ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН

О ПОВЕДЕНИИ ВДОЛЬ ХОРД НЕПРЕРЫВНЫХ, НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть D означает круг $|z|<1$ и Γ —окружность $|z|=1$. Положим $D(\zeta)=\{z; |z-\rho\zeta|<1-\rho\}$, где $\zeta\in\Gamma$, а ρ—некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $\frac{1}{2}<\rho<1$. Обозначим через $l(\zeta, \varphi)$ сегмент круга $D(\zeta)$, оканчивающийся в точке $\zeta\in\Gamma$ и образующий угол φ; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ с диаметром круга D в точке ζ. Подобласть круга D, ограниченная двумя хордами $l(\zeta, \varphi_1)$ и $l(\zeta, \varphi_2)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\right)$ и границей круга $D(\zeta)$, обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. В случае, если $f(z)$ имеет предел, когда $z\to e^{i\theta}$, $z\in l(\zeta, \varphi)$, этот предел будем обозначать через $f(\theta, \varphi)$. Отрезок $l(\zeta, \varphi)$ назовем отрезком Жюлиа для функции $f(z)$, если для любых φ_1 и φ_2 $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\right)$ функция принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Для произвольных точек $z_1, z_2\in D$ обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неэвклидовое расстояние между z_1 и z_2. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$ называют P-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\{z; \sigma(z, z_{n_k})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений (см. [1]), сегмент $l(\zeta, \varphi)$ назовем P-сегментом для $f(z)$, если $l(\zeta, \varphi)$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$.

Пусть M есть произвольное борелевское множество на Γ. Положим $\sigma=\bigcup\limits_{\zeta\in M} D(\zeta)$.

Пусть далее $cap_\alpha E$ означает α-емкость множества E, а $cap_0 E$—логарифмическую емкость множества E.

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $U(z)\geqslant 0$ *и непрерывная в* D *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\sigma}(1-r)^{\alpha}[U(re^{i\theta})]^2\, r dr d\theta < +\infty \qquad (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{1}$$

Тогда существует такое подмножество $E \subset M$, $cap_{\alpha} E = 0$, *что в каждой точке* $\zeta \in M - E$ *имеем*

$$\int\limits_{l(\zeta,\varphi)} U(re^{i\theta})\,|dz| < +\infty \qquad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)) \tag{2}$$

для почти всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Замечание 1. В случае, когда σ есть единичный круг, а M— единичная окружность, теорема 1 доказана в статье [3].

Теорема 2. *Пусть функция* $F(z)$ *непрерывна в* D *и имеет там непрерывные частные производные первого порядка. Если*

$$\iint\limits_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\,|\operatorname{grad} F|^2\, r dr d\theta < +\infty \quad (0 \leqslant \alpha < 1), \tag{3}$$

то

1°. *на* M *существует такое множество* E, $cap_{\alpha} E = 0$, *что в каждой точке* $\zeta \in M - E$

$$\int\limits_{l(\zeta,\varphi)} |\operatorname{grad} F|\,|dz| < +\infty \text{ для почти всех } \varphi;\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \tag{4}$$

2°. *существуют конечные пределы* $F(\theta, \varphi)$ *для всех* φ, *для которых интеграл (4) конечен. Эти пределы равны между собой.*

Теорема 3. *Пусть* M — *произвольное борелевское множество на* Γ. *Если функция* $w = f(z)$, *мероморфная в* D, *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\sigma}(1-r)^{\alpha}[\delta(r,\theta)]^2\, r dr d\theta < +\infty \quad \left(0 \leqslant \alpha < 1, \ \delta(r,\theta) = \frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right) \tag{5}$$

то

1°. *существует такое подмножество* $E \subset M$, $cap_{\alpha} E = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, *что в каждой точке* $\zeta \in M - E$ *имеем*

$$\int\limits_{l(\zeta,\varphi)} \delta(r,\theta)\,|dz| < +\infty \quad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)) \tag{6}$$

для почти всех φ; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$;

2°. *существуют пределы* $f(\theta, \varphi_1)$ *и* $f(\theta, \varphi_2)$, $f(\theta, \varphi_1) = f(\theta, \varphi_2)$ *для всех* $\theta \in M$ *и* $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *для которых интеграл (6) конечен;*

3°. *для любых* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $\zeta \in M - E$, *для которых*

$$\int\limits_{l(\zeta, \varphi)} \delta(r, \theta)\,|dz| = +\infty \quad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)),$$

сегменты $l(\zeta, \varphi)$ *являются сегментами Жюлиа функции* $f(z)$.

