ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Э. А. МИРЗАХАНЯН

ВЫЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП КОМПАКТНОГО ТИПА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЫ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_q^c(X, x_0)$ индекса q (q — любое целое число) компактного типа подмножеств X вещественного сепарабельного гильбертова пространства H строятся так же как бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_q(X, x_0)$ индекса q [3] этих множеств лишь с той разницей, что в этом случае на сфероиды f (первого и второго родов) множества X в точке x_0 и их гомотопии $F(x, t)$ накладываются дополнительные ограничения. Требуется, чтобы прообраз при отображении f каждой точки x множества X, отличной от точки x_0 был компактен и на этом прообразе терминальная производная отображения $T_\sigma^{-q} \circ f$ (при $q \leqslant 0$) или отображения $f \circ S_\sigma^q$ (при $q > 0$) была отлична от нуля (см. [1] и [3]). Далее от гомотопии $F(x, t)$ требуется, чтобы сфероиды, определенные формулой $f_t(x) = F(x, t)$ были компактными. Такие сфероиды и гомотопии мы называем компактными.

Так же как и в [3] доказывается, что и оба подхода к определению групп $\Pi_q^c(X, x_0)$ эквивалентны, т. е. группы $\Pi_q^{c, \sigma}(X, x_0)$ и $\Pi_q^{c, A}(X, x_0)$, построенные соответственно посредством ортонормированного базиса σ и подпространства A дефекта q гильбертова пространства H, изоморфны между собой.

Всюду в дальнейшем, когда будет идти речь о „сфероидах“ или гомотопиях, будет подразумеваться, что рассматривается сфероид или гомотопия компактного типа.

В этой статье дается подробное изложение результатов заметки [4]. Ее целью является полное вычисление бесконечномерных гомотопических групп компактного типа $\Pi_q^c(S, x_0)$ единичной сферы S гильбертова пространства H. Именно, показывается, что эта группа при любом целом q изоморфна стабилизировавшейся группе индекса $1-q$ конечномерных сфер, т. е. конечномерной гомотопической группе $\pi_{n+1-q}(S^n)$ при больших n.

Мы будем рассматривать отдельно три случая:

$$q < 1, \quad q = 1, \quad q > 1.$$

Сначала разберем случай $q < 1$, т. е. $q \leqslant 0$. В этом случае каждый рассматриваемый сфероид имеет вид $f\colon H \to H$, где $f(H) \subset S$, $f(H \setminus \Sigma) = x_0$ (Σ — единичный шар гильбертова пространства), причем отображение f принадлежит классу $K_\sigma^{(q)}$, т. е. $T_\sigma^{-q} \circ f \in K_0$. Базис σ во всех последующих рассуждениях предполагается фиксированным.

Пусть b — произвольная точка множества $S \setminus \{x_0\}$. Тогда множество $M = f^{-1}(b) \subset \Sigma$ компактно и на нем терминальная производная отображения $\varphi = T_\sigma^{-q} \circ f$ отлична от нуля. Далее, $\varphi(M) = T_\sigma^{-q}(f(M)) = T_\sigma^{-q} b$, т. е. $\varphi(M)$ есть одна точка, причем

$$\varphi^{-1}(T_\sigma^{-q} b) = f^{-1}(b) = M.$$

Следовательно, существует (см. [2]) такое конечномерное подпространство L, содержащее точку $T_\sigma^{-q} b$, такая окрестность $V \subset \Sigma$ компакта M и такие положительные числа h, η, что справедливы следующие утверждения:

а) Пусть $L^* \supset L$ — конечномерное подпространство, $a \in \overline{V}$, и пусть $E_{a,h}(L^*)$ — множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $(x-a) \perp L$ и $\|x-a\| \leqslant h$, тогда каждая плоскость, параллельная L^* (т. е. имеющая вид $y + L^*$, где $y \in H$) пересекается с множеством $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ не более чем в одной точке;

б) если плоскость $y + L^*$ отстоит от L^* менее чем на η (где $L^* \supset L$), то она пересекается с множеством $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ ровно в одной точке при любом $a \in \overline{V}$,

Мы можем при этом предполагать (см. [1]), что L есть плоскость, натянутая на первые n векторов базиса σ и что плоскость $S_\sigma^{-q}(L)$ (натянутая на первые $n - |q|$ векторов базиса σ) пересекается с внутренностью $\Sigma \setminus S$ единичного шара Σ более чем в одной точке.

