ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. П. ГОРЯЧЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ПО КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ БАЗИСАМ

Введение

В 1964 году П. Л. Ульяновым в работе [1] рассматривался вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} \tag{1}$$

при некоторых значениях μ и λ для коэффициентов разложения функции $f(x)$ по системе Хаара (определение системы Хаара см. [2], стр. 361, [1], стр. 367, можно пользоваться определением из книги [3], стр. 57, но с учетом замечания, сделанного П. Л. Ульяновым в работе [1], стр. 367) для функций ограниченной вариации. Система Хаара нормирована в пространстве $L^2(0,1)$. В работе [4] изучается, в частности, тот же вопрос для нормированной в пространстве $L^2(0,1)$ системы Фабера-Шаудера (определение этой системы см. [5], [6], [3], стр. 63), а также вопрос о сходимости рядов вида (1) для $\mu=1$ и $\lambda=0$. Т. Н. Сабурова [7] уже рассматривала сходимость рядов вида (1) для коэффициентов разложения некоторых классов непрерывных функций по нормированной в пространстве $L^2(0,1)$ системе Фабера-Шаудера. Автором (см. [8]) были построены кусочно-полиномиальные базисы пространства $C(0,1)$, являющиеся, в некотором смысле, обобщением систем Хаара и Фабера-Шаудера.

В настоящей работе изучается как сходимость рядов вида (1) для непрерывных функций ограниченной вариации, так и рядов вида (1) при $\mu=1$ для функций класса H_ω по кусочно-полиномиальным базисам и системе Фабера-Шаудера, нормированным в пространстве $L^\sigma(0,1)$ с $1 \leqslant \sigma < \infty$, а также в пространстве $C(0,1)$.

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее модулем непрерывности называется функция

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta, f, [a, b]) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(x) - f(y)|.$$

Определение 2. Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности (см. [9]). Тогда классом функций H_ω называется множество

$$H_\omega = \{f(x) \in C(0,1) : \omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))\}.$$

При этом, если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то соответствующий класс функций H_ω называется классом $Lip\,\alpha$.

В работе [8] для любого наперед заданного целого числа $r \geqslant 2$ была построена система функций $\{f_m\}_{m=0}^\infty$. Всю совокупность этих систем обозначим через F и любой системе $\{f_m\}_{m=0}^\infty \in F$ поставим в соответствие то число r, для которого она была построена. Кроме того, при $r=2$ наряду с системой $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ из F будем рассматривать систему Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$. Таким образом, число 2 оказалось поставленным в соответствие двум различным системам, а любое $r>2$ — только одному. Ниже нам понадобятся следующие свойства системы $\{f_m\}_{m=0}^\infty$, полученные в [8].

1. Система функций $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — базис пространства $C(0,1)$.

2. Если

$$m = r^n + (r-1)p + q, \text{ где } 0 \leqslant p \leqslant r^n - 1,\ 1 \leqslant q \leqslant r-1,\ n \geqslant 0, \tag{2}$$

то*

$$\|f_m\|_C \leqslant A_1,\ f_m\left(\frac{rp+q_1}{r^{n+1}}\right) = \delta_{qq_1}, \text{ где } 0 \leqslant q_1 \leqslant r, \tag{3}$$

носитель

$$\operatorname{supp} f_m = \left[\frac{p}{r^n}, \frac{p+1}{r^n}\right]. \tag{4}$$

3. На своем носителе (см. (4)) функция $f_m(x)$ представляет собой многочлен степени r.

Нетрудно видеть, что эти же свойства имеют место при $r=2$ и для системы Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$, если свойство 3 заменить на

3′. На своем носителе (см. (4)) функция $\varphi_m(x)$ имеет вид:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 2p \text{ при } \dfrac{p}{2^n} \leqslant x < \dfrac{2p+1}{2^{n+1}} \\ 2p+2-2^{n+1}x \text{ при } \dfrac{2p+1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{2^n}. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность коэффициентов $\{c_m(f)\}_{m=0}^\infty$ разложения непрерывной функции $f(x)$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^\infty \in F$. В теореме 1 работы [8], в частности, доказано, что

$$|c_m(f)| \leqslant A_2\, \omega\left(\frac{1}{m}, f, [0,1]\right) \text{ при } m \geqslant 1. \tag{6}$$

---

* Через A_i $(r, \alpha, \beta, \cdots)$ мы обозначаем постоянные, зависящие только от входящих параметров. Если постоянная зависит только от r, то эту зависимость мы обозначать не будем.

