

Р. Э. МКРТЧЯН

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ АБСОЛЮТНО
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

При исследовании спектра самосопряженного оператора возникает вопрос (см. замечание к предложению 6 работы [1]): существует ли строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция, которая в каждой точке обладает конечной или бесконечной производной и такая, что ее производная равна бесконечности на множестве, порция которого на сколь угодно малом отрезке имеет мощность континуума?

Надо отметить, что были известны только примеры функций, которые обладали перечисленными свойствами, за исключением абсолютной непрерывности [2]. В этой работе строится абсолютно непрерывная функция (с явным аналитическим выражением), которая имеет вышеуказанные свойства.

Кроме того, с помощью этой функции строится другой пример абсолютно непрерывной функции, который является обобщением результата, содержащегося в работах [3, 4].

Как известно [3, 4], существует функция $f(t)$ со всюду определенной конечной производной, которая однако нигде не монотонна, в том смысле, что на сколь угодно малом интервале ее производная $f'(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Возникает вопрос: может ли функция $f(t)$ с такими свойствами быть к тому же абсолютно непрерывной?

В работе строится пример абсолютно непрерывной функции с указанными свойствами, которая имеет достаточно простую структуру. При этом оказывается, что построенная функция обладает даже ограниченной производной и явным аналитическим выражением на отрезке $[0,1]$.

1°. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ точки вида $\frac{p}{2^{2k}}$, где $p=1, 3, 5, \dots, 2^{2k}-1$, а $k=1, 2, 3, \dots$, и занумеруем их в последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ таким образом, чтобы индекс точки $x_n = \frac{p}{2^{2k}}$ был больше индекса точки $x_m = \frac{p'}{2^{2k'}}$ при $k > k'$, а если $k = k'$, то при $p > p'$. Итак, значению $k=1$ будут соответствовать две точки $x_1 = \frac{1}{2^2}$ и $x_2 = \frac{3}{2^2}$; значению $k=2$ будут соответствовать восемь точек $x_3 = \frac{1}{2^4}$, $x_4 = \frac{3}{2^4}$, $\dots$, $x_{10} = \frac{15}{2^4}$ и т. д. Если теперь допустить, что

$x_1, x_2, \dots, x_r$ — все те точки, которые соответствуют значениям $k=1, 2, 3, \dots, (l-1)$, то значению $k=l$, очевидно, будут соответствовать точки

$$x_{r+1} = \frac{1}{2^{2l}}, x_{r+2} = \frac{3}{2^{2l}}, \dots, x_{r+m} = \frac{2^{2l}-1}{2^{2l}},$$

где $m = 2^{2l-1}$.

На отрезке $[0, 1]$ возьмем функцию $F_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dx}{|x - x_n|^{1/2}}$, которая равна $\sqrt{x_n} + \sqrt{t - x_n}$ при $t > x_n$ и равна $\sqrt{x_n} - \sqrt{x_n - t}$ при $t \leq x_n$. Очевидно, что функция $F_n(t)$ монотонно возрастающая, всюду дифференцируемая, абсолютно непрерывная и, кроме того

$$F_n''(x_n) = +\infty, \text{Var } F_n(t) = A_n, \text{ где } A_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{|x - x_n|^{1/2}}.$$

Рассмотрим функцию $F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k F_k(t)$, где $\varepsilon_k = \frac{1}{5^k}$, которая монотонна и абсолютно непрерывна. В самом деле, монотонность функции $F(t)$ очевидна, а абсолютная непрерывность вытекает из соотношений

$$\text{mes } F(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{mes } F_k(M) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{Var}_{[0,1]} F_k(t) < +\infty,$$

где M — произвольное измеримое множество, а $F(M)$ — образ множества M , поскольку для произвольного множества M лебеговской меры нуль будем иметь $\text{mes } F(M) = 0$, а это значит, что $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция.

