ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В недавних работах М. М. Джрбашяна, посвященных вопросам представления ядра Коши и решению интерполяционных задач в классе H_2 Харди (см. [1] и [2]), были построены биортогональные системы, порожденные произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(|\alpha_j|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1}$$

С системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2,\cdots) \tag{2}$$

и $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа α_k в совокупности $\{\alpha_j\}_1^k$ при условии (1), ассоциируется система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций, биортогональная с нею на единичной окружности.

Каждая из биортогональных систем $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$ не замкнута в метрике пространств Харди $H_p(1\leqslant p<\infty)$. И в связи с этим М. М. Джрбашяном в работе (1) был поставлен вопрос об исследовании базисности этих систем в подпространстве $\lambda_p\{\alpha_j\}\subset H_p(1<p<\infty)$ их замкнутой линейной оболочки.

В работе автора [3] была установлена базисность этих систем в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_j\}$ $(1<p<\infty)$ в том частном случае, *когда все числа последовательности* $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *отличны друг от друга* и удовлетворяют условию отделимости Л. Карлесона [4]. Эти результаты в другой работе автора [5] были распространены на подпространства $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ классов функций $E_p(1<p<\infty)$, аналитических в односвязных областях $G^{(+)}$ с границей Γ типа Ляпунова.

Путем определенной модификации системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, в работе [2] была построена другая система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. При помощи этой новой системы М. М. Джрбашяну удалось установить результаты исчерпывающего характера о существовании и явном представлении посредством системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ решений интерполяционных задач вида

$$f(z)\in H_2,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j \quad (j=1,\ 2,\cdots) \tag{3}$$

для узлов $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ограниченной кратности $p = \sup_{k\geq 1} |s_k| < +\infty$ и при соблюдении условия обобщенной отделимости

$$\inf_{k\geq 1} \prod_{\alpha_j \neq \alpha_k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| = \delta > 0. \tag{4}$$

В настоящей статье, существенно опираясь на некоторые основные леммы и теоремы работ [1] и [2], а также на известную теорему Н. К. Бари о базисах [6], исследуется вопрос о базисности первоначальной биортогональной системы $\{r_k(z), \Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна в подпространстве $\lambda_2\{\alpha_j\} \subset H_2$ при тех же условиях (4) и $p = \sup_{k\geq 1} \{s_k\} < +\infty$.

Эти результаты распространяются далее на подпространства типа $\lambda_2\{G^{(+)}; \omega_k\}$, являющиеся замыканием в метрике $L_2(\Gamma)$ другой не замкнутой в $G^{(+)}$ биортогональной на границе Γ системы простейших рациональных дробей $\{m_k^{1/2}(z)\}_1^\infty$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_j\}_1^\infty \overline{\in} \overline{G}^{(+)}$. Эти системы, являющиеся существенным обобщением полиномов Фабера, также были введены М. М. Джрбашяном в работе [1].

В § 1 статьи даются формулировки ряда лемм и теорем известных ранее, на которые мы существенно опираемся в дальнейшем. Здесь, в частности, приводится определение класса $\lambda_2\{\alpha_j\}$ как подмножества функций из H_2, допускающих моногенное мероморфное продолжение из круга $|z|<1$ в ее внешнюю часть $|z|>1$.

В § 2 доказывается, что условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы биортогональные системы функций $\{r_k(z), \Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали безусловный базис (теорема 1) в $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Далее устанавливается, что (разумеется неединственное) решение интерполяционной задачи (3) не только представимо в виде ряда

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Omega_j^*(z) \tag{5}$$

по системе $\{\Omega_j^*(z)\}_1^\infty$, как впервые было доказано в работе [2], но и в виде ряда (теорема 2)

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Omega_j(z). \tag{6}$$

При этом оказывается, что такое решение обладает важным свойством, оно является единственным из решений задачи (3), обладающим минимальной нормой в H_2.

Наконец, устанавливается также, что соответствующие разложения произвольной функции $f(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ сходятся равномерно к этой же функции в области CK, где K — замыкание множества точек $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^\infty$.

В заключительном § 3 рассматриваются аналогичные вопросы базиса по биортогональным на кривых типа Ляпунова системам рациональных функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$, о которых упоминалось выше. Оказывается, что как и в случае круга, здесь также каждая функция из класса $L_2\{G^{(+)}, \omega_k\}$ допускает моногенное мероморфное продолжение из области $G^{(+)}$ в область $G^{(-)}$ ее дополнения, а также разложение по системе $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$ в среднем по границе Γ, и равномерное внутри множества $G^{(+)} \cup G^{(-)} \setminus \{\omega_j\}_1^\infty$.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1. (а). Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа произвольной кратности.

Обозначим через $s_k \geqslant 1$ и $p_k(n)$ кратность появления числа α_k соответственно на отрезках $\{\alpha_j\}_1^k$ и $\{\alpha_j\}_1^n$. Всюду дальше будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|^2) < +\infty. \tag{1.1}$$

Из этого условия очевидно следует, что при любом $(1 < k < \infty)$ кратность появления числа α_k во всей последовательности будет конечной, причем очевидно, что $s_k \leqslant p_k = p_k(\infty) < \infty$.

