ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Ю. А. КУТОЯНЦ

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

1°. Концепция локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейства распределений, введенная Л. Ле Камом, оказалась довольно плодотворной в задачах проверки гипотез и оценивания параметров [1—5]; обзор работ на эту тему имеется в [2].

В большинстве работ, за исключением [6], рассматривались дискретные схемы наблюдений. Поэтому представляется интересным получить условия ЛАН для достаточно широкого класса процессов.

В настоящей работе приводятся условия ЛАН для процессов диффузионного типа [7] и рассматривается два примера, когда эти условия выполнены.

2°. На протяжении всей работы мы будем пользоваться определением ЛАН семейства мер для одномерного пространства параметров, которое мы приведем здесь, цитируя работу [6].

Пусть заданы:

1. Открытое множество $\Theta\subset R$ (множество значений параметра);

2. Произвольное множество $\mathrm{E}=\{\varepsilon\}\subset R$, имеющее предельную точку ε_0 (ε — аналог номера серии, по элементам ε осуществляется предельный переход);

3. Семейство вероятностных пространств $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, $\theta\in\Theta$, $\varepsilon\in\mathrm{E}$, где Ω — пространство элементарных событий, $F^{(\varepsilon)}$ — некоторая σ-алгебра на нем и $Q_\theta^{(\varepsilon)}$ — вероятностная мера на $F^{(\varepsilon)}$;

4. Семейство $F^{(\varepsilon)}$ измеримых случайных объектов $X^{(\varepsilon)}$ со значениями из измеримого пространства $(\mathbf{X}^{(\varepsilon)}, \mathbf{R}^{(\varepsilon)})$.

Распределение $P_\theta^{(\varepsilon)}$ случайного объекта $X^{(\varepsilon)}$, заданного на $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, задается формулой $P_\theta^{(\varepsilon)}(\Gamma)=Q_\theta^{(\varepsilon)}(X^{(\varepsilon)}\in\Gamma)$ для любого $\Gamma\in\mathbf{R}^{(\varepsilon)}$. Пусть $dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}/dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}(X^{(\varepsilon)})$ — производная Радона-Никодима абсолютно непрерывной компоненты меры $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ по мере $P_{\theta_1}^{(\varepsilon)}$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$. Будем говорить, что семейство $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta\in\Theta\}$ локально асимптотически нормально в точке $\theta_0\in\Theta$, если существует функция $\varphi_\varepsilon=\varphi(\theta_0,\varepsilon)$ такая, что для любого $u\in R$ справедливо представление

$$Z_\varepsilon(u)\equiv\frac{dP_{\theta_0+u\varphi_\varepsilon}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_0}^{(\varepsilon)}}(X^{(\varepsilon)})=\exp\left\{u\Delta_{\varepsilon,\theta_0}-\frac{1}{2}u^2+\psi_\varepsilon(u,\theta_0)\right\}, \tag{1}$$

где

$$L\{\Delta_{\varepsilon,\theta_0}|P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\} \to N(0, 1)^* \tag{2}$$

и

$$\psi_\varepsilon(u, \theta_0) \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 0. \tag{3}$$

3°. Пусть при каждом $\varepsilon \in E$ на Ω задано $\{F_t^{(\varepsilon)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ семейство неубывающих σ-подалгебр $F^{(\varepsilon)}$, т. е. $F_t^{(\varepsilon)} \subset F_s^{(\varepsilon)} \subset F^{(\varepsilon)}$ для любых $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$. Обозначим $\mathrm{H}_\theta^\varepsilon[0,1]$ пространство случайных функций $f_\varepsilon(t, \omega)$, $t \in [0,1]$, определенных на $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, $F_t^{(\varepsilon)}$ измеримых при каждом t, для которых с вероятностью $Q_\theta^{(\varepsilon)}$ единица

$$\|f_\varepsilon\|^2 = \int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t, \omega)\, dt < \infty. \tag{4}$$

Кроме того, пусть задана последовательность (по ε) винеровских процессов $w^{(\varepsilon)} = \{w_\varepsilon(t), F_t^{(\varepsilon)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Предположим, что случайный объект $X^{(\varepsilon)}$, для которого будут выводиться условия ЛАН, является процессом диффузионного типа [7] с дифференциалом

$$dX_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})\, dt + dw_\varepsilon(t),\ X_\varepsilon(0) = x_\varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{5}$$

где $S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)}) - B_{[0,1]} \times F^{(\varepsilon)}$ — измеримый функционал** при всех $\theta \in \Theta$ и $|S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})|^{1/2} \in \mathrm{H}_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$.