Замечание 2. Теорема 5 доказана в статье [2] в частном случае, когда $\alpha = 0$.

В нижеследующем доказательстве используются схемы из [2] и [3].

Доказательство теоремы 1: Пусть $e^{i\omega} \in M$ и $z = re^{i\theta} \in D$. Положим

$$h(r, \theta) = \begin{cases} U(r, \theta), & z \in \sigma \\ 0 & z \in D - \sigma \end{cases}.$$

Обозначим через $\psi \equiv \psi(r, \theta) = \pi - \arg(re^{i\theta} - 1)$, где $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$ и $\frac{\pi}{2} < \arg(re^{i\theta} - 1) < \frac{3}{2}\pi$. Отсюда находим, что $\operatorname{tg}\psi = \frac{r \sin\theta}{1 - r\cos\theta}$ и

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}[\arg(re^{i\theta} - 1)] = \frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Im}\left\{\log\frac{1}{re^{i\theta} - 1}\right\} = \frac{r(\cos\theta - r)}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$H(\omega, r, \theta) = h(r, \omega + \theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \quad (8)$$

Она измерима для любого фиксированного ω как функция от r и θ $(0 < r < 1, |\theta| < \pi)$.

Из (7) следует, что $H(\omega, r, \theta) \geqslant 0$ в S, $\{re^{i\theta};\ \cos\theta > r\}$ и $H(\omega, r, \theta) \leqslant 0$ в $D - S$. Обозначим через $I_1(\omega) = \iint\limits_{(S)} H(\omega, r, \theta)\,dr d\theta$, $I_2(\omega) = -\iint\limits_{(D-S)} H(\omega, r, \theta)\,dr d\theta$. По определению $I_1(\omega) \geqslant 0$, $I_2(\omega) \geqslant 0$ для $e^{i\omega} \in M$. Сначала докажем, что $I_2(\omega) < +\infty$ для любого $e^{i\omega} \in M$. Введем функцию $I(\omega)$:

$$I(\omega) \equiv \iint\limits_{D} H(\omega, r, \theta)\,dr d\theta = I_1(\omega) - I_2(\omega). \quad (9)$$

Пусть C_r — окружность $|z| = r$ $(0 < r < 1)$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{r(r - \cos\theta)}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \leqslant \frac{r}{r+1} < r \quad \text{для} \quad re^{i\theta} \in C_r - S.$$

Согласно (7) и (8) имеем

$$-H(\omega, r, \theta) \leqslant rh(r, \theta + \omega), \quad re^{i\theta} \in C_r - S. \quad (10$$

Оценим сверху интеграл $I_2(\omega)$, используя неравенство Коши-Буняковского и условие (1).

Имеем

$$I_2(\omega) = -\int_0^1 dr \int_{C_r - S} H(\omega, r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^1 dr \int_{C_r - S} rh(r, \omega + \theta)\, d\theta =$$

$$= \iint_{(D-S)} h(r, \omega + \theta)\, rdrd\theta \leqslant \iint_D h(r, \theta + \omega)\, rdrd\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\iint_D (1-r)^a [h(r, \theta + \omega)]^2\, rdrd\theta\right\}^{1/2} \left\{\iint_D \frac{rdrd\theta}{(1-r)^a}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\iint_\delta (1-r)^a [U(r, \theta)]^2 rdrd\theta\right\}^{1/2} \left\{\iint_D \frac{rdrd\theta}{(1-r)^a}\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Заметим, что длина хорды $l(\omega, \varphi) \equiv l(e^{i\omega}, \varphi)$ равна

$$\lambda(\varphi) = (2 - 2\rho)\cos\varphi \text{ и не зависит от } \omega. \tag{11}$$

Положим для $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} U(r, \theta)\, |dz|, \quad z = re^{i\theta} \in l(\omega, \varphi), \tag{12}$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L(\omega, \varphi) \cos\varphi d\varphi. \tag{13}$$

В статье [2] при $U(r, \theta) = \delta(r, \theta)$ доказано, что

A) $X(\omega)$ измерима по Борелю.

B) $I(\omega) > (2\rho - 1)\, X(\omega)$ для всякой $e^{i\omega} \in M$.

