ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ СИСТЕМ РАДЕМАХЕРА И УОЛША

В данной работе рассматриваются системы $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ (определения см. ниже), которые являются в некотором смысле обобщениями, соответственно, систем Радемахера и Уолша.

Наши рассмотрения основаны на одной идее А. М. Олевского (см. [1], лемму 2 об отображениях, см. также работу [2], в которой содержится замечание о том, что автором используется „предельный" случай отображений, введенных им в [1]). Это позволяет свойства систем Радемахера и Уолша, связанные со сходимостью рядов по этим системам (в смысле почти всюду, по мере, в L_p, суммирование, $\cdots$), полностью переносить на системы $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$.

Как известно, в литературе под названием „система Уолша" фигурируют три ортонормированные полные системы, отличающиеся друг от друга лишь нумерацией внутри „пачек". Следуя обзорной работе [4], мы их будем называть системами Уолша, Уолша-Пэли и Уолша-Качмажа (определение см. в [4], стр. 148—150).

Из этих систем более подробно исследовалась система Уолша-Пэли.

Сравнение результатов по системам Уолша-Пэли и Уолша-Качмажа (см. [4], стр. 173) показывает, что перестановки внутри „пачек" уже заметно влияют на свойства соответствующих систем. Однако, как будет показано в данной работе, в вопросах, связанных со сходимостью в том или ином смысле, системы Уолша и Уолша-Пэли (а на самом деле некоторый класс переставленных систем) ведут себя одинаково.

Пусть X и Y — пространства с мерой, и дано отображение α: $X \to Y$ такое, что для любого измеримого $E \subset Y$ прообраз $\alpha^{-1}(E)$ также измерим и

$$|\alpha^{-1}(E)| = |E|.$$

При помощи этого отображения определим оператор A: $Af = f \circ \alpha$, где f — вещественнозначная функция, определенная на Y.

Следующие свойства оператора A очевидны:

$$A(f+g) = Af + Ag,\ A(f \cdot g) = Af \cdot Ag,\ Ac = c\ (c = \text{const}),$$

$$|Af| = A|f| \text{ и, вообще:}$$

а) для любого n

$$AF(f_1, f_2, \cdots, f_n) = F(Af_1, Af_2, \cdots, Af_n),$$

где $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ — произвольная n-мерная функция, определенная на $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} f_i(Y)$.

b) Если f измерима, то Af также измерима.

Это сразу вытекает из определения измеримости и равенства (1).

c) Если f интегрируема, то Af также интегрируема, причем

$$\int_Y f\,dy = \int_X Af\,dx.$$

Это свойство также легко проверить, учитывая равноизмеримость f и Af.

Из свойств a) и c) вытекают свойства

d) если $f \in L_p(Y)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то $Af \in L_p(X)$, причем

$$\|f\|_{L_p(Y)} = \|Af\|_{L_p(X)}$$

и

e) если $f \in S(Y)$, то $Af \in S(X)$, причем

$$\|f\|_{S(Y)} = \|Af\|_{S(X)},$$

где $S(X)$ — пространство почти всюду на X конечных функций g с нормой Фреше

$$\|g\|_{S(X)} = \int_X \frac{|g|}{1+|g|}\,dx.$$

Определение. Систему функций $\{\tilde{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенных на пространстве X, назовем подобной системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенной на Y, если для любого n

$$\tilde{f}_n = Af_n$$

почти всюду на X.

В случае, когда α является взаимно-однозначным, сохраняющим меру отображением, то системы $\{f_n\}$ и $\{\tilde{f}_n\}$ называются изоморфными.

Из свойств оператора A непосредственно вытекает, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ сходится почти всюду на Y (на множестве меры $\lambda > 0$, равномерно, абсолютно, по норме L_p, по мере, суммируется линейным методом T) к функции f, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{f}_n$ сходится почти всюду на X (на множестве меры $\lambda > 0$, равномерно, абсолютно, по норме L_p, по мере, суммируется линейным методом T) к функции $\tilde{f} = Af$.

Как известно из работ А. М. Олевского (см. [1], [2], [3]), такие обобщения систем Хаара играют существенную роль в ряде задач общей теории полных ортонормированных систем и базисов в функциональных пространствах.

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные обобщения систем Радемахера и Уолша.

Пусть $n=2^m+k$, где $m=[\log_2 n]$, $0\leqslant k\leqslant 2^m-1$. Через Δ_n обозначим полуинтервал $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$. Система $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

1) $|\Delta_n|=2^{-[\log_2 n]}$, 2) $\Delta_{2n}\cup\Delta_{2n+1}=\Delta_n$, 3) $\Delta_{2n}\cap\Delta_{2n+1}=\varnothing$.