Нетрудно видеть, что функция $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sqrt{x_k} - \sum_{x_k > t} \varepsilon_k \sqrt{x_k - t} + \sum_{x_k < t} \varepsilon_k \sqrt{t - x_k}.$$

Докажем, что функция $F(t)$ в каждой точке имеет производную. Сперва рассмотрим точки x_k , $k=1, 2, 3, \dots$, в которых $F'(x_k) = +\infty$ $k=1, 2, 3, \dots$, потому что $F_k''(x_k) = +\infty$. Далее возьмем произвольную точку $t \neq x_k$, $k=1, 2, \dots$, и для каждого положительного h составим отношение

$$\begin{aligned} & \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \\ & = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k \sqrt{x_k} - \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \sqrt{x_k - t - h} + \sum_{x_k < t+h} \varepsilon_k \sqrt{t+h - x_k} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sqrt{x_k} + \sum_{x_k > t} \varepsilon_k \sqrt{x_k - t} - \sum_{x_k < t} \varepsilon_k \sqrt{t - x_k} = \\
 & = \frac{\sum_{x_k < t} \varepsilon_k (\sqrt{t + h - x_k} - \sqrt{t - x_k})}{h} + \frac{\sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k (\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h})}{h} + \\
 & + \frac{\sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k \sqrt{t + h - x_k} + \sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k \sqrt{x_k - t}}{h}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий предел:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sum_{x_k < t} \varepsilon_k (\sqrt{t + h - x_k} - \sqrt{t - x_k})}{h} = \\
 & = \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{x_k < t} \varepsilon_k \frac{\sqrt{t + h - x_k} - \sqrt{t - x_k}}{h} = \\
 & = \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{x_k < t} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{t + h - x_k} + \sqrt{t - x_k}};
 \end{aligned}$$

поскольку каждый член в ряде $\sum_{x_k < t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t + h - x_k} + \sqrt{t - x_k}}$ монотонно возрастает при $h \rightarrow +0$, то этот ряд монотонно возрастает и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sum_{x_k < t} \varepsilon_k (\sqrt{t + h - x_k} - \sqrt{t - x_k})}{h} = \frac{1}{2} \sum_{x_k < t} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{t - x_k}}. \quad (2)$$

Аналогично можно показать, что для любого положительного числа δ верно и следующее равенство:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \sum_{x_k > t+\delta} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} = \frac{1}{2} \sum_{x_k > t+\delta} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{x_k - t}}. \quad (3)$$

Для второго члена правой части равенства (1) можем написать следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{x_k - t}} & < \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} < \\
 & < \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{x_k - t}}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

потому что для каждого $x_k > t + h$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\sqrt{x_k - t}} < \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} < \frac{1}{\sqrt{x_k - t}}. \quad (5)$$

Если $h \rightarrow +0$, то первый и третий члены неравенства (4) стремятся соответственно к $\frac{1}{2} \sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}}$ и $\sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}}$.

Докажем теперь, что имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} = \frac{A(t)}{2}, \text{ где } A(t) = \sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}}. \quad (6)$$

Если $A(t) = +\infty$, то очевидно, что из неравенства (4) следует равенство (6). Если же $A(t) < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\sum_{t+\delta > x_k > t} \varepsilon_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k - t}} < \varepsilon \text{ и } A(t) > \sum_{x_k > t+\delta} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}} > A - \varepsilon. \quad (7)$$

В самом деле, так как каждый член в ряде $\sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}}$ положителен, то этот ряд можно переписать следующим образом: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t}}$, где $x_{k_i} > t$ и $k_i > k_{i-1}$ для каждого $i = 1, 2, \dots$. Далее, для $\varepsilon > 0$ существует номер k_{i_0} , такой, что $\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t}} < \varepsilon$. Из построения точек x_{k_i} вытекает, что если взять $\delta < \frac{x_{k_{i_0}} - t}{2^{2k_{i_0}}}$, то из принадлежности x_{k_i} интервалу $t < x_{k_i} \leq t + \delta$ будем иметь $i > i_0$ и, следовательно,

$$\sum_{t+\delta > x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}} < \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t}}.$$

Равенство (3) и неравенства (5), (7) показывают, что при достаточно малом h_0 для всех h из интервала $h_0 > h > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} &= \sum_{t+h < x_k < t+\delta} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} + \\ &+ \sum_{x_k > t+\delta} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} < \sum_{t < x_k < t+\delta} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x_k > t+\delta} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k - t}} + \varepsilon < 2\varepsilon + \frac{A(t)}{2}. \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \sum_{x_k > t+h} \varepsilon_k \frac{\sqrt{x_k - t} - \sqrt{x_k - t - h}}{h} \leq \frac{A(t)}{2},$$

и поэтому, привлекая неравенство (4), убеждаемся в справедливости равенства (6).