Для любой конечномерной плоскости $L^* \supset L$ мы определим отображение

$$f_{V,L^*}\colon (\overline{V} \cap L^*) \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^*), \tag{1}$$

положив

$$f_{V,L^*}(a) = (S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V,L^*})(a) = S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*). \tag{2}$$

Прежде всего укажем еще одну форму записи отображения (1). Для этого заметим, что пересечение $\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*$ состоит лишь из одной точки, а поэтому и $S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*)$ есть точка. Легко видеть, далее, что и $S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$ есть точка. Допустим противное т. е. что $x, y \in S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$, $x \neq y$. Тогда $x - y$ есть вектор, параллельный плоскости $S_\sigma^{-q}(L^*)$, причем $x = S_\sigma^{-q}(u)$, $y = S_\sigma^{-q}(v)$, где $u, v \in \varphi(E_{a,h}(L^*))$. Ясно при этом, что $u \neq v$ (поскольку $x \neq y$). Так как $S_\sigma^{-q}(u - v) = x - y \parallel S_\sigma^{-q}(L^*)$, то $u - v \parallel L^*$, это означает, что подпространство, параллельное L^* и проходящее через точку u, проходит и через v, т. е. пересекает $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ более чем в одной точке, что противоречит приведенному выше условию а).

Итак, каждое из множеств

$$S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) \text{ и } S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*)$$

состоит лишь из одной точки. А так как первое из этих множеств содержится во втором, то эти точки совпадают

$$S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) = S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*). \tag{3}$$

Заметив еще, что $S_\sigma^{-q}\circ\varphi = S_\sigma^{-q}\circ(T_\sigma^{-q}\circ f) = (S_\sigma^{-q}\circ T_\sigma^{-q})\circ f = f$, мы можем (в силу (2) и (3)) написать

$$f_{V,L^*}(a) = S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) = f(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*). \tag{4}$$

Это и есть другая форма записи отображения (1).

Предложение 1. *Если $n = \dim L$ достаточно велико, то граница множества $V\cap L^*$ (являющегося открытым множеством плоскости L^*) переходит при отображении f_{V,L^*} в множество, не содержащее точки b.*

Доказательство. Пусть r — такое положительное число, что r-окрестность множества M содержится в V. Тогда любая точка x, принадлежащая границе множества V (и, в частности, любая точка x, принадлежащая границе множества ($V\cap L^*\subset L^*$) при любом $L^*\supset L$) отстоит от M не менее, чем на r. Будем считать n настолько большим, что плоскость L (натянутая на первые n векторов базиса σ) обладает следующим свойством: множество M целиком расположено в $\frac{r}{2}$-окрестности подпространства L.

Пусть $L^*\supset(L\cup\{T_\sigma^{-q}b\}$ и $a\in\overline{V}\cap L^*$ — такая точка, что $f_{V,L^*}(a) = b$, т. е.