Пусть далее $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств из [0,1], удовлетворяющих аналогичным условиям

1) $|T_n|=2^{-[\log_2 n]}$, 2) $T_{2n}\cup T_{2n+1}=T_n$, 3) $T_{2n}\cap T_{2n+1}=\varnothing$.

Определим сперва отображение α: $T_1\to[0,1]$: пусть

$$t\in T_1\cap T_{n_1}\cap T_{n_2}\cap,\cdots,\ \text{где } n_m=2^m+\sum_{i=1}^{m} p_i 2^{m-i},$$

$p_i=0$ или 1 $(i=1, 2,\cdots)$ и не зависит от m $(m=1, 2,\cdots)$, тогда

$$x=\alpha(t)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i\, 2^{-i},\ \text{т. е. } \alpha(t)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_i}.$$

Справедлива следующая

Лемма. *Для любого измеримого* $E\subset[0,1]$ $\alpha^{-1}(E)$ *также измеримо и* $|E|=|\alpha^{-1}(E)|$.

Доказательство. Пусть $U=[0,1]\cap V$, где V — открытое множество. Тогда U можно представить в виде

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_i},\ \text{где } \Delta_{n_i}\cap\Delta_{n_j}=\varnothing \ \text{при } i\neq j.$$

Отсюда

$$\alpha^{-1}(U)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\alpha^{-1}(\bar{\Delta}_{n_i})=\bigcup_{i=1}^{\infty}T_{n_i}.$$

Последнее равенство справедливо, так как сумма $\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}$ вместе с каждым полуинтервалом Δ_{n_i} содержит соседний полуинтервал слева (если левый конец Δ_{n_i} не совпадает с нулем) и соседний полуинтервал справа (если правый конец Δ_{n_i} не совпадает с единицей).

Но так как $|\Delta_n|=|T_n|$ для любого n и $T_{n_i}\cap T_{n_j}=\varnothing$ при $i\neq j$, то получаем

$$|\alpha^{-1}(U)| = \left|\bigcup_{l=1}^{\infty} T_{n_l}\right| = \sum_{l=1}^{\infty} |T_{n_l}| = \sum_{l=1}^{\infty} |\Delta_{n_l}| = |U|.$$

Следовательно, для любого измеримого $E\subset[0,1]$ внешняя мера

$$m^*[\alpha^{-1}(E)] \leqslant \inf_{\bigcup\limits_k T_{n_k}\supset\alpha^{-1}(E)} |\bigcup_k T_{n_k}| = \inf_{U\supset E} |\alpha^{-1}(u)| = \inf_{u\supset E} |U| = |E|,$$

где inf в правой части неравенства берется по всем открытым $U\supset E$.

Отсюда сразу вытекает, что

$$m_*[\alpha^{-1}(E)] = 1 - m^*[\alpha^{-1}([0,1]\setminus E)] \geqslant |E|,$$

т. е. $\alpha^{-1}(E)$ измеримо и $|\alpha^{-1}(E)| = |E|$.

Лемма полностью доказана.

Определим на T_1 ортонормированные системы функций $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$:

$$\tilde{r}_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t\in \bigcup\limits_{l=0}^{2^n-1} T_{2(2^n+l)} \\ -1 \text{ при } t\in \bigcup\limits_{l=0}^{2^n-1} T_{2(2^n+l)+1} \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

$$\tilde{w}_0(t)\equiv 1,\ \tilde{w}_n(t) = \tilde{r}_m(t)\prod_{l=1}^{m}[\tilde{r}_{m-l}(t)]^{p_l} \quad (n=1,\ 2,\cdots),$$

где $n=2^m+\sum\limits_{l=1}^{m} p_l 2^{m-l}$, $p_l=0$ или 1, $m=[\log_2 n]$.

Нетрудно проверить, что почти всюду на T_1

$$\tilde{r}_n = r_n\circ\alpha,\ \tilde{w}_n = w_n\circ\alpha \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{1}$$

где $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система Радемахера и $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша-Пэли. Из равенств (1) и доказанной леммы следует, что системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ подобны, соответственно, системам Радемахера и Уолша-Пэли.

Кроме того оказывается, что при соответствующем выборе системы множеств $\{T_n\}$, определенные выше системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ совпадают почти всюду на [0,1] с некоторыми подсистемами и перестановками системы Уолша.

Рассмотрим какие именно перестановки и подсистемы системы Уолша подобны системам Уолша-Пэли и Радемахера.