Для семейства мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, отвечающих решениям (5) при различных θ, справедлива следующая

Теорема. *Пусть U_{θ_0} — некоторая окрестность точки $\theta_0 \in \Theta$ и*

I. $S_\varepsilon(\theta', t, X^{(\varepsilon)}) \in \mathrm{H}_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$ *для* $\theta', \theta \in U_{\theta_0}$,

II. $\dot{S}_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)}) = \dfrac{\partial S_\varepsilon}{\partial \theta}(\theta, t, X^{(\varepsilon)}) \in \mathrm{H}_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$ *для* $\theta \in U_{\theta_0}$,

III. *существует функция* $\varphi_\varepsilon = \varphi(\theta_0, \varepsilon)$ *такая, что*

$$\varphi_\varepsilon \|\dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 1 \text{ при } \varepsilon \to \varepsilon_0,$$

IV. *при* $\varepsilon \to \varepsilon_0$

$$\|S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 0.$$

---

* Здесь $L\{\Delta_{\varepsilon,\theta_0}|P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\}$ — распределение функционала $\Delta_{\varepsilon,\theta_0}(X^{(\varepsilon)})$, когда распределение $X^{(\varepsilon)}$ есть $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$, $N(a, b^2)$ — гауссовский закон со средним a и дисперсией b^2.

** $B_{[0,1]}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0,1]$.

Тогда семейство мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ *локально асимптотически нормально в точке* θ_0 *и*

$$\Delta_{\varepsilon, \theta_0} = \varphi_\varepsilon \int_0^1 \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, t, X^{(\varepsilon)}) \left[dX_\varepsilon(t) - S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})\, dt\right]. \quad (6)$$

4°. Доказательство теоремы существенно опирается на следующую лемму о предельном поведении стохастического интеграла Ито.

Лемма. *Пусть* $f_\varepsilon(t, \omega) \in \mathrm{H}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}[0,1]$. *Если*

$$\|f_\varepsilon\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} b, \ b > 0 \ \textit{при} \ \varepsilon \to \varepsilon_0, \quad (7)$$

то

$$L\left\{\int_0^1 f_\varepsilon(t, \omega)\, dw_\varepsilon(t) \,|\, P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\right\} \longrightarrow N(0, b^2). \quad (8)$$

Доказательство. Для удобства индекс θ_0 у $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ будем опускать. Введем случайный процесс

$$g_\varepsilon(t, \omega) = \begin{cases} f_\varepsilon(t, \omega), & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1, & 1 < t \leqslant 1 + b^2 \end{cases}$$

и марковские моменты

$$\tau_\varepsilon = \inf\left\{t: \int_0^t g_\varepsilon^2(s, \omega)\, ds = b^2\right\}.$$

Очевидно $P^{(\varepsilon)}\{\tau_\varepsilon \leqslant b^2 + 1\} = 1$.

Стохастический интеграл

$$\int_0^t g_\varepsilon(s, \omega)\, dw_\varepsilon(s),$$

остановленный в момент $t = \tau_\varepsilon$, является гауссовской случайной величиной

$$\zeta_\varepsilon = \int_0^{\tau_\varepsilon} g_\varepsilon(s, \omega)\, dw_\varepsilon(s)$$

с параметрами $(0, b^2)$ [8]. Для любых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ имеем неравенство* [8]

$$P^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^1 f_\varepsilon(t, \omega)\, dw_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon\right| > \delta\right\} = P^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^{1+b^2} g_\varepsilon(t, \omega)[\chi_{\{t<1\}} - \right.\right.$$