$$f(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*) = b.$$

Это означает, что $b\in f(E_{a,h}(L^*))$ (поскольку $T_\sigma^{-q}b\in L^*$ и, значит, $b = S_\sigma^{-q}(T_\sigma^{-q}b)\in S_\sigma^{-q}(L^*)$, а множество $f(E_{a,h}(L^*))$ пересекается с $S_\sigma^{-q}(L^*)$ ровно в одной точке, см. (4)). Но включение $b\in f(E_{a,h}(L^*))$ равносильно соотношению $f^{-1}(b)\cap E_{a,h}(L^*)\neq\varnothing$, т. е. $M\cap E_{a,h}(L^*)\neq\varnothing$. Пусть $x\in M\cap E_{a,h}(L^*)$. Тогда $(x-a)\perp L^*$ (по определению шара $E_{a,h}(L^*)$), см. условие а), и потому $\|x-a\|$ есть расстояние от точки x до подпространства L^*. Но в силу выбора плоскости L множество M целиком расположено в $\frac{r}{2}$-окрестности подпространства L^* (так как $L^*\supset L$). Следовательно, расстояние от точки $x\in M$ до подпространства L^* меньше $\frac{r}{2}$, т. е. $\|x-a\|<\frac{r}{2}$.

Итак, если $f_{V,L^*}(a) = b$, где $a\in\overline{V}\cap L^*$, то точка a отстоит от M менее, чем на $\frac{r}{2}$. Так как все точки границы множества $V\cap L^*$ отстоят от M не менее, чем на r, то точка a не принадлежит границе множества $V\cap L^*$. Но это и означает, что при $L^*\supset(L\cup\{T_\sigma^{-q}b\})$

граница открытого в L^* множества $V \cap L^*$ переходит при отображении f_{V, L^*} в множество, не содержащее точки b. Таким образом, предложение 1 доказано.

Обозначим теперь через Q_b настолько малую замкнутую окрестность точки b в сфере $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, что она не содержит точек образа границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}. Таким образом, Q_b состоит из всех точек $x \in S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, для которых $\|x - b\| \leqslant \varepsilon$, где ε — фиксированное положительное число, меньшее чем расстояние от точки b до образа границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}. Множество Q_b представляет собой „искривленный шар“, расположенный на сфере S. Далее, обозначим через $\omega\colon Q_b \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ „растягивающее“ отображение „искривленного шара“ Q_b на сферу $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, т. е. отображение, переводящее всю границу (относительно сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$) множества Q_b в одну точку y_0 сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ и гомеоморфно, со степенью $+1$, отображающее внутренность множества Q_b на $(S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)) \setminus \{y_0\}$. Это отображение $\omega\colon Q_b \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ мы можем продолжить в отображение ω сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ на себя, положив $\omega((S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)) \setminus Q_b) = y_0$.

Теперь мы имеем возможность рассмотреть отображение

$$f^* = \omega \circ f_{V, L^*}\colon (\overline{V} \cap L^*) \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*). \tag{5}$$

Ясно, что граница открытого (в плоскости L^*) множества $V \cap L^*$ переходит при отображении f^* в точку y_0. Поэтому, положив

$$f^*((\Sigma \cap L^*) \setminus (V \cap L^*)) = y_0,$$

мы получим непрерывное отображение $f^*\colon \Sigma \cap L^* \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, определяющее некоторый элемент гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, где $k = \dim L^*$, через S^{k+q-1} обозначена сфера $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$. Этот элемент гомотопической группы мы обозначим через $\xi(b, L^*)$. Заметим, что в этом обозначении не участвуют Q_b и V, так как от них элемент $\xi(b, L^*)$ не зависит. В самом деле, если непрерывно изменять число ε, входящее в определение множества Q_b, то отображение f^* будет непрерывно деформироваться, а определяемый им элемент $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{k+q-1})$ меняться не будет. Что же касается V, то от выбора этой окрестности отображение f^* вообще не зависит (если только число ε настолько мало, что множество Q_b не пересекается с образом границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}).

Предложение 2. *Если $L^{**} \supset L^*$ и $\dim L^{**} = \dim L^* + 1$, то $\xi(b, L^{**}) = E\xi(b, L^*)$, где через $E\colon \pi_k(S^{k+q-1}) \to \pi_{k+1}(S^{k+q})$ обозначен гомоморфизм надстройки Фрейденталя* (*см.* [5]).