Для третьего члена правой части равенства (1) можем написать следующие неравенства:

$$\frac{\sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k \sqrt{t+h-x_k} + \sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k \sqrt{x_k-t}}{h} < \frac{2 \sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k}{\sqrt{h}}.$$

Так как функция $F(t)$ абсолютно непрерывна, то функция $A(t) = \sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ почти везде конечна, поэтому из неравенства (7) имеем

что величина $\sum_{t < x_k < t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ почти везде стремится к нулю при

$h \rightarrow +0$, при таких t , для которых $A(t)$ конечна. Но с другой стороны

$$\sum_{t < x_k < t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}} > \sum_{t < x_k < t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{h}} = \frac{\sum_{t < x_k < t+h} \varepsilon_k}{\sqrt{h}},$$

а это означает, что третий член правой части равенства (1) стремится к нулю для таких точек t , для которых $A(t)$ конечна.

Следовательно из равенств (1), (2) и (6) вытекает, что имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{2} \left(\sum_{x_k < t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t-x_k}} + \sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}} \right). \quad (8)$$

Аналогичным образом можно получить равенство (8), когда h стремится к нулю, оставаясь меньше нуля.

Так как $F'(x_k) = +\infty$ при $k=1, 2, \dots$, то при любом t равенство (8) можно заменить следующим равенством:

$$F'(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{x_k < t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t-x_k}} + \sum_{x_k > t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}} \right). \quad (9)$$

Теперь рассмотрим точки вида $\frac{p}{2^{2k-1}}$, где $p=1, 3, 5, \dots, 2^{2k}-1$, а

$k=1, 2, 3, \dots$, и занумеруем их в последовательность $y_1, y_2, \dots, y_p, \dots$ таким же образом, как это было сделано выше для точек $\{x_k\}$. Покажем, что для новых точек $\{y_p\}$ имеют место следующие неравенства:

$$F'(y_p) < +\infty, \quad p=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} F'(y_p) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x_k < y_p} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{y_p-x_k}} + \sum_{x_k > y_p} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-y_p}} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{x_k < y_p} (1/5^k) / (1/2^{\max\{p, k\}}) + \sum_{x_k > y_p} (1/5^k) / (1/2^{\max\{p, k\}}) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{2^p}{5^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} < +\infty. \end{aligned}$$

Аналогичным образом на отрезке $[0,1]$ построим функцию

$$\tilde{F}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p \sqrt{y_p} - \sum_{y_p > t} \varepsilon_p \sqrt{y_p - t} + \sum_{y_p < t} \varepsilon_p \sqrt{t - y_p},$$

монотонно возрастающую, абсолютно непрерывную и в каждой точке имеющую производные

$$\tilde{F}'(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{y_p < t} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{t - y_p}} + \sum_{y_p > t} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{y_p - t}} \right) \text{ и } \tilde{F}'(x_k) < +\infty, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Обозначим через

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{F'(x)} dx \text{ и } \tilde{\Phi}(t) = \int_0^t \frac{1}{\tilde{F}'(x)} dx.$$

Из равенств (9) и (11) вытекают неравенства

$$F'(t) > \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ и } \tilde{F}'(t) > \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k. \quad (12)$$

Следовательно функции $\Phi(t)$ и $\tilde{\Phi}(t)$ абсолютно непрерывные и монотонно возрастающие. В самом деле, монотонность очевидна, а абсолютная непрерывность следует из неравенств (12).

Докажем, что в каждой точке производная $F'(t) = \frac{1}{F'(t)}$ (аналогичным образом можно доказать, что и $\tilde{\Phi}'(t) = \frac{1}{\tilde{F}'(t)}$).

В самом деле, если $t = x_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, то имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_k + h) - \Phi(x_k)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_k}^{x_k+h} \frac{1}{F'(t)} dt \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \int_{x_k}^{x_k+h} \frac{V|t - x_k|}{\varepsilon_k} dt = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что в точке t_0 производная $F'(t_0) = +\infty$, тогда легко видеть, что существует последовательность точек x_{k_i} , $i = 1, 2, 3, \dots$, стремящихся к точке t_0 справа или слева, так что соответственно имеют место равенства

$$\sum_{(i)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_0}} = +\infty \text{ или } \sum_{(i)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{t_0 - x_{k_i}}} = +\infty.$$

Не нарушая общности, предположим, что точки x_{k_i} , $i = 1, 2, 3, \dots$ стремятся к t_0 с правой стороны, тогда легко видеть, что для любо-

го достаточно большого числа $A > 0$ существует $h(A) > 0$ такое, что при любом $t \in (t_0; t_0 + h(A))$ имеет место неравенство $\sum_{(i)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{|x_{k_i} - t|}} > A$.