Как известно, любое натуральное n единственным образом можно представить в виде конечной суммы

$$\sum_{i=0}^{m} q_i 2^i, \text{ где } q_m=1,\ q_i=0 \text{ или } 1\ (i=0,\ 1,\cdots,\ m-1),\ m=[\log_2 n].$$

Вектор $\{q_0, q_1, \cdots, q_m, 0, 0, \cdots\}$, соответствующий числу n, обозначим через $\bar{n}$.

Суммой двух векторов $\bar{x} = \{x_k\}$ и $\bar{y} = \{y_k\}$ назовем вектор $\bar{z} = \{z_k\}$, где $z_k = |x_k - y_k|$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ назовем линейно независимой, если любая конечная сумма $\sum_{l=1}^{l} \bar{n}_{k_l}$ отлична от нуля (т. е. не равна вектору $\{0, 0, \cdots\}$).

Возьмем некоторую подсистему $\{w_{n_k}\}$ системы Уолша-Пэли*.

Теорема 1. *Система $\{w_{n_k}\}$ является подобной системе Радемахера в том и только в том случае, когда последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейно независима.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следующих соображений. Пусть для некоторых n_{k_l}

$$\sum_{l=0}^{l} \bar{n}_{k_l} = 0.$$

Тогда для тех же n_{k_l} будем иметь

$$\prod_{l=0}^{l} w_{n_{k_l}} \equiv 1$$

почти всюду на $[0, 1]$, так как в данном произведении каждая функция системы Радемахера участвует четное число раз. А это значит, что система $\{w_{n_k}\}$ не подобна системе Радемахера (аналогичное равенство для системы Радемахера не может иметь места).

Для доказательства достаточности удобными являются следующие обозначения:

$$\{\varphi\}^0 = \{t: \varphi(t) > 0\}, \ \{\varphi\}^1 = \{t: \varphi(t) < 0\}.$$

Пусть теперь $\{n_k\}$ линейно независима. Для того чтобы доказать, что система $\{w_{n_k}\}$ подобна системе Радемахера достаточно показать, что для любого l

$$\left|\bigcap_{k=0}^{l} \{w_{n_k}\}^{i_k}\right| = 2^{-l-1}, \tag{2}$$

где $\{i_k\}_{k=0}^{l}$ — произвольный набор нулей и единиц.

После чего, при соответствующем подборе множеств T_n $(n = 1, 2, \cdots)$ система $\{\bar{r}_n\}$ почти всюду на $[0, 1]$ совпадает с системой $\{w_{n_k}\}$.

Покажем сперва, что для любых n и n' $(n \neq n')$ и для любых i и i'

---

* Результаты этой работы доложены на семинаре по теории функций в Институте математики АН Арм.ССР в апреле 1973 г.

$$\{w_n\}^i \cap \{w_{n'}\}^{i'} = \{w_n\}^i \cap \{w_m\}^j, \tag{3}$$

где $j = |i - i'|$, $\overline{m} = \overline{n} + \overline{n}'$ и $w_m = w_n \cdot w_{n'}$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функции системы Уолша-Пэли такие, что φ_1 и φ_2 являются произведениями различных функций системы Радемахера и

$$w_n = \varphi_1 \cdot \varphi_3, \; w_{n'} = \varphi_2 \cdot \varphi_3, \; w_m = \varphi_1 \cdot \varphi_2.$$

Тогда

$$\{w_n\}^i = \{\varphi_1 \cdot \varphi_3\}^i = (\{\varphi_3\}^0 \cap \{\varphi_1\}^i) \cup (\{\varphi_3\}^1 \cap \{\varphi_1\}^{|i-1|}),$$

$$\{w_{n'}\}^{i'} = \{\varphi_2 \cdot \varphi_3\}^{i'} = (\{\varphi_3\}^0 \cap \{\varphi_2\}^{i'}) \cup (\{\varphi_3\}^1 \cap \{\varphi_2\}^{|i'-1|}),$$

$$\{w_m\}^j = \{\varphi_1 \cdot \varphi_2\}^j = (\{\varphi_1\}^i \cap \{\varphi_2\}^{i'}) \cup (\{\varphi_1\}^{|i-1|} \cap \{\varphi_2\}^{|i'-1|}).$$

Отсюда сразу вытекает соотношение (3)*, что позволяет при доказательстве равенства (2) ограничиться случаем, когда функции w_{n_k} и $w_{n_{k'}}$ взяты из различных „пачек" системы Уолша-Пэли. А в этом случае равенство (2) становится очевидным.

С л е д с т в и е. Любая перестановка любой подсистемы Радемахера подобна системе Радемахера.

Заметим, что в случае, когда определенная выше система $\{\overline{w}_n\}$ почти всюду на [0, 1] совпадает с некоторой перестановкой системы Уолша, то отображение α становится взаимно-однозначным, сохраняющим меру.