Единственное свойство функции $\delta(r, \theta)$, которое используется при доказательстве ее непрерывности. Так как в нашем случае функция $U(r, \theta)$ непрерывна, то следовательно имеет место (A) и (B). Докажем, что множество $E = \{e^{i\omega},\ e^{i\omega} \in M,\ X(\omega) = +\infty\}$ имеет

$$cap_\alpha E = 0 \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

Действительно, допустим напротив, что $cap_\alpha E > 0$. По предположению множество E должно содержать замкнутое подмножество F, $cap_\alpha F > 0$. Тогда на F существует такое распределение единичной массы, что потенциал

$$V_\alpha(r, \theta) = \begin{cases} \int\limits_F \frac{d\mu_\alpha(\omega)}{|re^{i\theta}-e^{i\omega}|^\alpha}, & 0<\alpha<1 \\ \int\limits_F \log\frac{1}{|re^{i\theta}-e^{i\omega}|}\,d\mu_0(\omega), & \alpha=0 \end{cases} \tag{14}$$

ограничен: $|V_\alpha(r, \theta)| < V_\alpha < +\infty$ при $|z| < +\infty$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_\alpha(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} \log\frac{1}{|re^{i\theta}-e^{i\omega}|}\,d\mu_\alpha(\omega). \tag{15}$$

Ясно, что $|U_\alpha(r, \theta)| \leqslant U_\alpha < +\infty$. Положим

$$g_\alpha(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{1}{(1-re^{i(\theta-\omega)})^\alpha}\,d\mu_\alpha(\omega). \tag{16}$$

В силу предположения $|g_\alpha(r, \theta)| \leqslant V_\alpha < +\infty$.

В статье [3] доказано (леммы 1 и 2), что

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial r}\right)^2 (1-r)^{-\alpha} r\,dr\,d\theta < +\infty \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

С другой стороны, имеем

$$r\frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r} = -\int\limits_F \frac{\partial}{\partial\theta}\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega})\,d\mu_\alpha(\omega).$$

Обозначим

$$Q(\omega, r, \theta) \equiv H(\omega, r, \theta-\omega) = -h(r, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega}) =$$

$$= \frac{rh(r, \theta)\{\cos(\theta-\omega)-r\}}{1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2}, \qquad z = re^{i\theta} \in D, \quad e^{i\omega} \in F,$$

Легко видеть, что

$$h(r, \theta)\,r\frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r} = \int\limits_F Q(\omega, r, \theta)\,d\mu_\alpha(\omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_D dr\,d\theta \int\limits_F Q(\omega, r, \theta)\,d\mu_\alpha(\omega) = \iint\limits_D h(r, \theta)\,r\frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r}\,dr\,d\theta. \tag{17}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу I, получим

$$
I^2 \leqslant \iint_D (1-r)^\alpha [h(r,\theta)]^2 r dr d\theta \iint_D (1-r)^{-\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha (r,\theta)}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta =
$$
$$
= \iint_\sigma (1-r)^\alpha [U(r,\theta)]^2 r dr d\theta \iint_D (1-r)^{-\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha (r,\theta)}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta < +\infty. \tag{18}
$$

С другой стороны, $I(\omega) = \iint_D h(r, \theta+\omega) \frac{\partial}{\partial \theta} \{-\arg(re^{i\theta} - 1)\} dr d\theta =$ $= \iint_D h(r,\theta') \frac{\partial}{\partial \theta'} \{-\arg(re^{i\theta'} - e^{i\omega})\} dr d\theta' = \iint_D Q(\omega, r, \theta)\, dr d\theta$. Откуда, с учетом (17), будем иметь