Поэтому при положительном $h < h(A)$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{F'(t)} dt \leq \\ &\leq \frac{2}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{\sum_{(i)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t}}} dt \leq \frac{2}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{A} dt = \frac{2}{A}, \end{aligned}$$

отсюда и следует равенство

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0)}{h} = 0. \quad (13)$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0)}{h} = 0.$$

Так как $\sum_{(i)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_0}} = +\infty$, то существует последовательность стремящихся к нулю положительных чисел δ_{k_i} , $i = 1, 2, \dots$, такая, что имеет место $\sum_{(i)} \left(\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_0}} - \delta_{k_i} \right) = +\infty$ или, можно сказать, существует последовательность точек $t_{k_i} < t_0$, $i = 1, 2, 3, \dots$, стремящихся к t_0 и $\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_0}} - \delta_{k_i} = \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_{k_i}}}$, $i = 1, 2, \dots$. Из соотношения $\sum_i \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_{k_i}}} = +\infty$ вытекает, что для любого числа $A > 0$ существует номер $N(A)$ такой, что $\sum_{i=1}^{N(A)} \frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i} - t_{k_i}}} > A$, следовательно, для любого отрицательного h , удовлетворяющего условиям $t_{k_i} < t_0 + h$, $i = 1, 2, \dots, N(A)$, можем написать

$$\frac{\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{F'(t)} dt \leq \frac{2}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{A} dt = \frac{2}{A},$$

отсюда и из равенства (13) следует $\Phi'(t_0) = 0$.

Предположим, что в точке t^* $F'(t^*) < +\infty$, тогда для каждого $\varepsilon_n > 0$ существует окрестность $\Delta_n = (t^* - \delta_n; t^* + \delta_n)$, в которой функ-

ция $P_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{|t - x_k|}}$ непрерывна и значение функции $P_n(t^*) = F'(t^*) - \varepsilon_n^*$, где $0 < \varepsilon_n^* \leq \varepsilon_n'$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $|h| < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{F'(t^*)} - \varepsilon \leq \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)} dt \leq \frac{1}{F'(t^*)} + \varepsilon. \quad (14)$$

В самом деле, легко видеть, что для функции $S_n(t) = F'(t) - P_n(t)$ в точке t^* справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} S_n(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} F'(t) dt - \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} P_n(t) dt \right) = \\ &= F'(t^*) - P_n(t^*) = \varepsilon_n^*. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $F_n(t)$ в точке t^* для каждого $|h| < h_1(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)} dt &= \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{P_n(t) + S_n(t)} dt \leq \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{P_n(t)} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{P_n(t^*)} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{F'(t^*) - \varepsilon_n^*} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

так как ε_n^* достаточно мало при больших n , то получается неравенство

$$\frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)} dt \leq \frac{1}{F'(t^*)} + \varepsilon \quad \text{при } |h| < h_1(\varepsilon). \quad (15)$$

Теперь докажем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $h_2(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)} dt \geq \frac{1}{F'(t^*)} - \varepsilon \quad \text{при } |h| < h_2(\varepsilon). \quad (16)$$

В самом деле, так как ε_n^* стремится к нулю и $F_n(t^*)$ стремится монотонно возрастая к числу $F'(t^*) > 0$, когда n стремится к бесконечности, то для любого положительного $\varepsilon < [F'(t^*)]^2$ можно найти достаточно большой номер n_0 такой, что $0 < \frac{2\varepsilon_{n_0}^*}{P_{n_0}^2(t^*) - \varepsilon} \leq \varepsilon$. С другой стороны, легко видеть, что существует столь малое положительное число $h_2(\varepsilon)$, что имеют место неравенства

$$\frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} S_{n_0}(t) dt < 2\varepsilon^* \text{ при } |h| < h_2(\varepsilon) \text{ и}$$

$$[F'(t^*)]^2 \geq P_{n_0}^2(t) \geq P_{n_0}^2(t^*) - \varepsilon, \text{ если } t \in (t^* - h_2(\varepsilon); t^* + h_2(\varepsilon)).$$

Тогда при каждом $|h| < h_2(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)} dt &= \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{dt}{P_{n_0}(t) + S_{n_0}(t)} = \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{dt}{P_{n_0}(t)} - \\ &- \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{S_{n_0}(t) dt}{P_{n_0}(t)(P_{n_0}(t) + S_{n_0}(t))} \geq \frac{1}{F'(t^*)} - \frac{1}{h} \int_{t^*}^{t^*+h} \frac{S_{n_0}(t)}{P_{n_0}^2(t)} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{F'(t^*)} - \frac{2\varepsilon_{n_0}^*}{P_{n_0}^2(t^*) - \varepsilon} > \frac{1}{F'(t^*)} - \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. оценка (16) верна.

