ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДАННЫМИ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Как известно, для того чтобы нехарактеристическая задача Коши для системы первого порядка с произвольными гладкими младшими членами была корректна, необходимо и достаточно, чтобы данная система была симметризуема (или регулярно гиперболична) (см. [1]—[3]). Для несимметризуемых систем корректность задачи Коши зависит от поведения младших членов.

Для слабо гиперболических (несимметризуемых) систем с характеристиками постоянной кратности в работах [4]—[6] даны необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши.

В [7] исследована задача Коши с весом для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости.

В настоящей заметке получены достаточные условия корректности задачи Коши для некоторых классов слабо гиперболических п. д. систем первого порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости.

Пусть S -- ограниченная область в R^n, а V — переменная полоса

$$V = V_t = \{\tilde{x} = (x_0, x),\ 0 \leqslant x_0 \leqslant t,\ x \in S\}.$$

Через S_t мы обозначим гиперплоскость

$$\{\tilde{x},\ \tilde{x} \in V,\ x_0 = t\},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ T > 0.$$

Пусть $\mathfrak{M}_l$ — множество дифференцируемых на $[0, T]$ вектор-функций $\mu = (\mu_1(t), \cdots, \mu_l(t))$, удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(+0) = 0,\ \dot{\mu}_i \equiv \mu_i'(t) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, l, \tag{1}$$

$$\dot{\mu}_i / \mu_i \leqslant \text{const}\, \dot{\mu}_{i+1} / \mu_{i+1}, \tag{2}$$

$$\mu_{i+1}(t) \leqslant \text{const}\, \mu_i(t),\ i = 1, \cdots, l-1. \tag{3}$$

Через $H_0^{p,q}(V)$ мы обозначим, как обычно, замыкание пространства бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю в окрестности S_0, в $H^{p,q}.\,L^{p,q}$ — пополнение бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями по норме

$$|D^{p,q} f|_1 = \int\limits_0^t |D^{p,q} f, S_\tau|\, d\tau, \tag{4}$$

где $|D^{p,q} f, S|$ — норма пространства $H^{p,q}(S)$.

Для п. д. операторов Q классов $C^{\beta,p}$ или $C^{\beta,\infty}$ (т. е. для операторов с символом $q(x_0, x, \zeta) \in C^{\beta,p,\infty}$, причем при $p = \infty$ дополнительно предполагается, что $q(\tilde{x}, \zeta)$ не зависит от x при больших $|x|$, (см. [10] — [12]) и порядка r введем обозначения

$$\|Q\|_n = \text{const} \cdot \max_{x,\, |\zeta|=1} |q_0(\tilde{x}, \zeta)|, \tag{5}$$

$$|Q|_n = \text{const} \cdot \max_{\substack{x,\, |\zeta|=1 \\ |\alpha| \leqslant p,\, |\beta| \leqslant \frac{n+1}{2}}} |D_x^\alpha D_\zeta^\beta\, q_0(\tilde{x}, \zeta)|, \tag{6}$$

где q_0 — главный символ оператора Q. Обозначим через Λ п. д. оператор с символом $\sqrt{1+|\zeta|^2}$. Рассмотрим задачу Коши

$$Mu = f,\ u|_{S_0} = 0, \tag{7}$$

где $M = \dfrac{\partial}{\partial t} - i\mathbf{H}\Lambda - B$, а $\mathbf{H}(\tilde{x}, D_x)$, $B(\tilde{x}, D_x)$ — матричные (размера $l \times l$) п. д. операторы класса $C^{1,p}$ нулевого порядка.

Будем полагать, что $\mathbf{H}(\tilde{x}, \zeta)$ при $x_0 > 0$, $(x, \zeta) \in S \times R^n \setminus 0$ подобна диагональной (или симметризуема), но при $x_0 = 0$ допустим нарушение этого условия.