Доказательство. Мы используем конструкцию, проведенную при доказательстве предложения 4 статьи [2] для отображения

$\varphi = T_\sigma^{-q} \circ f$, принадлежащего K_0. Построив множество W и гомотопию $G^{(t)}$, как и при доказательстве предложения 4 статьи [2], мы найдем, что отображения $\varphi_{V, L^{**}}$ и $\varphi_{V, L^{*}} \circ G^{(0)}$ (множества WbL^{**}) гомотопны между собой. При этом граница множества W отображается в множество, не содержащее точки $T_\sigma^{-q}\, b$. Следовательно, гомотопны между собой и отображения

$$f_{V, L^{*}} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V, L^{*}} \text{ и } f_{V, L^{**}} \circ G^{(0)} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V, L^{*}} \circ G^{(0)}, \tag{6}$$

причем граница множества W переводится этими отображениями в множество, не содержащее точки b. Применяя отображение ω (ср. (5)), мы получим с помощью отображений (6) два гомотопных между собой отображения $\Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, т. е. два отображения, определяющих один и тот же элемент гомотопической группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$, где $k = \dim L^*$ и потому $k+1 = \dim L^{**}$. В частности, отсюда следует, что второе отображение (6), превращенное с помощью ω в отображение $\Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$ определяет элемент $\xi(b, L^{**})$ группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$.

Вспомним теперь (см. там же), что на множестве $V_1 \cap L^* \subset W$ отображение $\varphi_{V, L^{**}} \circ G^{(0)}$ совпадает с φ_{V_1, L^*} и переводит множество $V_1 \cap L^*$ в плоскость L^*. Далее условимся считать, что вектор e (лежащий в L^{**} и ортогональный L^*) определяет направление „вверх" в плоскости L^{**}, тогда если точка $a=(c, \xi)$ расположена в W выше (ниже) плоскости L^*, то точка $\varphi_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше (ниже) плоскости L^*. Применяя отображение S_σ^{-q}, мы получаем, что на множестве $(V_1 \cap L^*) \subset W$ второе отображение (6) совпадает с отображением $S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V_1, L^*}$ и переводит множество $V_1 \cap L^*$ в плоскость $S_\sigma^{-q}(L^*)$. Далее, полагая $e^* = S_\sigma^{-q}(e)$ и считая, что вектор e^* (ортогональный $S_\sigma^{-q}(L^*)$) определяет направление „вверх" в плоскости $S_\sigma^{-q}(L^{**})$, мы найдем, что если точка $a = (c, \xi)$ расположена в W выше (ниже) плоскости L^*, то точка $S_\sigma^{-q}(\varphi_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))) = f_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше (ниже) плоскости $S_\sigma^{-q}(L^*)$.

Следовательно, отображение $f^{**}\colon \Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, определяемое (ср. (5)) с помощью второго отображения (5) (и задающее элемент $\xi(b, L^{**})$ группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$ устроено следующим образом. Оно переводит „диаметральное" сечение $\Sigma \cap L^*$ шара $\Sigma \cap L^{**}$ b $S \cap \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$ в соответствии с отображением f^* (ср. (5)), задающим элемент $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{k+q-1})$, и переводит „верхний полушар" шара $\Sigma \cap L^{**}$ (т. е. лежащий „выше" плоскости L^*) в „верхнюю полусферу" сферы $S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, а „нижний полушар"—в нижнюю полусферу". Но и это означает, что $\xi(b, L^{**}) = E\xi(b, L^*)$, где E— гомоморфизм надстройки Фрейденталя. Таким образом, предложение 2 доказано.

