growth) (ρ_ω) of an analytical in the circle function and the index of convergence of its zeros (τ_ω) in such a way, that the following assertions are valid.

1. ρ_ω and τ_ω depend on positive nonincreasing functional parameter $\omega(x) \in C[0, 1]$, $\omega(1) > 0$, changing of which allows to consider functions with arbitrary rate of growth.

2. When $\omega(x) \equiv 1$ ρ_ω and τ_ω coincide with corresponding classical characteristics.

3. For all values of functional parameter $\omega(x)$ the Montel's inequality $\rho_\omega > \tau_\omega - 1$ holds.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.
2. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121): 4, 1969.