На самом деле, анализируя доказательство этой теоремы, нетрудно убедиться, что справедливо

Предложение 1. *Пусть система* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$ *построена для некоторого числа* r. *Тогда коэффициенты разложения* $\{c_m(f)\}_{m=r+1}^{\infty}$ *любой непрерывной функции* $f(x)$ *по базису* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ *удовлетворяют неравенству (см.* (2))

$$|c_m(f)| \leqslant A_3\, \omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}, f, \left[\frac{p_1}{r^{n-1}}, \frac{p_1+1}{r^{n-1}}\right]\right), \text{ где } p_1 = E\left(\frac{p}{r}\right). \quad (7)$$

Из этого предложения можно вывести

Предложение 2. *При условиях предложения* 1 *и наличии у функции* $f(x)$ *ограниченной вариации верно соотношение*

$$\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant A_4 \bigvee_0^1 (f) \text{ при } n \geqslant 1.$$

Доказательство. Из (7) следует, что при $r^n < m \leqslant r^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации

$$|c_m(f)| \leqslant A_3 \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f).$$

Но тогда

$$\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant A_3 \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) = A_3 \sum_{p_1=0}^{r^{n-1}-1} \sum_{m=r^n+p_1 r(r-1)}^{r^n+(p_1+1)r(r-1)-1} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) =$$

$$= A_3 r(r-1) \sum_{p_1=0}^{r^{n-1}-1} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) = A_3 r(r-1) \bigvee_0^1 (f),$$

что и требовалось доказать.

Коэффициенты разложения $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ непрерывной функции $f(x)$ по системе Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$, как известно (см. [5], стр. 106—109, [6], стр. 48—49, [10], стр. 230), имеют вид (см. (1))

$$c_0(f) = f(0),\ c_1(f) = f(1) - f(0),\ c_m(f) = \frac{1}{2}\left[2f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\frac{p}{2^n}\right) - f\left(\frac{p+1}{2^n}\right)\right],\ m \geqslant 2. \quad (8)$$

Отсюда, в частности, легко видеть, что

$$|c_m(f)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{m}, f\right) \text{ при } m > 1. \quad (9)$$

Кроме того, из (8) можно вывести, что предложение 2 сохраняет силу и для системы Фабера-Шаудера при $r=2$, точнее, имеет место

Предложение 3. *Пусть* $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ *суть коэффициенты разложения непрерывной функции* $f(x)$ *ограниченной вариации по системе Фабера-Шаудера. Тогда*

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_0^1 (f) \text{ при } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Из (8) имеем

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_m(f)| = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2^n-1}\left|2f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)-f\left(\frac{p}{2^n}\right)-f\left(\frac{p+1}{2^n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2^n-1}\left[\left|f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)-f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{p+1}{2^n}\right)-f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2^n-1}\left[\bigvee_{\frac{p}{2^n}}^{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}(f)+\bigvee_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}^{\frac{p+1}{2^n}}(f)\right] = \frac{1}{2}\bigvee_0^1 (f),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь

Предложение 4. *Пусть* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — *либо система из* F, *построенная для некоторого числа* r, *либо система Фабера-Шаудера. Тогда для любого* $h \in [0,1]$ *функция*

$$B_n(x) = \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} f_m(x), \quad n \geqslant 0 \tag{10}$$

обладает свойствами

$$|B_n(x)| \leqslant A_5 \text{ при } x \in [0,1], \tag{11}$$

$$|B_n(x+h)-B_n(x)| \leqslant A_6\, r^n\, h \text{ при } x \in [0,1-h]. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — система Фабера-Шаудера. Тогда из свойств 2 и 3′ непосредственно вытекает, что $0 \leqslant B_n(x) \leqslant 1$ при $x \in [0,1]$ и $|B_n(x+h)-B_n(x)| \leqslant 2^{n+1} h$ при $x \in [0,1-h]$, то есть неравенства (11) и (12) выполняются.