$$
I = \int_F I(\omega)\, d\mu_\alpha(\omega).
$$

Последнее ведет к утверждению, что $I = +\infty$, так как по предположению для всех $e^{i\omega} \in F$, $I(\omega) = +\infty$. Это противоречит неравенству (18) и доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Положив в теореме 1 $U(r,\theta) = |\operatorname{grad} F|$ и замечая, что $|\operatorname{grad} F|$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, мы устанавливаем справедливость утверждения 1° теоремы 2. Конечность величины $L(\omega, \varphi)$ означает, в частности, существование определенного конечного предела $F(\omega, \varphi)$. В силу теоремы 1, на множестве M существует такое подмножество E_1, $cap_\alpha E_1 = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, что для любого $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ функция $L(\omega, \varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $L(\omega, \varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, в которых $F(\omega, \varphi_1) \neq F(\omega, \varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1 \neq \varphi_2$, φ_1, $\varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка называется точкой неопределенности для $F(z)$. Согласно теореме Багемила [4], множество точек неопределенности для произвольной функции $f(z)$ не более чем счетно. Поскольку счетное множество точек на Г имеет нулевую α-емкость для любого α, $0 \leqslant \alpha < 1$, то теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Полагая в теореме 1 $U(r,\theta) = \delta(r, \theta)$, мы получаем утверждение 1°. Утверждение 2° доказывается точно так же, как и во второй теореме. Пусть для некоторых $\theta \in M$ и $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$
\int_{l(\zeta, \varphi_0)} \delta(r,\theta) |dz| = +\infty, \qquad \zeta = e^{i\theta}, \quad z \in l(\zeta, \varphi_0).
$$

Выберем значения $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ таким образом, чтобы

$$\int\limits_{l(\zeta, \varphi_i)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty \quad \left(i = 1,\ 2,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

и рассмотрим область $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Согласно лемме 5 из статьи Цудзи [5], если $f(z)$ не принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ три различных значения и $\int\limits_{l(\zeta, \varphi_i)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty$, $i = 1, 2$, то $\int\limits_{l(\zeta, \varphi)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty$ для всех φ; $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Поэтому $f(z)$ должна принимать в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Точно так же, как и в статье [6] доказывается, что отрезки $l(\zeta, \varphi_0)$, для которых $\int\limits_{l(\zeta, \varphi_0)} \delta(r, \theta)\,|dz| = +\infty$ являются P-сегментами для $f(z)$.

З а м е ч а н и е 4. Теорему 3 можно усилить, если вместо условия (5) написать следующее условие

$$\iint\limits_{\sigma} (1-r)^{\alpha} [\delta(r, \theta)]^{4}\, r\,dr\,d\theta < +\infty. \tag{5'}$$

Действительно из условия (5) вытекает, что

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{l(\omega, \varphi)} \delta^2(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta < +\infty, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Но если функция $f(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле, то ее асимптотическое значение в точке $\zeta = e^{i\omega} \in M$ совпадает с угловым предельным значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = n^{i\omega}$. Следовательно $f(z)$ имеет угловые предельные значения на множестве M, всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества E_1, $cap_{\alpha} E_1 = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Выражаю свою благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и ценные указания.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 21.1.1974

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Շրջանում անընդհատ, անընդհատորեն դիֆերենցելի և մերոմորֆ ֆունկցիաների վարքը լարերի երկայնքով *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է ընդհանուր թեորեմ, միավոր շրջանում որոշված, դրական և անընդհատ, կամայական ֆունկցիայի եզրային վարքի մասին՝ մի բազմությունից դուրս, որի α-ունակությունը զրո է այնուհետև այդ թեորեմը տարածվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների վրա, որոնց համար

$$\iint_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\delta(r,\theta)\,rdrd\theta<+\infty\left(\delta(r,\theta)=\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right):$$

Ապացուցվում է, որ $f(z)$ ֆունկցիան ունի անկյունային եզրային արժեքներ և մի բազմության դուրս, որի α-ունակությունը զրո է։ Որոշակի պայմանի դեպքում $f(z)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն Ժյուլիայի ճառագայթներ։

A. H. AJRAPETIAN. *On the behaviour of continuous, continuously differentiable and meromorphic in a circle functions along the chords* (summary)

A general theorem on the behaviour of a continuous positive in a circle function near the boundary of the letter outside a set of zero α-capacity is proved. This theorem is extended to the case of meromorphic functions $f(z)$, for which

$$\iint_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\delta(r,\theta)\,rdrd\theta<+\infty\left(\delta(r,\theta)=\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right).$$

It is proved, that $f(z)$ possesses angular limiting values outside a set of σ-capacity zero. The existence of Gulia directions is also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющимися нормальными, Мат. сб., 67(109), 3, 1965, 408—427.
2. *Y. Yamashita*, S. Function-theoric metrics and boundary behavior of functions meromorphic or holomorphic in the unit disc, Nogoya Math. J., 45, 1972, 105—117.
3. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Берлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Матем. сб. (в печати).
4. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41, 1955, 379—382.
5. *M. Tsuji.* Beurlings theorem on exceptional sets, Tohoku Math. J. 2, 1950, 113—125.
6. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирский матем. журн. 14, № 5, 1973.