* $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B.

$$-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}]\,dw_\varepsilon(t)\Big|>\delta\Big\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+P^{(\varepsilon)}\left\{\int\limits_0^{1+b^2} g_\varepsilon^2(t,\omega)\,|\chi_{\{t<1\}}-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}|\,dt>\gamma\right\}.$$

Обозначим событие

$$\left\{\int\limits_0^{1+b^2} g_\varepsilon^2(t,\omega)|\,\chi_{\{t<1\}}-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}|\,dt>\gamma\right\}$$

через A. Очевидно

$$P^{(\varepsilon)}\{A\}=P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon<1\}+P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon=1\}+P^{(\varepsilon)}\{A,\tau_\varepsilon>1\}.$$

По определению марковских моментов τ_ε имеем

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon<1\}=P^{(\varepsilon)}\left\{\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt-b^2>\gamma,\ \tau_\varepsilon<1\right\},$$

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon=1\}=0,$$

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon>1\}=P^{(\varepsilon)}\left\{b^2-\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt>\gamma,\ \tau_\varepsilon>1\right\}.$$

Объединяя все три вероятности, получаем

$$P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int\limits_0^1 f_\varepsilon(t,\omega)\,dw_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon\right|>\delta\right\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+$$

$$+P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt-b^2\right|>\gamma\right\}.$$

В силу (7) и произвольности δ и γ следует сходимость

$$\int\limits_0^1 f_\varepsilon(t,\omega)\,dw_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon$$

по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ к нулю. Лемма доказана.

Замечание. Настоящая лемма является обобщением теоремы об асимптотической нормальности нормированного стохастического интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^T f(t,\omega)\,dw(t)$$

при $T\to\infty$ [9]. С помощью замены времени $s=t\varepsilon$, $\varepsilon=T^{-1}$, $s\in[0,1]$ и используя автомодельность винеровского процесса $(\varepsilon^{1/2}w\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)=$

$=\tilde{w}_\varepsilon(s)$, где $\tilde{w}_\varepsilon(s)$ — некоторый другой винеровский процесс уже на $[0,1]$) можно записать

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(t,\omega)\,dw(t)=\int_0^1 f(s\varepsilon,\omega)\,d\tilde{w}_\varepsilon(s)=\int_0^1 f_\varepsilon(s)\,d\tilde{w}_\varepsilon(s). \qquad (9)$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, из условия (7) получаем достаточное условие асимптотической нормальности

$$\|f_\varepsilon\|^2=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t,\omega)\,dt\xrightarrow{P_{\theta_0}} b^2, \qquad (10)$$

более слабое, чем в [9].

5°. Доказательство теоремы. В силу условия I меры $P_\theta^{(\varepsilon)}$ в окрестности U_{θ_0} абсолютно непрерывны относительно винеровской $P^{(\varepsilon)}$, производная Радона-Никодима равна [7]

$$\frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP^{(\varepsilon)}}(X^{(\varepsilon)})=\exp\left\{\int_0^1 S_\varepsilon(\theta,t,X^{(\varepsilon)})\,dX_\varepsilon(t)-\frac{1}{2}\int_0^1 S_\varepsilon^2(\theta,t,X^{(\varepsilon)})\,dt\right\},$$

а исследуемое отношение правдоподобия $Z_\varepsilon(u)$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$, соответствующем решению (5) при $\theta=\theta_0$, имеет вид

$$\ln Z_\varepsilon(u)=\int_0^1[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dw_\varepsilon(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\|S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2.$$

Так как поведение нормы при $\varepsilon\to\varepsilon_0$ по лемме определяет предельные свойства стохастического интеграла, рассмотрим норму разности

$$\|S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})+u\varphi_\varepsilon\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2=$$

$$=u^2+u^2(\varphi_\varepsilon^2\|\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2-1)+2u\varphi_\varepsilon\int_0^1\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})\times$$

$$\times[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dt+$$

$$+\|S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot{S}_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2=u^2+\eta_\varepsilon(\theta_0,u,X^{(\varepsilon)}),$$

где из условий III, IV и неравенства Коши-Буняковского легко показать, что $\eta_\varepsilon(u,\theta_0,X^{(\varepsilon)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ стремится к нулю.