Обозначим через $\mathbf{H}_l$, B_l, L_l матричные п. д. операторы с элементами

$$(\mathbf{H}_l)_{kj} = \begin{cases} 0, & k < j,\ j = i+2, \cdots, l \\ h_{kj} \equiv (\mathbf{H})_{kj} \text{ — для остальных } & k,\ j, \end{cases} \tag{8}$$

$$(B_l)_{kj} = \begin{cases} 0, & k < j,\ j = i+2, \cdots, l \\ b_{kj} \equiv (B)_{kj} \text{ — для остальных } & k,\ j, \end{cases} \tag{8'}$$

$$(L_l)_{kj} = \begin{cases} \mu_k \Lambda^{l-1-l}\, \delta_{kj}, & k,\ j = 1, \cdots, i+1 \\ \mu_{l+1} \Lambda^{l-k}\, \delta_{kj}, & k,\ j = i+2, \cdots, l, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$i = 0, \cdots, l-1,\ \mu_1(t) \equiv 1,\ (\mu_2, \cdots, \mu_l) \in \mathfrak{M}_{l-1}. \tag{10}$$

Справедлива

Теорема. *Пусть существует вектор-функция* $(\mu_1, \cdots, \mu_l) \in \mathfrak{M}_l$ *такая, что главные символы* $\widetilde{\mathbf{H}}_l(\tilde{x}, \zeta)$ *п. д. операторов*

$$L_l \mathbf{H}_l L_l^{-1},\ i = 1, \cdots, l-1$$

подобны диагональным в $V \times R^n \setminus 0$, *т. е. существуют матрицы* $N_l(\tilde{x}, \zeta)$ *такие, что*

$$\det N_i(\tilde{x}, \zeta) \neq 0 \text{ в } V \times R^n \setminus 0, \tag{11}$$

$$|N_i|_\Pi \leqslant \text{const} \tag{12}$$

и выполняются равенства

$$N_i \tilde{\mathbf{H}}_i = Q_i N_i, \; i=1, \cdots, l-1 \tag{13}$$

(здесь Q_i — некоторые диагональные матрицы).

Пусть также выполнены следующие условия:

$$|\mathbf{H}|_\Pi, \; |B|_\Pi, \; \mu_{i+1} |\dot{N}_i|_\Pi / \mu_{i+1}, \; \frac{|h_{kj}|_\Pi}{\mu_j} < \infty \tag{14}$$

здесь

$$i = 1, \cdots, l-1; \; k < j, \; j=2, \cdots, l, \; k = 1, \cdots, l.$$

Тогда если младшие члены оператора M удовлетворяют условиям

$$|b_{kj}|_\Pi \leqslant \text{const} \cdot \dot{\mu}_j, \; k < j, \; j = 1, \cdots, l, \tag{15}$$

то задача Коши (7) при $f \in L^{0, k+q}$ имеет единственное решение $u \in H_0^{1, k-1}$, причем $(1 \leqslant k \leqslant \bar{\mu})$

$$|D^{1, k-1} u, V| \leqslant \text{const} \int_0^t |D^{0, k+q} Mu, S_\tau| \, d\tau. \tag{16}$$

Замечание. Если операторы $\mathbf{H}$, B принадлежат классу $C^{\beta, \infty}$, то теорема остается справедливой, если в условиях (14), (15) сделать замену $|\cdot|_\Pi \to \|\cdot\|_\Pi$.

Замечание. Из (11) — (13) следует, что матрица $\mathbf{H}(\tilde{x}, \zeta)$ при $x_0 > 0$ подобна диагональной.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные задачи Коши

$$M_i u = f, \; u|_{S_0} = 0, \; i = 0, 1, \cdots, l-1, \tag{17}$$

где

$$M_i = \frac{\partial}{\partial t} - i \mathbf{H}_i \Lambda - B_i.$$

Так как по определению $\mathbf{H}_{l-1} = \mathbf{H}$, $B_{l-1} = B$, то при $i = l-1$ мы получаем исходную задачу Коши (7).

Корректность задачи Коши (17) мы докажем индукцией по $i = 0, \cdots, l-1$, при этом на последнем шаге индукции мы получим корректность задачи Коши (7).