Для того чтобы сформулировать следующее предложение, условимся отождествлять группы $\pi_k(S^{k+q-1})$ и $\pi_{k+1}(S^{k+q})$ с помощью изоморфизма надстройки E $(k > -2q+3)$. Получающуюся в результате отождествления группу (изоморфную каждой из групп $\pi_k(S^{k+q-1}$, $k > -2q+3)$ мы и будем называть стабильной гомотопической группой сферы. Предложение 2 показывает, что фиксируя точку b и плоскость L^*, мы получаем элемент $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{k+q-1})$, который является представителем некоторого элемента стабильной гомотопической группы сферы. Таким образом, если задан сфероид $f: H \to S$ индекса $q \leqslant 0$ сферы S в точке x_0, то, фиксируя точку $b \in S \setminus \{x_0\}$ и плоскость L^* достаточно высокой размерности, мы определим элемент $\xi(b, L^*)$ стабильной гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$.

Предложение 3. *Элемент* $\xi = \xi(f)$ *стабильной гомотопической группы* $\pi_{-q+1} \approx \pi_k(S^{k+q-1})$ $(k > -2q+3)$, *определяемый (как представителем) элементом* $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{q+k-1})$ *(где* $S^{q+k-1} = S \cap$ $\cap\, S_\sigma^{-q}(L^*)$, $k = \dim L^*$), *не зависит от произвола в выборе элементов построения, а полностью определяется гомотопическим классом* $\{f\} \in \Pi_q^c(S, x_0)$ *сфероида* f. *Этим определяется отображение* $\{f\} \to \xi(f)$ *бесконечномерной гомотопической группы компактного типа* $\Pi_q^c(S, x_0)$ *в стабильную гомотопическую группу* $\pi_{-q+1} \approx$ $\approx \pi_k(S^{k+q-1})$, $(k > -2q+3)$. *Оказывается, что получаемое таким образом отображение является изоморфизмом группы* $\Pi_q^c(S, x_0)$ *на группу* π_{-q+1}.

Доказательство. Независимость от выбора плоскости L^* непосредственно вытекает из предложения 2. Независимость элемента $\xi(b, L^*)$ от выбора точки $b \in S \setminus \{x_0\}$ вытекает из того, что при непрерывном перемещении точки b в множестве $S \setminus \{x_0\}$ отображение f_{V, L^*} (а потому и отображение f^*, ср. (5)) непрерывно деформируется. Таким образом, отображение $\{f\} \to \xi(f)$ группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ в π_{-q+1} не зависит от произвола в выборе элементов построения, а определено корректно. Гомоморфность этого отображения непосредственно вытекает из определения сложения в группе $\Pi_q^c(X, x_0)$ (см. [3]).

Докажем, что отображение $\{f\} \to \xi(f)$ есть эпиморфизм. Пусть $\alpha \in \pi_{-q+1}$ — произвольный элемент стабильной гомотопической группы, и пусть $\{\lambda\} \in \pi_k(S^{q+k-1})$—представитель этого элемента. Тогда λ представляет собой некоторое отображение $\Sigma \cap L^* \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$, где L^* — некоторое k-мерное подпространство пространства H. Мы можем считать, что L^* натянуто на первые n векторов базиса σ, где $n > -q$. Отображение λ переводит всю границу шара $\Sigma \cap L^*$ в одну точку $x_0 \in S \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$. Мы построим некоторый сфероид $f_\lambda: H \to H$ индекса q. Пусть x — произвольная точка шара $\Sigma \cap L^*$; далее, пусть e — произвольный единичный вектор, ортогональный плоскости L^*. Проведем через точку x прямую, параллельную вектору e. Она пересекается с шаром Σ по отрезку J_x с концами в точках $x + \mu e$, $x - \mu e$, где $\mu = \sqrt{1 - \|x\|^2}$. Если $\lambda(x) = x_0$, то мы положим: $f_\lambda(J_x) = x_0$ и тем самым отображение f_λ будет на отрезке J_x определено. Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda(x) \neq x_0$. В этом случае мы рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через точки x_0 и $\lambda(x)$ и параллельную вектору $S_\sigma^{-q}(e)$. Эта плоскость высекает из сферы S окружность. На эту окружность мы и отобразим отрезок J_x. Именно, мы положим

$$\hat{f}_\lambda(x+te) = \frac{x_0+\lambda(x)}{2} + \frac{\lambda(x)-x_0}{2}\cos 2\gamma + \frac{e\,|\lambda(x)-x_0|}{2}\sin 2\gamma, \qquad (7)$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{t}{\mu^2-t^2}.$$