В этом предположении нашу последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ отнесем к классу Δ_p, если

$$\sup_{1 < k < \infty} p_k = p < +\infty \tag{1.2}$$

и при некотором $\delta\,(0 < \delta < 1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\inf_{k > 1} \prod_{\alpha_j \neq \alpha_k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| = \delta. \tag{1.3}$$

(б). С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

а также функции

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Следуя работе [1], введем в рассмотрение системы функций

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!\, z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.5}$$

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z - \alpha_k)^{p_k - s_k + 1 - \nu}} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k(n)-s_k}\frac{a_{n,\nu}(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)-s_k+1-\nu}}\quad (k=1,\ 2,\cdots),\tag{1.7}$$

где

$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad(\nu=0,\ 1,\ 2,\cdots),\tag{1.8}$$

$$a_{n,\nu}(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)}\right\}_{z=z_k}\quad(\nu=0,\ 1,\ 2,\cdots).\tag{1.9}$$

Для дальнейших наших целей необходимо рассматривать также систему $\{\tilde r_k(z),\ \tilde\Omega_k(z)\}_1^\infty$, где

$$\tilde r_k(z)=(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/2}\,r_k(z),\tag{1.5'}$$

$$\tilde\Omega_k(z)=(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}\ \Omega_k(z).\tag{1.6'}$$

Следующие теоремы, на которые мы будем существенно опираться, были установлены в работе [1].

Теорема А. *Система функций* $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, *а также* $\{\tilde r_k(z),\ \tilde\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональна на окружности* $|t|=1$ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}r_\nu(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\tilde r_\nu(t)\,\overline{\tilde\Omega_k(t)}\,|dt|=\delta_{k,\nu}=\begin{cases}0 & \nu\neq k\\ 1 & \nu=k.\end{cases}\tag{1.10}$$

Теорема Б. *Для произвольных значений переменных* z *и* ζ *и для любого* $n\,(1\leqslant n<\infty)$ *справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\bar\zeta z}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\Omega_{n,k}}(\zeta)\,r_k(z)+\frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(z)}{1-\bar\zeta z}\,.\tag{1.11}$$

В работе [2] М. М. Джрбашяна была введена в рассмотрение система функций $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, являющаяся модификацией системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. Там же устанавливается следующий результат (см. теоремы 1 и 2 [3]).

Теорема В. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_p$ *и* $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — *произвольная последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_j|^2(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}<\infty,\tag{1.12}$$

тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Для любой функции* $f(z)\in H_2$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}\,|f^{(s_j-1)}(\alpha_j)|^2<C\|f\|,\tag{1.13}$$

где C *не зависит от* f.

2°. *Существует функция* $f_0(z)\in H_2$, *являющаяся решением интерполяционной задачи*

$$f_0^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j \quad (j=1, 2, \cdots). \tag{1.14}$$

3°. *Функция* $f_0(z)$ *представима в виде суммы ряда*

$$f_0(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\,\Omega_j^*(z), \tag{1.15}$$

сходящегося равномерно внутри $|z|<1$ *и в метрике* H_2 *на* $|z|=1$.

В дальнейшем нам понадобится еще одна лемма, полностью эквивалентная лемме 1.6 работы [2].

Лемма А. *Если* $\{\alpha_k\}_1^{\infty}\in\Delta_p$, *то для коэффициентов* (1.8) *справедливы неравенства*

$$|a_\nu(\alpha_k)|\leqslant a(\delta, p)\,(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu} \quad (0\leqslant\nu\leqslant p_k,\ \ 1\leqslant k<\infty), \tag{1.16}$$

где $a(\delta, p)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* ν *и* k.

(г). Обозначим через $H_2(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)}=\{z;\ |z|<1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_2 Харди, а через $H_2(D^{(-)})$ — класс голоморфных в $D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z)=\tilde{F}(1/z), \quad z\in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z)\in H_2(D^{(+)})$.

Как известно, классы $H_2(D^{(+)})$ и $H_2(D^{(-)})$ становятся гильбертовыми пространствами, если ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}\,|d\zeta|,$$

где $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ — предельные значения функций $f(z)$ и $g(z)$ по некасательным направлениям.

Для каждой функции $f(z)\in H_2(D^{(+)})$ введем в рассмотрение последовательность функций

$$R_n(f;\ z)=\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z},\ \ z\in D^{(+)} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{1.17}$$

а также функцию

$$R(f;\ z)=\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z},\ \ z\in D^{(+)}. \tag{1.18}$$

Справедлива следующая лемма (см. [1]).

Лемма Б. *Пусть* $f(z)\in H_2(D^{(+)})$ — *произвольная функция, тогда*

1°. $R_n(f, z) \in H_2(D^{(+)})\ (n=1, 2, \cdots)$, $R(f, z) \in H_2(D^{(+)})$,

2°. $$\lim_{n\to\infty} \|R_n(f; z) - R(f; z)\| = 0. \qquad (1.19)$$

(д) Введем в рассмотрение следующий класс функций (см. [6],[7]).

Обозначим через $\lambda_2\{\alpha_k\}$ класс функций,[1] определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H_2(D^{(+)})$, $z \in D^{(+)}$,

2. $f(z) = B(z)\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(\infty) = 0$, $\tilde{f}(z) \in H_2(D^{(-)})$, $z \in D^{(-)}$,

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z|=1$ почти всюду совпадают.