Пусть теперь $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$. Тогда из свойств 2 и 3 следует, что $B_n(x)$ представляет собой полином степени r на отрезках вида $\left[\frac{i}{r^n}, \frac{i+1}{r^n}\right]$, где $i=0,1,\cdots, r^n-1$, причем

$$B_n\left(x+\frac{1}{r^n}\right) = B_n(x) \text{ для } x \in \left[0, 1-\frac{1}{r^n}\right]. \tag{13}$$

Из (13) и свойства 2 следует, что

$$\|B_n\|_C \leqslant (r-1)\, A_1. \tag{14}$$

Так как $B_n(x)$ — многочлен степени r на отрезках длины $\frac{1}{r^n}$, то, согласно неравенству А. А. Маркова (см., например, [11], стр. 174), при $0 < h \leqslant 1$ из (14) вытекает

$$|B_n(x+h) - B_n(x)| \leqslant 2\,(r-1)\, A_1\, r^{n+2}\, h \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1-h. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следуют неравенства (11) и (12) в рассматриваемом случае, что и требовалось доказать.

Предложение 5. *Пусть* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям предложения* 4 и $\sigma \geqslant 1$. *Тогда*

$$\frac{A_7}{\sqrt[\sigma]{m}} \leqslant \|f_m\|_\sigma \leqslant \frac{A_8}{\sqrt[\sigma]{m}},\ m \geqslant 1. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $m \geqslant 2$ и $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — система Фабера-Шаудера. Тогда из (2), (4) и (5) следует, что при $2^n < m \leqslant 2^{n+1}$ имеем

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma\, dx = \int_0^1 |f_{2^n+1}(x)|^\sigma\, dx = \int_0^{2^{-n}} [f_{2^n+1}(x)]^\sigma\, dx =$$

$$= 2\int_0^{2^{-n-1}} (2^{n+1}x)^\sigma\, dx = 2\cdot 2^{(n+1)\sigma}\cdot \frac{1}{\sigma+1}\cdot \frac{1}{2^{(n+1)(\sigma+1)}} = \frac{1}{\sigma+1}\cdot\frac{1}{2^n},$$

то есть в этом случае имеет место равенство

$$\|f_m\|_\sigma = \frac{1}{(\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}},\ 2^n < m \leqslant 2^{n+1}. \tag{17}$$

Так как при $\sigma \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$1 < (\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant 2, \tag{18}$$

то из (17) и (18) следует, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^{\frac{1}{\sigma}}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} \leqslant \frac{1}{(\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} = \|f_m\|_\sigma < \frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} \leqslant \frac{2^{\frac{1}{\sigma}}}{m^{\frac{1}{\sigma}}} \leqslant \frac{2}{m^{\frac{1}{\sigma}}},$$

то есть (16) в этом случае справедливо.

Пусть теперь $m \geqslant 2$ и $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$. Из (2) и (4) следует, что

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma\, dx = \int_{\frac{p}{r^n}}^{\frac{p+1}{r^n}} |f_m(x)|^\sigma\, dx \text{ при } r^n < m \leqslant r^{n+1}. \tag{19}$$

Из (3) и (19) вытекает, что

$$\|f_m\|_\sigma < \frac{A_1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} < \frac{A_1 r^{\frac{1}{\sigma}}}{m^{\frac{1}{\sigma}}} \leqslant \frac{A_1 r}{\sqrt[\sigma]{m}},$$

чем доказано правое из неравенств (16). С другой стороны, из свойств 2, 3 и неравенства А. А. Маркова для любого $x \in \left[\frac{p}{r^n}, \frac{p+1}{r^n}\right]$ имеем

$$|f'_m(x)| \leqslant 2A_1 r^{n+2}, \tag{20}$$

причем в крайних точках этого отрезка рассматриваются лишь односторонние производные. Из (3), (19) и (20) следует, что