Несложно проверяется, что получаемое таким образом отображение $\hat{f}_\lambda\colon \Sigma \to S$ переводит всю границу шара Σ в точку x_0 и, следовательно, может быть дополнено до непрерывного отображения $f_\lambda\colon H \to H$, если положить $f_\lambda(H \setminus \Sigma) = x_0$. Получаемое отображение $f_\lambda\colon H \to H$ представляет собой сфероид индекса q сферы S в точке x_0 и для этого сфероида $\xi(b, L^*) = \{\lambda\}$, т. е. $\xi(f_\lambda) = \alpha$. Тем самым эпиморфность отображения доказана.

Остается доказать, что это отображение мономорфно. Пусть сфероид $f\colon H \to S$ индекса q сферы S в точке x_0 обладает тем свойством, что $\xi(f) = 0$. Докажем, что в таком случае сфероид f гомотопен нулю, т. е. определяет нулевой элемент группы $\Pi_q^c(S, x_0)$. Прежде всего выберем некоторую точку $b \in S \setminus \{x_0\}$ и плоскость L (натянутую на первые n векторов базиса σ), а также V, h, η таким образом, чтобы для отображения $\varphi = T_\sigma^{-q} \circ f$, принадлежащего классу K_0, выполнялись условия предложений 1 и 2 статьи [2]. Мы можем при этом точку b считать заранее выбранной таким образом, что $T_\sigma^{-q}\, b \in L$. При этих условиях элемент $\xi(b, L^*)$ гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, где L^* — произвольная конечномерная плоскость, содержащая L и $k = \dim L^*$, будет представителем элемента $\xi(f)$ стабильной гомотопической группы. Следовательно, $\xi(b, L^*) = 0$, (поскольку, по нашему предположению, $\xi(f) = 0$). В каждом шаре $\Sigma_{a,h}(L^*)$ имеется при $a \in V$ не более одной точки x, для которой $\varphi(x) = b$. Иными словами, проектирование вдоль подпространства, являющегося ортогональным дополнением плоскости L^*, взаимно однозначно отображает множество M на плоскость L^*. Поэтому, применяя деформацию, аналогичную деформации $G^{(t)}$, которая применена при доказательстве предложения 4 статьи [2], мы сможем добиться того, чтобы для отображения $\varphi \circ G^{(0)}$ прообраз точки b лежал полностью в плоскости L^*. При этом отображение $\tilde{f} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi \circ G^{(0)}$, гомотопное f, представляет собой сфероид, определяющий тот же элемент группы $\Pi_q^c(S, x_0)$, что и сфероид f. Мы можем предполагать поэтому (заменив f сфероидом $\tilde{f}$), что сфероид с самого начала обладал указанным свойством, т. е. $M = f^{-1}(b) \subset L^*$. Более того, применяя указанную деформацию, мы можем добиться того, что само отображение f (а не f_{V,L^*}) отображает шар $\Sigma \cap L^*$ в сферу $S \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$. Иными словами, мы можем предполагать, что $f=f_{V, L^*}$ на шаре $\Sigma \cap L^*$, т. е. $f(\Sigma \cap L^*) \subset S \cap S_{\varepsilon}^{-q}(L^*)$, при этом отображение

$$f\colon \Sigma \cap L^* \to S \cap S_{\varepsilon}^{-q}(L^*) \tag{8}$$

определяет нулевой элемент гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$. Отображение (8), т. е. f, рассматриваемое на множестве $\Sigma \cap L^*$, обозначим через λ. С помощью этого отображения λ мы построим сфероид f_λ (ср. (7)) так же, как это было сделано при доказательстве эпиморфности. Таким образом, оба сфероида f, f_λ совпадают между собой на множестве $\Sigma \cap L^*$.