Следующие леммы доказаны в работах [3] и [1].

Лемма В. *Для того чтобы функция $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ принадлежала классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}. \qquad (1.20)$$

Лемма Г. *Любая функция $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ допускает представление вида*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

причем

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2,$$

где

$$f_1(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}, \quad f_2(z) = B(z) f_2^*(z) \in H_2(D^{(+)}),$$

$$f_2^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \in H_2(D^{(+)}).$$

Лемма Д. *Пусть $f(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ и $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 0\ (k=1, 2, \cdots)$, тогда $f(z) \equiv 0$.*

Теорема Г. [8]. *Пусть системы функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in L_2(0, 2\pi)$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$, $\psi_n \in L_2(0, 2\pi)$ $(n=1, 2, \cdots)$ составляют полную биортогональную систему в некотором подпространстве пространства $L_2(0, 2\pi)$. Тогда последовательности $\{\varphi_n\}_1^\infty$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$ образуют безусловный базис в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 < \infty \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 < \infty,$$

где f — произвольная функция из этого подпространства.

§ 2. Разложение по биортогональным системам $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$

(2.1) (а). Лемма 2.1. *Системы функций $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$ и, следовательно, также системы $\{\tilde{r}_k(z),\ \tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$, принадлежат классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.*

Действительно, применяя лемму В имеем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{r_k(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} = (s_k-1)! \int\limits_{|t|=1} \frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}} \frac{1}{B(t)} \frac{dt}{t-z} = 0,$$

так как

$$\frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}} \cdot \frac{1}{B(t)(t-z)} = O(|t|^2) \text{ при } t\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что $\Omega_k(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$.

Лемма 2.2. *Системы функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *и, следовательно, также системы* $\{\tilde{r}_k(z)\}_1^\infty$, $\{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ *полны в* $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Доказательство. Пусть $f(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ — произвольная функция, тогда по формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta} z} |d\zeta|.$$

Применяя формулу (1.12), получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(f)\, r_k(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где

$$c_k^{(n)}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\, |d\zeta|, \tag{2.1}$$

так что доказательство полноты $\{r_k(z)\}_1^\infty$ следует из лемм Б и В.

Пусть теперь $\Phi(f) = (f, g)$, $g \in \lambda_2\{\alpha_k\}$—некоторый линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi(\Omega_k) = (\Omega_k; g) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Согласно определению класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$ на окружности $|t| = 1$ имеем

$$g(t) = \frac{B(t)}{t} \tilde{g}\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{где} \quad \tilde{g}(z) \in H_2(D^{(+)}).$$

Применяя лемму Д, получаем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{\tilde{g}(t)}{\bar{B}(t)} \frac{dt}{t-z} = \int\limits_{|t|=1} \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)},$$

где

$$\bar{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k - z}{1 - \alpha_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},$$

так что $\tilde{g}(z) \in \lambda_2\{\bar{\alpha}_k\}$. Теперь из (2.2) имеем

$$(g, \Omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} g\, \bar{\Omega}_k |dt| = \frac{1}{(s_k-1)!\, 2\pi i} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(p_k - s_k - \nu)!} \tilde{g}^{(p_k - s_k - \nu)}(\alpha_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Но учитывая, что $a_0(\alpha_k) \neq 0$ $(k=1, 2, \cdots)$, из (2.4) заключаем, что

$$\tilde{g}^{(s_k - 1)}(\alpha_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Так что, в силу леммы В будем иметь $g(z) \equiv 0$ и, тем самым, лемма доказана.

(б). Лемма 2.3. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.2), *тогда*

$$0 < C_1 < \|\tilde{r}_k\| < C_2,$$

где $0 < C_1$, $C_2 < \infty$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* k.

Доказательство. Для каждой функции $\tilde{r}_k(z)$ имеем

$$\|\tilde{r}_k\| = \frac{(s_k - 1)!}{2\pi} \left\{ \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{2(s_k - 1/2)}}{|1 - \zeta\bar{\alpha}_k|^{2s_k}} |d\zeta| \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{(s_k - 1)!}{2\pi} \left\{ \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \zeta\bar{\alpha}_k|^2} \, \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k - 2}}{|1 - \zeta\bar{\alpha}_k|^{2s_k - 2}} |d\zeta| \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{s_k - 1}(s_k - 1)! \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \zeta\bar{\alpha}_k|^2} |d\zeta| = 2^{s_k - 1} \quad (s_k - 1)!,$$

так что, учитывая условие (1.2), получаем

$$\|\tilde{r}_k(z)\| \leqslant 2^{p-1}(p-1)! < +\infty.$$

Теперь, обозначая $\varphi_k = \arg \bar{\alpha}_k$, оценим величину $\|\tilde{r}_k\|$ снизу. Мы имеем

$$\|\tilde{r}_k\| = \frac{(s_k - 1)!}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k - 1}}{|1 - e^{i\theta}\bar{\alpha}_k|^{2s_k}} d\theta \geqslant \frac{(s_k - 1)!}{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{|\theta - \varphi_k| < 1 - |\alpha_k|^2} \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k - 1}}{\left[(1 - |\alpha_k|^2)^2 + 4\sin^2\dfrac{\theta - \varphi_k}{2}\right]^{s_k}} d\theta \geqslant 5^{-s_k} \frac{(s_k - 1)!}{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{|\theta - \varphi_k| < 1 - |\alpha_k|^2} \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k - 1}}{(1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k}} d\theta > 5^{-s_k} \quad (s_k - 1)! > 5^{-p},$$

и лемма доказана.