Теорема 1 позволяет описать класс всех перестановок системы Уолша, которые изоморфны системе Уолша-Пэли. А именно, верна

Т е о р е м а 2. *Перестановка $\{w_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ системы Уолша-Пэли является изоморфной системе Уолша-Пэли в том и только в том случае, когда последовательность $\{n_{2^m}\}_{m=0}^{\infty}$ линейно независима и для любого k*

$$w_{n_k} = w_{n_{2^m}} \cdot w_{n_l},$$

где $k = 2^m + l$, $0 \leqslant l \leqslant 2^m - 1$.

С л е д с т в и е. Система Уолша-Качмажа не изоморфна системе Уолша-Пэли.

Т е о р е м а 3. *Система Уолша $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ изоморфна системе Уолша-Пэли* **.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что система $\{\varphi_{2^n}\}_{n=0}^{\infty}$ подобна системе Радемахера (функции этой системы взяты из различных „пачек" системы Уолша-Пэли).

Тогда система $\{\overline{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\overline{\varphi}_0 \equiv 1$,

$$\overline{\varphi}_n = \varphi_{2^m} \prod_{l=1}^{m} [\varphi_{2^{m-l}}]^{p_l} \text{ при } n = 2^m + \sum_{l=1}^{m} p_l\, 2^{m-l},$$

---

* В случае, когда одна из φ_i (i = 1, 2, 3) тождественно равна 1, доказательство (3) более упрощается.

** При корректуре, автору стало известно, что подобные результаты получены Ф. Шиппом в работе „О некоторых перестановках рядов по системе Уолша" (находится в печати).

($p_i = 0$ или 1) будет подобной системе Уолша-Пэли. Далее, так как функция φ_{2^m} имеет 2^m точек разрыва и множества точек разрыва φ_{2^m} и φ_{2^k} не пересекаются при $m \neq k$, причем в точках разрыва одной из них другая отлична от нуля, то $\bar{\varphi}_n$ будет иметь n точек разрыва. Следовательно, согласно теореме Бирнса-Свика (см. [5]) система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает всюду на $[0, 1])$ с системой Уолша, т. е. система Уолша также изоморфна системе Уолша-Пэли. Теорема 3 показывает, что свойства системы Уолша-Пэли, связанные со сходимостью в том или ином смысле, переносятся и на систему Уолша.

Приведем некоторые из них. Пэли доказал (см. [6]), что система Уолша-Пэли является базисом в L_p $(1 < p < \infty)$, а Биллардом было доказано (см. [7]), что система Уолша-Пэли является системой сходимости почти всюду, т. е. из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ вытекает сходимость почти всюду ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n$.

Теорема 4. *Система Уолша является системой сходимости почти всюду и базисом в* L_p $(1 < p < \infty)$.

В заключение автор благодарит Р. Н. Овсепяна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет
Поступила 14.III.1974

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Ռադեմախերի և Ուոլշի սիստեմների մի ընդհանրացման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքի հիմնական արդյունքը կազմում է 3-րդ թեորեմը, որը պնդում է, որ Ուոլշի և Ուոլշ-Պելիի սիստեմները իզոմորֆ են։ Այստեղից հետևում է, որ Ուոլշի սիստեմը օժտված է մետրիկական նույնպիսի հատկություններով, ինչպես և Ուոլշ-Պելիի սիստեմը։

A. V. BAKSHETZIAN. *On a generalisation of Rademacher and Walsh systems* (summary)

The main result of the paper states that the Walsh and the Walsh-Paley systems are isomorphic.

This implies that the metrical properties of the Walsh-Paley system are shared by the Walsh system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Олевский*. Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, ДАН СССР, 139, № 3, 1961, 545—548.
2. *А. М. Олевский*. О локализации особенностей Карлемана на компактах меры нуль, ДАН СССР, 202, № 1, 1972.
3. *А. М. Олевский*. Ряды Фурье и функции Лебега, УМН, 22, № 3, 1967, 237—239.
4. *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн*. Ряды по системе Уолша и их обобщение, Итоги науки, сер. мат., Математический анализ, 1970, М., 1971, 147—202.
5. *J. S. Byrns, D. A. Swick*. Instant Walsh functions SIAM Rev., 12, № 1, 1970, 131.
6. *R. Peley*. A remarkable sistem of orthogonal functions, Paroc London Math. Soc., 34, 1932, 241—279.
7. *P. Billard*. Sur la convergence dresque partout des séries presque de Fourier-Walsh des functions de l'espace L^2 (0, 1), Studil math., 28, № 3, 1967, 363—388.