Представим стохастический интеграл в виде

$$u\Delta_{\varepsilon,\theta_0}+\int_0^1[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dw_\varepsilon(t),$$

где случайная величина

$$\Delta_{\varepsilon,\theta_0}=\varphi_\varepsilon\int_0^1\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})\,dw_\varepsilon(t)$$

по лемме асимптотически нормальна. Для любых $\delta>0$ и $\gamma>0$ имеем неравенство

$$P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^1[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dw_\varepsilon(t)\right|>\delta\right\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+$$

$$+P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\{\|S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2>\gamma\}. \tag{11}$$

В силу условия IV и произвольности δ и γ выражение справа в неравенстве (11) можно сделать как угодно малым. Следовательно

$$Z_\varepsilon(u)=\exp\left\{u\varphi_\varepsilon\int_0^1\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})\,dw_\varepsilon(t)-\frac{1}{2}u^2+\psi_\varepsilon(u,\theta_0,X^{(\varepsilon)})\right\}, \tag{12}$$

где $\psi_\varepsilon(u,\theta_0,X^{(\varepsilon)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ сходится к нулю. Теорема доказана.

6°. Рассмотрим два примера локально асимптотически нормальных семейств вероятностных мер.

Пример 1. Пусть $X^{(\varepsilon)}=\{X_\varepsilon(t,\omega,\theta),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, $\omega\in\Omega$, $\theta\in\Theta$, $\varepsilon\in(0,1]$ является решением диффузионного уравнения

$$dX_\varepsilon(t)=S(\theta,t,X_\varepsilon(t))\,dt+\varepsilon dw(t),\quad X_\varepsilon(0)=x, \tag{13}$$

а $X^{(0)}=\{X_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt}=S(\theta_0,t,X_0(t)),\quad X_0(0)=x. \tag{14}$$

Введем функцию

$$\varphi_\varepsilon=\varepsilon\|\dot S(\theta_0,X^{(0)})\|^{-1}=\varepsilon\left(\int_0^1\dot S^2(\theta_0,t,X_0(t))\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\dot S(\theta,t,x)=\frac{\partial S(\theta,t,x)}{\partial\theta},\ \|\dot S(\theta_0,X^{(0)})\|\neq 0.$$

Будем предполагать, что функция $S(\theta_0, t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x, а ее производная $\dot S(\theta, t, x)$ удовлетворяет условию Гёльдера по θ с некоторым показателем $\alpha > 0$ и Липшица по x,

$$|S(\theta_0, t, x) - S(\theta_0, t, y)| \leqslant L_1 |x - y|,$$
$$|\dot S(\theta_2, t, x) - \dot S(\theta_1, t, x)| \leqslant H(t, x) |\theta_2 - \theta_1|^{\alpha}, \tag{15}$$
$$|\dot S(\theta_0, t, x) - \dot S(\theta_0, t, y)| \leqslant L_2 |x - y|,$$

где $\|H(X^{(\varepsilon)})\| = O(\varepsilon^{-\alpha})$.

Покажем, что в указанных условиях семейство $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, отвечающее решениям (13), локально асимптотически нормально и

$$\Delta_{\varepsilon, \theta_0} = \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-1} \int_0^1 \dot S(\theta_0, t, X_0(t))\, dw(t).$$

Отношение правдоподобия $Z_\varepsilon(u)$ для проверки гипотезы $\theta = \theta_0 + u\varphi_\varepsilon$ против альтернативы $\theta = \theta_0$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$ при $\theta = \theta_0$ имеет вид

$$\ln Z_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 [S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, t, X_\varepsilon(t)) - S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t))]\, dw(t) -$$
$$- \frac{1}{2\varepsilon^2} \|S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2.$$

Рассмотрим норму разности в последней формуле. Используя разложение

$$S(\theta_0 + \Delta, t, x) = S(\theta_0, t, x) + \Delta \cdot \dot S(\theta_0 + q\Delta, t, x),$$