Лемма 2. 4. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, *тогда для любой функции* $f \in H_2(D^{(+)})$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \tilde{r}_k)|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \tilde{\Omega}_k)|^2 < \infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $f\in H_2(D^{(+)})$, тогда согласно теореме В имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\ \bar{r}_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/2}\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,\zeta^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k\zeta)^{s_k}}\,|d\zeta|\right|^2<$$

$$\leqslant[(p-1)!]^2\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2<+\infty.$$

Учитывая теорему Рисса 4 и (1.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\ \Omega_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{\overline{a_\nu(\alpha_\nu)}}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{(\bar{\zeta}-\bar{\alpha}_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\right|^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\overline{a_\nu(\alpha_k)}\,f_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\bar{\alpha}_k)\right|^2,$$

где

$$f_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta B(1/\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in H_2(D^{(+)}).$$

Теперь, пользуясь леммой А и теоремой В, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\ \tilde{\Omega}_k)|^2\leqslant pa(\delta,\ p)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{2p_k-2\nu-2s_k+1}|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar{\alpha}_k)|^2<$$

$$<p^2a(\delta,\ p)\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}|f_*^{(s_k-1)}(\bar{\alpha}_k)|^2<+\infty.$$

2.2 (а). Теорема 1*. *Для того чтобы системы* $\{\tilde{r}_k;\ \tilde{\Omega}_k\}_1^{\infty}$ *образовывали безусловный базис в* $\lambda_2\{\alpha_k\}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\{\alpha_k\}_1^{\infty}\in\Delta_p$.

Доказательство. Утверждение о достаточности следует из теоремы Г и лемм 2.2 и 2.4.

Теперь предположим, что $\{\tilde{r}_k(z)\}_1^{\infty}$ является базисом в $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Тогда по теореме Банаха [9] имеем

$$\|\tilde{\Omega}_k\|\leqslant C\|\tilde{r}_k\|\qquad(1\leqslant k<\infty),\tag{2.6}$$

где $C\,(0<C<\infty)$ — некоторая постоянная, не зависящая от k. Применяя неравенства (2.6) для тех k, для которых $s_k=p_k$ и учитывая, что при таких k

$$\Omega_k(z)=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{(p_k-1)!}\,\frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j\neq\alpha_k}\dfrac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\,\dfrac{|\alpha_j|}{\alpha_j}}\,\frac{B(z)}{z-\alpha_k},$$

---

* Учитывая теорему Банаха [9] о базисах нетрудно доказать, что если $\sup\limits_k s_k=\infty$, то системы (1.5′), (1.6′) не образуют базиса в $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

согласно лемме 2.3 и (2.6) имеем

$$\|\Omega_k\| = \frac{1}{(p_k-1)!}\,\frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|} < C,$$

так что

$$\prod_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}\alpha_k}\right| > \frac{1}{pC},$$

и теорема доказана

Теорема 2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$ *и* $\{w_k\}_1^\infty$ — *некоторая последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}\,|w_k|^2 < \infty. \tag{2.7}$$

Тогда

1°. *Существует единственная функция* $f(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\}$ *такая, что*

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = w_k \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2.8}$$

и допускающая разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k\,\Omega_k(z). \tag{2.9}$$

2°. *Функция* f *среди всех решений интерполяционной задачи* (2.7) *имеет минимальную норму.*

Доказательство. Согласно теореме В, в классе $H_2(D^{(+)})$ существует функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям (2.8). Но по лемме Г указанная функция допускает представление вида

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \qquad z\in D^{(+)},$$

где

$$f_1(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\} \ \text{ и } \ f_2(z) = B(z)\mathring{f}_2(z),\ \mathring{f}_2(z)\in H_2(D^{(+)}).$$

Поскольку $f_2^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 0$ $(k=1,\ 2,\cdots)$, то функция $f(z) = f_1(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\}$ также удовлетворяет условиям (2.8). Поскольку $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_p$, то по теореме 1 наша функция $f(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\}$ допускает разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(f)\,\bar{\Omega}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}\,d_k(f)\,\Omega_k(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k(z), \qquad z\in D^{(+)},$$

где

$$d_k(f) = (f,\ \bar{r}_k).$$

Единственность функции $f(z)$, подчиненной условиям (2.8), следует из леммы Д.

Утверждение 2° теоремы непосредственно вытекает из леммы Г.