Пусть $i = 0$, тогда преобразованием $w_0 = L_0 u$ система (17) приводится к регулярно гиперболической (симметризуемой) и корректность задачи Коши получается обычным методом [1], [2].

Рассмотрим теперь подробнее случай $i = 1$. Задачу Коши

$$M_1 u = f, \; u|_{S_0} = 0 \tag{18}$$

при достаточной гладкости f по пространственным переменным можно свести к задаче Коши

$$M_1 \hat{u} = \hat{f}, \; \hat{u}|_{S_0} = 0, \tag{19}$$

причем

$$\hat{f} = 0\,(\mu_2^{\gamma}),\ \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{20}$$

Действительно, пусть u_{j+1} — решения задач Коши

$$M_0\, u_{j+1} = f_j,\ u_{j+1}|_{S_0} = 0,\ j = 0, \cdots, p-1, \tag{21}$$

где

$$\hat{f} = f_p,\ f_0 \equiv f,\ f_j = (M_0 - M_1)\, u_j,\ j = 1, \cdots, p. \tag{22}$$

Если вычесть из (18) уравнения (21), $j = 0, \cdots, p-1$, то обозначив $\hat{u} = u - u_1 - \cdots - u_p$, получим (19). Оценка (20) непосредственно вытекает из неравенств $(s = 0, \cdots, l-2)$

$$|D^{0,\,k}\,(M_{s+1} - M_s)\ v,\ S| \leqslant \mathrm{const}\cdot \dot{\mu}_{s+2} |D^{0,\ k+1}\ v,\ S| \tag{23}$$

при $s = 0$.

Задачу Коши (19) преобразованием $w = L_1 \hat{u}$ приведем к системе вида (7), причем матрица $\mathrm{H}\,(\bar{x}, \zeta)$ подобна диагональной, но оператор B является неограниченным (по временной переменной, и поэтому система не является регулярно гиперболической (симметризуемой). Для этой системы обычным способом [1] получаем оценку

$$|D^{0,\,k}\, w,\ S|^2 \leqslant \int_0^t \left(c + c\,\frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}\right) |D^{0,\,k}\, w,\ S_\tau|\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t |D^{0,\,k}\, L_1 M_1\, \hat{u},\ S| \cdot |D^{0,\,k}\, w,\ S_\tau|\, d\tau. \tag{24}$$

Обращая это интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром при условии (20) (см. [8]), получаем оценку (16) с M_1 вместо M. Продолжая эту процедуру, мы получим на последнем шаге индукции $i = l-1$ оценку (16). Теорема существования вытекает из априорной оценки (16) (см., например, [9]).

Пример 1. Сведем уравнение

$$u_{tt} - \mu_2^2\,(t)\, u_{xx} - \mu_3^2\,(t)\, u_{yy} + a u_t + b u_x + c u_y = f \tag{25}$$

к системе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = f \tag{26}$$

$${}^t v = (u_t,\ u_x,\ u_y).$$

Введем матрицы

$$L_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

нетрудно проверить, что при условиях

$$\mu_2 \geqslant \mathrm{const}\cdot\mu_3 \geqslant 0,\ \frac{\dot\mu_3}{\mu_3} \geqslant \mathrm{const}\ \ \frac{\dot\mu_2}{\mu_2} \geqslant 0, \tag{28}$$

$$|B|_{\Pi} < \infty. \tag{28'}$$

Все условия (1)—(3), (11)—(14) теоремы выполнены и задача Коши для системы (26) с нулевыми данными на S_0 корректна, если

$$|b|_{\Pi} \leqslant \mathrm{const}\cdot\dot\mu_2(t),\ |c|_{\Pi} \leqslant \mathrm{const}\cdot\dot\mu_3. \tag{29}$$

Эти условия совпадают с известными условиями корректности задачи Коши для уравнения (25) (см., например, [7]—[9]).