Из неравенств (15) и (16) следует неравенство (14), откуда и вытекает: $\Phi'(t^*) = \frac{1}{F'(t^*)}$.

Таким образом, для каждой точки $t \in [0, 1]$ получили выражение для производной

$$\Phi'(t) = \frac{1}{F'(t)} \left(\tilde{\Phi}'(t) - \frac{1}{\tilde{F}'(t)} \right).$$

Абсолютно непрерывная функция $G(t) = \Phi(t) - \tilde{\Phi}(t)$ в каждой точке отрезка $[0, 1]$ имеет ограниченную производную, модуль которой меньше, чем $\frac{1}{\sum_{(k)} \varepsilon_k}$, а из условий (9), (10) и (11) вытекает, что эта функция $G(t)$ не монотонна на любом сколь угодно малом отрезке. С другой стороны, очевидно, что эта функция имеет достаточно простое аналитическое выражение в виде следующего интеграла:

$$G(x) = 2 \int_0^x \left(\frac{1}{\sum_{(k)} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{|t - x_k|}}} - \frac{1}{\sum_{(p)} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{|t - y_p|}}} \right) dt.$$

2°. В этом пункте покажем, что $F(t)$ — строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция, которая в каждой точке обладает конечной или бесконечной производной и такая, что ее производная равна бесконечности на множестве, порция которого на сколь угодно малом отрезке имеет мощность континуума.

Оказывается, что построенная нами в п. 1° функция $F(t)$ обладает всеми перечисленными свойствами. Для этого нам достаточно

доказать, что производная $F'(t)$ обращается в бесконечность на некотором множестве, порция которого на любом сколь угодно малом интервале имеет мощность континуума, поскольку все остальные условия уже были проверены в п. 1°. Для доказательства рассмотрим произвольный интервал $(a, b) \subset [0, 1]$ и укажем множество $M \subset (a, b)$, имеющее мощность континуума и такое, что производная $F'(t) = +\infty$ для всех $t \in M$. В силу того, что множество построенных точек $\{x_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 1]$, мы можем на первом шагу из интервала (a, b) выбросить интервал $\Delta_1 = (x_{k_1}; x_{l_1})$ так, чтобы удовлетворить следующему условию: $\text{mes } \Delta_1 > \frac{b-a}{2}$ и (a, b) и Δ_1 не имели бы

общих концов. После первого шага на интервале (a, b) останутся два интервала, которые обозначим через δ_2, δ_3 и будем считать, что δ_2 находится левее интервала δ_3 . На втором шаге из интервалов δ_2 и δ_3 выбросим соответственно интервалы $\Delta_2 = (x_{k_2}; x_{l_2})$ и $\Delta_3 = (x_{k_3}; x_{l_3})$, которые удовлетворяют следующим условиям: интервалы Δ_i и δ_i не имеют общих концов, $\text{mes } \Delta_i > \frac{1}{2} \text{mes } \delta_i$ и $\Delta_i \cap \Delta_i^* \neq \emptyset$ $i=1, 2, 3$, где

$$\Delta_i^* = (x_{k_i} - \varepsilon_{k_i}^2; x_{l_i} + \varepsilon_{l_i}^2).$$

Предположим теперь, что после j -го шага на интервале (a, b) имеются 2^j интервалов, которые обозначены через δ_{2^j+p} ($p=0, 1, 2, \dots, 2^j-1$), причем так, что интервал δ_{2^j+p} находился левее интервала δ_{2^j+q} , если только $p < q$ ($p, q=0, 1, 2, \dots, 2^j-1$).