Докажем, что сфероиды f и f_λ определяют один и тот же элемент бесконечномерной гомотопической группы $\Pi_q^c(S, x_0)$. С этой целью заметим, что для любой точки $x \in E_{a,h}(L^*)$, где $a \in V \cap L^*$, векторы $f(x)-f(a)$ и $f_\lambda(x)-f_\lambda(a)=f_\lambda(x)-f(a)$ образуют между собой угол, меньший $\frac{\pi}{2}$ (так как каждый из них образует угол, меньший $\frac{\pi}{4}$ с вектором $x-a$). (Заметим, впрочем, что уменьшив окрестность V и заменив L^* плоскостью большего числа измерений, можно было бы этот угол считать как угодно малым). Следовательно, точки $f(x)$ и $f_\lambda(x)$ не являются диаметрально противоположными точками сферы S, и потому отрезок, соединяющий эти точки, не проходит через центр сферы S (т. е. через нулевую точку пространства H). Поэтому, полагая

$$g_t(x)=\begin{cases} tf(x)+(1-t)f_\lambda(x) & \text{при } \rho(x, M)<\varepsilon, \\ t\left(1-\dfrac{\rho(x, M)-\varepsilon}{\varepsilon}\right)f(x)+\left(1-t\left(1-\dfrac{\rho(x, M)-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)f_\lambda(x), & \\ & \text{при } \varepsilon \leqslant \rho(x, M) \leqslant 2\varepsilon, \\ f_\lambda(x) & \text{при } \rho(x, M)>2\varepsilon, \end{cases}$$

мы получаем деформацию сфероидов, причем точка $g_t(x)$ для любого $t \in I$ и любого $x \in H$ не совпадает с центром сферы S. Здесь ε — такое положительное число, что 2ε-окрестность множества M содержится в V. Поэтому, спроектировав все точки $g_t(x)$ из центра сферы S на саму сферу, мы получаем деформацию $\tilde{g}_t$, протекающую уже в самой сфере S и соединяющую сфероиды $\tilde{g}_0$ и $\tilde{g}_1$. Нетрудно проверяется, что полученная деформация $\tilde{g}_t$ принадлежит требуемому классу (т. е. является деформацией сфероидов индекса q). Заметим теперь, что сфероид $\tilde{g}_0$ совпадает с f_λ, а сфероид $\tilde{g}_1$ совпадает с f в ε-окрестности множества M. Из этого вытекает, что $\{f_\lambda\}=\{\tilde{g}_0\}=\{\tilde{g}_1\}=$ $=\{f\}$; действительно, для того чтобы убедиться, что сфероиды $\tilde{g}_1$ и f определяют один и тот же элемент бесконечномерной гомотопической группы $\Pi_q^c(S, x_0)$, достаточно взять некоторую достаточно малую окрестность Q точки b в сфере S и растянуть ее на всю сферу S так, чтобы граница множества Q перешла в точку x_0. Такую „растягивающую деформацию" ω_t можно провести в классе отображений K_0, причем в результате деформаций $\omega_t \circ \tilde{g}_1$ и $\omega_t \circ f$ сфероиды $\tilde{g}_1$ и f превратятся в один и тот же сфероид (так как $\tilde{g}_1$ и f совпадают вблизи множества M).