где $q = q(t, x)$ и $|q| < 1$ и условия гладкости (15), имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \|S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^2 =$$

$$= \frac{u^2 \varphi_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \|\dot S(\theta_0, X^{(0)}) - \dot S(\theta_0 + qu\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)})\|^2 \leqslant 2u^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \times$$
$$\times \|\dot S(\theta_0 + qu\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - \dot S(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 + 2u^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \|\dot S(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) -$$
$$- \dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^2 < 2u^{2+2\alpha} \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2-2\alpha} \cdot \|H(X^{(\varepsilon)})\|^2 \cdot \varepsilon^{2\alpha} +$$
$$+ 2u^2 L_2^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \int_0^1 |X_\varepsilon(t) - X_0(t)|^2\, dt.$$

Напомним, что

$$dX_\varepsilon(t) = S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t))\, dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x,$$
$$dX_0(t) = S(\theta_0, t, X_0(t))\, dt, \quad X_0(0) = x,$$

откуда

$$X_\varepsilon(t)-X_0(t)=\int\limits_0^t [S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t))-S(\theta_0, t, X_0(t))]\,dt+\varepsilon w(t)$$

и

$$M|X_\varepsilon(t)-X_0(t)|^2\leqslant 2M\left(\int\limits_0^t [S(\theta_0, s, X_\varepsilon(s))-S(\theta_0, s, X_0(s)]\,ds\right)^2+$$

$$+2\varepsilon^2 t\leqslant 2\varepsilon^2+2t\int\limits_0^t M[S(\theta_0, s, X_\varepsilon(s))-S(\theta_0, s, X_0(s))]^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2+2L_1^2\int\limits_0^t M[X_\varepsilon(s)-X_0(s)]^2\,ds.$$

По лемме Грануолла-Беллмана

$$M[X_\varepsilon(t)-X_0(t)]^2\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Следовательно условия III и IV теоремы выполнены и логарифм отношения правдоподобия можно представить в виде

$$\ln Z_\varepsilon(u)=u\,\|\dot S(\theta_0, X^{(0)}\|^{-1}\int\limits_0^1 \dot S(\theta_0, t, X_0(t))\,dw(t)-$$

$$-\frac{1}{2}u^2+\psi_\varepsilon(u, \theta_0, X^{(\varepsilon)}), \tag{16}$$

где $\psi_\varepsilon(u, \theta_0, X^{(\varepsilon)})$ сходится по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Пример 2. Пусть однородный возвратный диффузионный процесс $X(t)$ с эргодическим распределением $B(x)$ является решением стохастического уравнения

$$dX(t)=S(\theta, X(t))\,dt+dw(t),\ X(0)=0, \tag{17}$$

где $0\leqslant t\leqslant T$, $\theta\in\Theta$ и в некоторой окрестности U_{θ_0} точки θ_0 функция $\dot S(\theta, x)=\dfrac{\partial S(\theta, x)}{\partial\theta}$ удовлетворяет условию Гёльдера с положительным показателем α

$$|\dot S(\theta_1, x)-\dot S(\theta_2, x)|\leqslant H(x)\ |\theta_2-\theta_1|^\alpha,\ \theta_1, \theta_2\in U_{\theta_0}, \tag{18}$$

и при этом

$$\int H^2(x)\,dB(x)<\infty$$

и

$$E=\int \dot S^2(\theta_0, x)\,dB(x)<\infty. \tag{19}$$

Кроме того, пусть

$$\int_0^T \dot S^2(\theta, X(t))\,dt < \infty$$

при каждом $T < \infty$ с вероятностью единица.