Следствие. *Пусть $f(z)$ — любая функция из класса $H_2(D^{(+)})$. Тогда имеет место представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\Omega_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D^{(+)}.$$

(б). Лемма 2.5. *Пусть $f(z)\in H_2(D^{(+)})$, тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z),\quad c_k(f)=(f,\ \Omega_k), \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ \Omega_k(z) \tag{2.11}$$

сходятся абсолютно и равномерно вне замыкания $\overline{E}$ множества точек $E=\{1/\overline{\alpha}_k\}_1^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $F\subset C\overline{E}$ — некоторое замкнутое множество и $\rho=\rho(F,\ \overline{E})$ есть расстояние множеств F и $\overline{E}$. Поступая также, как и в лемме 2.4, для коэффициентов $(f,\ \Omega_k)$ получим оценку

$$|c_k(f)|=|(f,\ \Omega_k)|\leqslant p a(\delta,\ p)\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\overline{\alpha}_k)|, \tag{2.12}$$

где $f_*(z)$ определяется по формуле (2.6). Заметив теперь, что

$$\max_{z\in F}|r_k(z)|=C_\rho(\overline{E},\ F)<\infty,$$

так как $\sup\limits_{k\geq 1} s_k=p<\infty$, из (2.12) будем иметь

$$|c_k(f)\,r_k(z)|\leqslant C_0\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\overline{\alpha}_k)|,$$

где $C_0=pa(\delta,\ p)\,C_\rho(\overline{E},\ F)$. Отсюда применением неравенства Гельдера, в силу теоремы В получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)\,r_k(z)|\leqslant C_0\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\overline{\alpha}_k)|\leqslant$$

$$\leqslant pC_0\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k}\,|f_*^{(s_k-1)}(\alpha_k)|\leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}\,|f_*^{(s_k-1)}(\overline{\alpha}_k)|^2\Big\}^{1/2}<+\infty$$

и, тем самым, утверждение о сходимости ряда (2.12) доказано.

Обозначив теперь

$$k_0=\max_{\alpha_k\in F}\{k\},$$

очевидно будем иметь $k_0<+\infty$, и поэтому

$$\inf_{\substack{k>k_0+1\\ z\in F}} |z-\alpha_k|^n = \rho_{k_0} > 0 \qquad (n=1,\ 2,\cdots,\ p_k),$$

поскольку $\sup\limits_{k>1} p_k = p < \infty$. Но тогда из леммы A следует, что

$$\left| f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\right| \leqslant p\rho_{k_0}^{-1}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k}|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|. \tag{2.13'}$$

С другой стороны, пользуясь неравенством Гельдера, в силу теоремы B легко выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k}|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)| < +\infty.$$

Отсюда, в силу (2.13′), вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}$$

на F и, следовательно, утверждение о сходимости ряда (2.11).

Теорема 3. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, *то для любой функции* $f(z)\in \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ *справедливы разложения*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z), \qquad z\in C\overline{E}, \tag{2.13}$$

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k(z), \qquad z\in C\overline{E}, \tag{2.14}$$

где $c_k(f)$ *определяется единственным образом по формуле* (2.11).

Доказательство. Рассмотрим последовательность аналитических в $D^{(-)}$ функций

$$T_m(z)=\frac{1}{B(z)}\sum_{1}^{m} c_k(f)\, r_k(z) \qquad (1\leqslant m<\infty).$$

Согласно теореме 1

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m - f/B\| = 0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится в $D^{(-)}$ к некоторой функции $F(z)\in H_2(D^{(-)})$. $F(\infty)=0$ и почти всюду на окружности $|z|=1$ выполняется тождество

$$f(z)=B(z)\,F(z).$$

Тем самым справедливость разложения (2.13) установлена для множества $D^{(-)}\setminus\overline{E}$. Справедливость разложения (2.13) в остальных точках следует из теоремы 1 и леммы 2.5. Аналогично доказывается и (2.14).

§ 3. Базисы рациональных функций в ограниченных областях

3.1 (а). Пусть $G^{(+)}$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, а $G^{(-)}$ — дополнение замыкания области $G^{(+)}$.

Через $w = \Phi(z)$ $(z = \psi(w))$ обозначим функцию Римана, отображающую область $G^{(-)}$ на $D^{(-)}$ с условиями нормировки $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Пусть, далее, $\{\omega_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в области $G^{(-)}$. Обозначим через s_k и p_k кратность появления числа ω_k соответственно на отрезках $\{\omega_j\}_1^k$ и $\{\omega_j\}_1^\infty$. Определим другую последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$, полагая

$$\alpha_k(\omega) = [\overline{\Phi(\omega_k)}]^{-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.1}$$

Нашу последовательность отнесем к классу K_p, если при некотором $\delta > 0$ и $p < \infty$ выполняется условие

$$\sup_{k \geq 1} p_k = p, \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\Phi^{-1}(\omega_k)|^2) = \sum_{k=1}^\infty (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) < +\infty, \tag{3.3}$$

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\omega_j \neq \omega_k} \left| \frac{\Phi^{-1}(\omega_j) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_j)\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}} \right| = \inf_{k \geq 1} \prod_{\alpha_j(\omega) \neq \alpha_k(\omega)} \left| \frac{\alpha_j(\omega) - \alpha_k(\omega)}{1 - \alpha_j(\omega)\overline{\alpha_k(\omega)}} \right| \geqslant \delta. \tag{3.4}$$

(б). Функцию $f(z)$ отнесем к классу $E_2(G^{(+)})$, если она голоморфна в $G^{(+)}$ и $f(\varphi(w)) \in H_2(D^{(+)})$, где $\varphi(w)$ — риманова функция, отображающая $D^{(+)}$ на $G^{(+)}$. Класс $E_2(G^{(+)})$ является гильбертовым пространством с нормой