Итак, $\{f_\lambda\} = \{f\}$, и нам остается лишь доказать, что $\{f_\lambda\} = 0$. Но это очевидно. В самом деле, так как отображение λ определяет нулевой элемент группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, то существует деформация λ_t, для которой $\lambda_0 = \lambda$ и $\lambda_1(\Sigma \cap L^*) = x_0$. Но тогда деформация f_{λ_t} соединяет сфероид $f_{\lambda_0} = f_\lambda$ со сфероидом f_{λ_1}, который является нулевым (т. е. $f_{\lambda_1}(H) = x_0$). Таким образом, $\{f\} = \{f_\lambda\} = 0$, т. е. отображение $\{f\} \to \xi(f)$ мономорфно. Тем самым предложение 3 доказано.

Доказанные предложения дают полное вычисление группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ для $q \leqslant 0$. В случае $q > 0$ совершенно такие же рассуждения (с очевидными изменениями) дают аналогичный результат: $\Pi_q^c(S, x_0) \approx \pi_{-q+1}$. Заметим лишь, что при $q=1$ мы находим, что группа $\Pi_1^c(S, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе $\pi_0 \approx \approx \pi_k(S^k)$, т. е. является свободной циклической, в то время как при $q > 1$ группа $\Pi_q^c(S, x_0)$ тривиальна (поскольку тривиальна группа $\pi_k(S^n)$ при $n > k$).

В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *При любом целом q бесконечномерная гомотопическая группа $\Pi_q^c(S, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе*

$$\pi_{-q+1} \approx \pi_k(S^{k+q-1}) \quad (k > -2q + 3).$$

Заметим еще, что если через S_l обозначить единичную сферу, лежащую в подпространстве A дефекта $l-1$ (так что $S = S_1$), то совершенно аналогичными рассуждениями устанавливается следующий результат.

Теорема 2. *При любых целых q и $l \geqslant 0$ бесконечномерная гомотопическая группа $\Pi_q^c(S_l, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе индекса $l-q$ конечномерных сфер:*

$$\Pi_q^c(S_l, x_0) \approx \pi_{-q+l} \approx \pi_{n+l-q}(S^n)$$

(где n — достаточно большое натуральное число).

Автор выражает глубокую признательность проф. В. Г. Болтянскому, под руководством которого была выполнена эта работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10.VI.1973

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության միավոր սֆերայի անվերջ չափանի կոմպակտ տիպի հոմոտոպիկ խմբերի հաշվումը (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ իրական սեպարաբել Հիլբերտյան տարածության l դեֆեկտի միավոր S_l *սֆերային անվերջ չափանի կոմպակտ տիպի q ինդեքսի հոմոտոպիկ* $\pi_q^c(S_l)$ *խումբը իզոմորֆ է վերջավոր չափանի սֆերաների* $l-q$ *ինդեքսի կայունացված հոմոտոպիկ խմբին, այսինքն՝* $\pi_{n+l-q}(S^n)$ *-ին, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում:*

E. A. MIRSAKCHANIAN. *Calculation of the compact type infinite-dimensional groups of unit sphere in Hilbert spaces* (summary)

Let H be the real separable Hilbert space, S_l — the unit sphere in H with defect l, $\pi_q^c(S_l)$ — the compact type infinite-dimensional homotopy group of S_l with index q.

The main result is the following: $\pi_q^c(S_l)$ is isomorph to the stable homotopy group with index $l-q$ of finife-dimensional spheres, i. e. to $\pi_{n+l-q}(S^n)$ for sufficiently large values of n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", IX, № 2, 1974, 107—120.
2. *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*. Построение степени отображения в гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", IX, № 5, 1974, 374—386.
3. *Э. А. Мирзаханян*. Построение бесконечномерных гомотопических групп, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", VIII, № 3, 1973, 212—225.
4. *Э. А. Мирзаханян*. Бесконечномерные гомотопические группы единичной сферы гильбертова пространства, ДАН Арм. ССР, том 52, № 4, 1971, 193—195.
5. *Ху Сы-Цзян*. Теория гомотопий, Изд. „Мир", М., 1964.