Покажем, что семейство мер $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ локально асимптотически нормально в точке $\theta_0 \in \Theta$ и $\varphi_T = (ET)^{-1/2}$, а

$$\Delta_{T,\theta_0} = \varphi_T \int_0^T \dot S(\theta_0, X(t))\,dw(t). \tag{20}$$

Заменой времени $s = t\varepsilon$, $\varepsilon = T^{-1}$ уравнение (17) в силу автомодельности винеровского процесса (см. замечание) можно привести к виду

$$dX_\varepsilon(s) = S_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon(s))\,ds + d\bar w_\varepsilon(s),\quad X_\varepsilon(0) = 0,\quad s \in [0,1], \tag{21}$$

где $X_\varepsilon(s) = \varepsilon^{1/2} X(s\varepsilon)$ и $S_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon(s)) = \varepsilon^{1/2}\cdot S(\theta, X(s/\varepsilon))$. При этом условие III теоремы выполнено, так как сходимость

$$\varphi_\varepsilon^2 \|\dot S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 = \frac{1}{ET}\int_0^T \dot S^2(\theta_0, X(t))\,dt \to 1 \tag{22}$$

по усиленному закону больших чисел имеет место с вероятностью единица [10]. Разлагая $S(\theta, x)$ в окрестности θ_0 и используя (18), (19), нетрудно проверить условие IV теоремы. Тем самым доказано, что отношение правдоподобия представимо в виде

$$\frac{dP^{(T)}_{\theta_0+u\varphi_T}}{dP^{(T)}_{\theta_0}}(X^{(T)}) = \exp\left\{ u(ET)^{-1/2}\int_0^T \dot S(\theta_0, X(t))\,dw(t) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}u^2 + \psi_T(\theta_0, u, X^{(T)}) \right\}, \tag{23}$$

где $\psi_T(\theta_0, u, X^{(T)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(T)}$ сходится к нулю.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. Р. Левину за постановку задачи и Р. Ш. Липцеру за постоянное внимание к настоящей работе.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 29.IV.1974

Յու. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալությունը դիֆուզիոն պրոցեսների համար (*ամփոփում*)

Բերվում են լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալության (ԼԱՆ) պայմանները հավանականային չափերի ընտանիքի համար, որոնք առաջանում են ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներով։ ԼԱՆ-ը հնարավորություն է տալիս ապրոկսիմացնել նշված ընտանիքը որևէ կետի շրջակայքում Գաուսի հավանականական չափերի ընտանիքով։ Դիտարկվում են դիֆուզիոն պրոցեսների չափերի ընտանիքի ԼԱՆ-ի երկու օրինակ։

Yu. A. KUTOYANTS. *Local asymptotical Normality for the diffusion type processes* (summary)

Conditions of local asymptotical normality (LAN) for the family of measur induced by the realizations of solutions of stochastic differential equations are pr sented. LAN allows to appoximate a given family by the Gaussian family. Tv examples of LAN families are given for the diffusion processes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Le-Cam*. Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. Cali Publ. in Statistics, 3, 1960, 37—98.
2. *J. Hajek*. Locally asymptotic minimax and admissibility in estimation, Proc. 6 Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability, Univ. Calif. Press., 1972, 175 194.
3. *J. Hajek*. Characterization of limiting distributions of regular estimate, Zeits. fü Wahrsch. und verwandte Gebiete, 14, № 4, 1970, 323--330.
4. *G. Roussas*. Contiguity of probability measures, Cambridge Univ. Press., G, B 1972.
5. *Д. М. Чибисов*. Теорема о допустимых критериях и ее применение к одно асимптотической задаче проверки гипотез, Теория вероятностей и ее примене ния, 12, № 1, 1967, 96—111.
6. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*. Локальная асимптотическая нормалı ность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероятн. и ее при менения, XX, 2, 1975.
7. *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев*. Об абсолютной непрерывности мер, соответ ствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской, Изв АН СССР, сер. матем. 36, № 4, 1972, 847—889.
8. *И. И. Гихман, А. В. Скороход*. Стохастические дифференциальные уравнения Наукова думка, Киев, 1968.
9. *А. Ф. Тараскин*. Об асимптотической нормальности стохастических интеграло и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса, в сб. Математи ческая физика, 8, Наукова думка, Киев, 1970.
10. *Р. З. Хасьминский*. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессо и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений, Теория вероятностей и ее применения, 5, № 2, 1960, 196—214.