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(\zeta)|^2 |d\zeta| \right\}^{1/2},$$

где $f(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $f(z)$ на границе Γ области $G^{(+)}$. Аналогично определяется и класс $E_2(G^{(-)})$. Известно, что

$$[\psi'(w)]^{1/2} \in H_2(D^{(-)}) \quad \text{и} \quad [\Phi'(z)]^{1/2} \in E_2(G^{(-)}). \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение системы функций (см. [1])

$$m_k^{1/2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta - z} d\zeta \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.6}$$

$$\rho_k^{(1/2)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1/2}}{\Phi(z)} \overline{\Omega_k\left(\frac{1}{\overline{\Phi(z)}}\right)} \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.7}$$

которые составляют биортогональную на Γ систему в смысле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \rho_k^{(1/2)}(\zeta)\, m_p^{(1/2)}(\zeta)\, d\zeta = \delta_{p,k} = \begin{cases} 1 & p = k \\ 0 & p \neq k. \end{cases} \tag{3.8}$$

Там же доказывается, что $m_k^{(1/2)}(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ являются главными частями функций

$$\psi_k^{(1/2)}(z) = r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^{1/2}$$

в точках ω_k $(k = 1, 2,\cdots)$ и, тем самым, имеют вид

$$m_k^{(1/2)}(z) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}}{(z-\omega_k)^j} \quad (k = 1, 2,\cdots) \tag{3.9}$$

для точек $\omega_k \neq \infty$ и

$$m_k^{(1/2)}(z) = \sum_{j=0}^{s_k-1} b_j^{(k)} z^k \qquad \text{при } \omega_k = \infty.$$

Отметим также, что система рациональных функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой существенное обобщение известной системы полиномов Фабера (см. [1]).

(в). Рассмотрим голоморфную в $D^{(-)}$ функцию

$$\chi_{1/2}(w; z) = \frac{[\psi'(w)]^{1/2}}{\psi(w) - z}, \qquad z \in G^{(+)}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\{\omega_k\}_1^\infty \in K_p$, тогда при каждом $z \in G^{(+)}$ справедливо представление*

$$\chi_{1/2}(w; z) = [\psi'(w)]^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/2)}(\psi(w))\, m_k^{(1/2)}(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\chi_{1/2}(t; z)\, B(t)}{w - t}\, dt, \tag{3.10}$$

где ряд сходится равномерно относительно w внутри $D^{(-)}$ и по норме L_2 на окружности $|w| = 1$.

Доказательство. Сначала докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$ как функция от ζ, $\overset{*}{\chi}_{1/2}(\zeta; z) = 1/\zeta\overline{\chi_{1/2}(1/\overline{\zeta},\ z)} \in H_2 D^{(+)}$). В самом деле, обозначив $d(z) = \inf\limits_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z|$, для любого $|w| = \rho \geqslant 1$ будем иметь

$$|\psi(w) - z| \geqslant d(z). \tag{3.11}$$

Поэтому, учитывая (3.5), получаем

$$\lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi_{1/2}(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-2} \lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\psi'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < \infty,$$

откуда, ввиду (3.11), следует, что $\overset{*}{\chi}_{1/2}(\zeta;\ z) \in H_2(D^{(+)})$.

Теперь, применяя следствие теоремы 2, получим следующее разложение:

$$\chi^{*}_{1/2}(\zeta;\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(\zeta)\, \chi_{1/2}^{*(s_k-1)}(\alpha_k;\, z) + \frac{B(\zeta)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\chi^{*}_{1/2}(t;\, z)}{B(t)} \frac{dt}{t-\zeta}, \tag{3.12}$$

где ряд сходится равномерно в области $D^{(+)}$ и по норме L_2 на окружности $|\zeta| = 1$. Но если учесть, что

$$m_k^{(1/2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \overline{\frac{[\psi'(1/t)]^{1/2}}{t\,(\psi(1/t) - z)\,(t-\alpha_k(\omega))^{s_k}}}\, dt = \chi_{1/2}^{*(s_k-1)}(\alpha_k(\omega);\, z),$$

то переходя к сопряженным величинам в (3.12), учитывая, что $\overline{B(\zeta)} = B(1/\bar{\zeta})^{-1}$ и при $|\zeta| = 1$ $\chi^{*}_{1/2}(t;\, z) = t\chi_{1/2}(t;\, z)$, а также, заменяя $\bar{\zeta}^{-1}$ на w, получим (3.10).

В качестве следствия леммы 3.1 отметим следующее разложение ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/2)}(\zeta)\, m_k^{(1/2)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{B[\Phi(\zeta)]} \int\limits_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^{1/2}}{(\eta - z)(\Phi(\zeta) - \Phi(\eta))}\, d\eta, \tag{3.13}$$

которое является предельным случаем теоремы, установленной в работе [1] на тот случай, когда $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in K_p$.