В частности, в качестве функций μ_i можно выбрать такие:

$$\mu_2 = t^{\alpha},\ \alpha > 1,\ \mu_3 = \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}. \tag{30}$$

Пример 2. Уравнение

$$u_{ttt} + \beta_2(t)\,u_{ttx} + \beta_1 u_{txx} + \beta_0 u_{xxx} + \\ + a u_{tt} + b u_{tx} + c u_{xx} = f \tag{31}$$

сведем к системе

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

здесь ${}^t v_1 = (u_{tt},\ u_{tx},\ u_{xx})$.

Матрицы L_i введем так же как и в предыдущем примере. Пусть λ_i — корни уравнения

$$\lambda^3 - \beta_2\,\lambda^2 + \beta_2\,\lambda - \beta_0 = 0,$$

тогда для выполнения условий (1)—(3), (11)—(14) достаточно предположить существования функций $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$ таких, что

$$0 \leqslant \frac{\dot\mu_2}{\mu_2} \leqslant c\,\frac{\dot\mu_3}{\mu_3},\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant c\mu_2, \tag{33}$$

$$|\lambda_1 - \lambda_2| / \mu_2,\ |(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)| / \mu_3 > 0, \tag{34}$$

$$\frac{|D^{0,\,p}\lambda_i|}{\mu_2},\ \frac{|D^{1,\,p-1}\lambda_i|}{\dot\mu_2},\ \frac{|D^{1,\,p-1}(\lambda_i\lambda_j)|}{\dot\mu_3},\ \frac{|D^{0,\,p}(\lambda_i\lambda_j)|}{\dot\mu_3} < \infty. \tag{35}$$

Условия корректности (15) имеют вид

$$\frac{|D^{0,\,p}\,b|}{\dot\mu_2},\ \frac{|D^{0,\,p}\,c|}{\dot\mu_3} < \infty. \tag{36}$$

и совпадают с известными условиями корректности задачи Коши для уравнения (31) (см., например, [7]—[9]).

Институт математики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 18.II.1975

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդիրը առաջին կարգի թույլ հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ սիստեմների համար տվյալներով վերածման հիպերհարթության վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական սիստեմների համար։ Ապացուցվում է այդ սիստեմների համար լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ սիստեմի ցածր կարգի անդամը բավարարում է որոշակի պայմանի։

G. R. HOVHANISIAN. *The Cauchy's problem for the first order weakly hyperbolic pseudodifferential systems with data on the hyperplane of degeneration* (summary)

The Cauchy's problem for weakly hyperbolic systems with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. The correctness of the Cauchy's problem under some conditions is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Mizohata*. Systemés hyperboliques, J. Math. Soc. Japan, 11, 1959, 205—233.
2. *A. P. Calderon*. Integrales singulares y sus applicaciones a ecuaciones diferenciales hyperbolicas Cursos y seminorias di matematica, Fase. 3, Univ. of Buenos Aires, 1960.
3. *T. Kano*. A neccesary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for the first order hyperbolic system with multiple characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser A., 5: 2, 1969, 149—164.
4. *В. М. Петков*. Необходимые условия корректности задачи Коши для гиперболических систем с кратными характеристиками, УМН, XXVII, № 4, 1972, 221—222.
5. *В. М. Петков*. О задачэ Коши для гиперболических систем первого порядка с кратными характеристиками, ДАН ССР, 209, № 4, 1973, 795—797.
6. *M. Y. Demay*. Le problem de Cauchy pour les systemés hyperboliques a characteristiques double, C. R. Acad. Sci., Paris, 278: 11, 1974, 771—773.
7. *А. Б. Нерсесян*. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
8. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 2, 1968, 79—100.
9. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 149—165.
10. *М. С. Агранович*. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, XX, № 5, 1965, 3—120.
11. *М. С. Агранович*. Граничные задачи для систем псевдодифференциальных уравнений первого порядка, УМН, XXIV, № 1, 1969, 61—125.
12. *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг*. Алгебра псевдодифференциальных операторов, сб., „Псевдодифференциальные операторы", 9—62, М., 1967.