На $j+1$ -ом шагу из интервалов δ_{2^j+p} ($p=0, 1, \dots, 2^j-1$) выбросим соответственно интервалы $\Delta_{2^j+p} = (x_{k_{2^j+p}}; x_{l_{2^j+p}})$ ($p=1, 2, \dots, 2^j-1$) так, чтобы удовлетворялись следующие условия: Δ_{2^j+p} и Δ_{2^j+q} ($p=0, 1, \dots, 2^j-1$) не имеют общих концов,

$$\text{mes } \Delta_{2^j+p} > \frac{1}{2} \text{mes } \delta_{2^j+p} \quad (p=0, 1, 2, \dots, 2^j-1), \quad (17)$$

$$\Delta_{2^j+2p} \cap \Delta_{2^j-1+p}^* \neq \emptyset, \quad \Delta_{2^j+2p+1} \cap \Delta_{2^j-1+p}^* \neq \emptyset, \quad (18)$$

где $\Delta_{2^j-1+p}^* = (x_{k_{2^j-1+p}} - \varepsilon_{k_{2^j-1+p}}^2; x_{l_{2^j-1+p}} + \varepsilon_{l_{2^j-1+p}}^2)$.

Нетрудно убедиться, что после счетного числа шагов оставшееся множество M будет иметь лебеговскую меру нуль и мощность континуума, поскольку все выброшенные интервалы были без общих концов, а из условий (17) следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^l-1} \text{mes } \Delta_{2^l+p} = b-a.$$

Нам остается доказать, что $F'(t) = +\infty$ для всех $t \in M$. В первом пункте уже было доказано, что $F'(t) = +\infty$ в каждом из концов интервалов Δ_i ($i=1, 2, 3, \dots$). Предположим теперь, что точка $t \in M$

и $t \neq x_{k_i}$; x_{l_i} ($i=1, 2, 3, \dots$), тогда существует бесконечное число множеств $\gamma_{i_p} = \Delta_{i_p}^* - \Delta_{i_p}$ ($p=1, 2, \dots$), содержащих точку t .

В самом деле, предположим противное, т. е. что существует такой номер p_0 , что точка t не принадлежит ни одному из множеств $\gamma_{i_{p_0}}, \gamma_{i_{p_0}+1}, \dots$, тогда если из интервала (a, b) выбросим вместо интервалов $\Delta_{i_{p_0}}, \Delta_{i_{p_0}+1}, \dots$ соответственно интервалы $\Delta_{i_{p_0}}^*$; $\Delta_{i_{p_0}+1}^*$; $\dots$, которые не содержат точки t , то полученное множество очевидно будет содержать точку t , но, с другой стороны, из условий (18) нетрудно заключить, что полученное множество принадлежит такому множеству, которое состоит из конечного числа точек x_{k_i}, x_{l_i} ($i=1, 2, \dots, p_0-1$), среди которых нет точки t . Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Из сказанного следует, что точка t принадлежит каждому из множеств $\gamma_{i_1}; \gamma_{i_2}; \dots$.

Так как множество γ_i состоит из следующих двух интервалов: $(x_{k_{i_1}} - \varepsilon_{k_{i_1}}^2, x_{k_{i_1}}]$ и $[x_{l_i}; x_{l_i} + \varepsilon_{l_i}^2)$, то, не нарушая общности, можно считать, что точка t принадлежит бесконечному числу интервалов

$$(x_{k_{i_p}} - \varepsilon_{k_{i_p}}^2; x_{k_{i_p}}] \quad (p=1, 2, \dots).$$

Из неравенства

$$\frac{\varepsilon_{k_{i_p}}}{\sqrt{t - x_{k_{i_p}}}} > 1 \quad (p=1, 2, \dots)$$

и равенства (9) следует, что $F'(t) = +\infty$. Таким образом, доказано, что $F'(t) = +\infty$ во всех точках множества M .

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.XII.1973

Ռ. Ջ. Մկրտչյան. Մի փառի բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների կառուցումը (ամփոփում)

Նշվում է որոշակի հատուկ հատկություններով օժտված բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների կառուցման էֆեկտիվ եղանակ: Մասնավորապես ասացվում է նախկինում հայտնի Перено-ի օրինակի ընդհանրացումը:

R. Z. MKRTCHIAN. Construction of certain special absolutely continuous functions (summary)

An efficient way of construction of absolutely continuous functions with certain special properties is indicated.

These considerations yield a generalization of known example due to Pereno.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. О ядре спектра общего самосопряженного оператора, и о некоторых признаках лебеговости или сингулярности его спектра, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 1, 1972, 3—13.
2. Г. П. Толстов. Метод Перрона в интеграле Даниэля, Матем. сб., 8 (50), 1940, 155.
3. E. W. Hobson. The theory of functions of a real variable, Volume two, New-York, 1927, 412—421.
4. Pereno. Giorn. di Mat., XXXV, 1897, 132.