3.2 (а). Теорема 4. *Если $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in K_p$, то любая функция $f(z) \in E_2(G^{(+)})$ допускает разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f)\, m_k^{(1/2)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t\,B(t)}\, r\left(\frac{1}{t};\, z\right), \quad z \in G^{(+)}, \tag{3.14}$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, \rho_k^{(1/2)}(\zeta)\, d\zeta \tag{3.14'}$$

и

$$r(w;\, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{B(t)\,[\psi'(t)]^{1/2}}{(\psi(t) - z)(1 - tw)}\, dt \in H_2(D^{(+)}). \tag{3.15}$$

Доказательство. Поскольку

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^{(+)},$$

то утверждение (3.14) следует из разложения (3.13). В свою очередь утверждение (3.15) вытекает из теоремы Рисса [4], если учесть, что при фиксированном $z \in G^{(+)}$, $B(t)[\psi'(t)]^{1/2}/(\psi(t) - z) \in L_2$.

Обозначим через $\lambda_2\{G^{(+)};\, \omega_k\}$ класс функций $f(z) \in E_2(G^{(+)})$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f[\varphi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{tB(t)}\,r(1/t;\ z)\,dt\equiv 0,\ z\in G^{(+)}. \tag{3.16}$$

Легко проверить, что $m_k^{(1/2)}(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ и после того, как докажем теорему 5, будет видно, что $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ есть замыкание системы функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$ по норме $L_2(\Gamma)$.

(б) Введем следующее определение. Кривую Γ отнесем к классу M и будем писать $\Gamma\in M$, если сингулярный оператор

$$S(\zeta_0;\ f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,\ \zeta_0\in\Gamma,\quad f(\zeta)\in L_2(\Gamma)$$

является ограниченным оператором в $L_2(\Gamma)$, то есть

$$\|S(\zeta_0;\ f)\|\leqslant K\|f\|,$$

где K — некоторое число, не зависящее от f.

В частности, как доказал Б. В. Хведелидзе [10], в класс M входят все кривые Ляпунова. Позже это включение было установлено для кривых более общей природы (см. [11]).

Нам понадобится следующая теорема [12].

Теорема Е. *Если $\Gamma\in M$, то для любой функции $f(\zeta)\in L_2(\Gamma)$ интегралы типа Коши*

$$\varphi_+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(+)},\quad \varphi_-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(-)}$$

обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_+(z)\in E_2(G^{(+)}),\quad \varphi_-(z)\in E_2(G^{(-)}),$
2. *Имеют место неравенства вида*

$$\|\varphi_+\|\leqslant A\|f\|,\quad \|\varphi_-\|\leqslant A\|f\|,$$

где A — постоянная, не зависящая от f.

Лемма 3.3. *Пусть $\Gamma\in M$ и $\{\omega_k\}_1^\infty\in K_p$. Тогда для любой функции $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ последовательность функций*

$$S_m(\zeta)=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\qquad (m=1,\ 2,\cdots) \tag{3.17}$$

является слабо сходящейся в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. На основании теоремы 4 в силу слабой компактности пространства L_2 достаточно установить ограниченность норм последовательности $\{S_m(\zeta)\}_1^\infty$ в $L_2(\Gamma)$.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха можем утверждать, что

$$\|S_m(\zeta)\|=\sup_{\substack{g\in L_2(\Gamma)\\ \|g\|\leqslant 1}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|.$$

Но из (3.17) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}g(\zeta)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\,D_k(g),$$

где
$$D_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\,d\zeta \quad (k=1,\,2,\cdots). \tag{3.18}$$

Теперь из (3.14′) и (3.7) имеем
$$C_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\,\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\Phi(\zeta)}\,\overline{\Omega_k\left(\frac{1}{\overline{\Phi(\zeta)}}\right)}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/2}\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|.$$

Как и при доказательстве леммы 2.4, здесь также получаем
$$|C_k(f)|\leqslant K\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{p_k-\nu}|f^{*(p_k-\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega))|,\ (k=1,\,2,\cdots), \tag{3.19}$$
где
$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\psi(1/\zeta))\,[\psi'(1/\zeta)]^{1/2}}{\zeta\,B(1/\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in H_2(D^{(+)}).$$

Для чисел $D_k(g)$, применяя теорему E и формулу (3.6), имеем
$$D_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\left\{\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\,r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^{1/2}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}\times$$
$$\times V\cdot p\int_\Gamma\frac{g(z)}{\zeta-z}\,dz\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}\,r_k(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\times \tag{3.20}$$
$$\times\int_\Gamma g^*[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}\,r_k(t)\,dt=g_1^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))+$$
$$+\,g_2^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))=G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega)),$$
где
$$g^*(z)=V\cdot p\cdot\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\in L_2(\Gamma),$$
$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{g[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t}\,\frac{dt}{t-z}\in H_2(D^{(+)}),$$
$$g_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{g^*[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t}\,\frac{dt}{t-z}\in H_2(D^{(+)})\ \text{и}\ G(z)=g_1(z)+g_2(z).$$

Теперь из (3.19) и (3.20), в силу неравенства Гельдера, имеем
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant K\sum_{k=1}^{m}\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{p_k-\nu}|f^{*(p_k-2\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega)|\times$$
$$\times\,|G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega)|\leqslant p^2K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2p_k-\nu-2s_k+1}\times\right.$$
$$\left.\times|f^{*(p_k-\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega))|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1}|G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant p^2 K \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1} |f^{*(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1)} |G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant p^2 K \|f^*\| \|G\| \leqslant p^2 K A \|f\|.$$

Лемма 2.4. *Пусть $\Gamma \in M$, тогда для каждой функции $f(\zeta) \in L_2(\Gamma)$ существуют функции $f_1(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$, $f_2(z) \in E_2(G^{(+)})$, $f_3(z) \in E_2(G^{(-)})$ такие, что*

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) + f_3(\zeta)$$

и

$$C_k(f) = C_k(f_1),$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) \rho_k^{(1/2)}(\zeta)\, d\zeta.$$

Доказательство мы здесь не приводим, так как оно проводится вполне аналогично, как и в лемме 7 работы [5].

Применяя теперь теорему о сильной сходимости биортогональных рядов [13], из лемм 3.4 и 3.3 получим теорему.

Теорема 5. *Пусть $\Gamma \in M$ и $\{\omega_k\}_1^\infty \in K_p$. Тогда для любой функции $f(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$ справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f)\, m_k^{(1/2)}(z), \qquad z \in G^{(+)}, \tag{3.21}$$

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) \rho_k(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.22}$$

где ряд сходится по метрике L_2 на кривой Γ.

Следствие. Пусть $f(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$ и выполняется условие теоремы 5. Тогда существует функция $F(z) \in E_2(G^{(-)})$, $F(\infty) = 0$ такая, что почти всюду на кривой Γ имеет место равенство

$$f(\zeta) = B[\Phi(\zeta)] F(\zeta), \qquad \zeta \in \Gamma, \tag{3.23}$$

и при $z \in G^{(-)}$ справедливо разложение

$$B[\Phi(z)] F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f)\, m_k^{(1/2)}(z). \tag{3.24}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность голоморфных в $G^{(-)}$ функций

$$T_m(z) = \frac{1}{B[\Phi(z)]} S_m(z).$$

Согласно теореме 5

$$\lim_{m\to\infty}\left\| T_m(\zeta)-\frac{f(\zeta)}{B[\Phi(\zeta)]}\right\|=0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ сходится равномерно внутри $G^{(-)}$ к некоторой функции $F(z)\in E_2(G^{(-)})$, $F(\infty)=0$ и выполняется (3.23) и (3.24).

Таким образом, функции класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ характеризуются тем свойством, что каждую функцию можно продолжить в $G^{(-)}$ в смысле, отмеченном в следствии. Иначе говоря, можно дать следующее определение класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, которое эквивалентно его первоначальному определению (см. [6], [7]).

Определение. Функция $f(z)$, определенная и голоморфная в $G^{(+)}\cup G^{(-)}\setminus\{\omega_k\}_1^\infty$, принадлежит классу $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:

1. $f(z)\in E_2(G^{(+)})$, $z\in G^{(+)}$,
2. $f(z)=B[\Phi(z)]F(z)$, $F(\infty)=0$, $F(z)\in E_2(G^{(-)})$,
3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне кривой Γ почти всюду совпадают.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы 5 любая функция* $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ *разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(f)\,m_k^{(1/2)}(z),\qquad z\in G^{(+)}\cup G^{(-)}\setminus\{\omega_k\}_1^\infty .$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю профессору М. М. Джрбашяну за постоянное внимание при выполнении работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.I.1975

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների բազիսության մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք $\{\alpha_k\}_1^\infty(|\alpha_k|<1)$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է Կառլեսոնի պայմանին։*

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ այդ պայմանն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad(k=1,2,\cdots)$$

(որտեղ s_k*-ն* α_k*-ի հանդես գալու կարգն է* $\{\alpha_j\}_1^k$*-ում և* $\sup_{k\geq 1} s_k<\infty$*) ինչպես նաև նրանց հետ բիօրթոգոնալ* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *սիստեմը* L_2*-ում կազմեն բազիս իրենց գծային թաղանթի մեջ։ Այս ապացուցվում է նման թեորեմներ Ժորդանյան կորերով սահմանափակված տիրույթի համար։*

H. M. NAIRAPETIAN. *On the basisity of certain biorthogonal systems in the complex domain* (sammary)

Let $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ be a sequence of complex numbers satisfying the Carleson condition. The paper provs that this condition is necessary and sufficient for the system of functions

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\ z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2, \cdots)$$

(where s_k is the multiplicity of α_k in $\{\alpha_j\}_1^k$ and $\sup s_k<\infty$), as well as for the system $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ biorthogonal to it in L_2, to form bases for their linear hulls. Further, analogous theorems are established for regions, bounded by rectifyable Jordan curves.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
4. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
5. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах классов $E_p (1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 171—184.
6. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961, 8—31.
7. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1—51.
8. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, 4, вып. 148, 1951, 69—107.
9. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, М., 1965.
10. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, XXIII, 1956, 3—158.
11. *Н. Н. Данилюк, В. Ю. Шелепов.* Об ограниченности в L_p сингулярного оператора с ядром Коши вдоль кривой ограниченного вращения, ДАН СССР, 124, № 3, 1967, 514—517.
12. *В. А. Пааташвили.* О принадлежности к классам E_p аналитических функций, представимых интегралом типа Коши, Труды Тбилисского мат. ин-та, X, II, 1972, 87—94.
13. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.