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma dx \geqslant \int_{\frac{rp+q}{r^{n+1}} - \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}}^{\frac{rp+q}{r^{n+1}} + \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}} |f_m(x)|^\sigma dx \geqslant \int_{\frac{rp+q}{r^{n+1}} - \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}}^{\frac{rp+q}{r^{n+1}} + \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}} \Bigl(1 -$$

$$-2A_1 r^{n+2} \cdot \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}\Bigr)^\sigma dx = \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{A_1(1+\sigma)r^{n+2}}.$$

Отсюда и из (18) получаем

$$\|f_m\|_\sigma > \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{1}{A_1^{\frac{1}{\sigma}}(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{2}{\sigma}}} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_1 \cdot 2 \cdot r^2} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} = \frac{1}{4A_1 r^2} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}}$$

при $r^n < m \leqslant r^{n+1}$, то есть

$$\|f_m\|_\sigma > \frac{1}{4A_1 r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}},$$

чем доказано левое из неравенств (16) в рассматриваемом случае.

Наконец отметим, что во всех рассматриваемых системах $f_1(x) = x$. Поэтому $\|f_1\|_\sigma = \left(\int_0^1 x^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}$,

то есть соотношение (16) справедливо и для $m = 1$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — система Фабера-Шаудера, то вместо неравенств (16) можно пользоваться равенством (17).

§ 2. О скорости убывания коэффициентов разложения некоторых классов непрерывных функций

Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — либо система из F, либо система Фабера-Шаудера, а $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ суть коэффициенты разложения непрерывной функции $f(x)$ по этой системе. Рассмотрим вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|}{m^{\lambda}}$$

при различных значениях λ. Схожие вопросы для системы Фабера-Шаудера рассматривала Т. Н. Сабурова [7].

Теорема 1. *Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — либо система из F, построенная для некоторого числа r, либо система Фабера-Шаудера. Пусть $0<\lambda<1$ и $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|}{m^{\lambda}} < \infty \quad \textit{для всех } f(x) \in H_{\omega}, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda}} \omega\left(\frac{1}{m}\right) < \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточность. Из (6), (9), (22) и того, что $f(x) \in H_{\omega}$ (см. определение 2) следует (21).

Необходимость. Пусть условие (22) не выполняется, то есть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda}} \omega\left(\frac{1}{m}\right) = \infty.$$

Поскольку члены этого ряда монотонно убывают, то, согласно результату П. Л. Ульянова ([12], стр. 53) для целого $r \geqslant 2$ выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n(1-\lambda)} \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) = \infty. \tag{23}$$

Мы построим такую функцию $f_0(x) \in H_{\omega}$, для которой ряд (21) расходится, то есть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f_0)|}{m^{\lambda}} = \infty. \tag{24}$$

Сделаем вначале два упрощенных замечания. Во-первых, исходный модуль непрерывности $\omega(\delta)$ будем считать, на основании леммы С. Б. Стечкина ([13], стр. 78) выпуклым вверх. Во-вторых, мы будем считать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} r^{n(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)<\infty. \tag{25}$$

Если же модуль непрерывности $\omega(\delta)$ таков, что для него (25) не выполняется, то функцию $f_0(x)$ мы будем искать уже не в классе H_ω, а в классе Lip $(1-\lambda)$, так как для этого класса соотношение (25) уже имеет место, а, как мы сейчас покажем

$$\mathrm{Lip}\,(1-\lambda)\subset H_\omega. \tag{26}$$

В самом деле, при невыполнении (25) для любого сколь угодно большого $k>0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n\geqslant n_0$ имеем

$$r^{n(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)>k. \tag{27}$$

Пусть $\frac{1}{r^n}<\delta\leqslant\frac{1}{r^{n-1}}\leqslant\frac{1}{r^{n_0-1}}$. Тогда из (27) вытекает, что

$$\delta^{1-\lambda}\leqslant\frac{r^{1-\lambda}}{r^{n(1-\lambda)}}<\frac{r^{1-\lambda}}{k}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)\leqslant\frac{r^{1-\lambda}}{k}\,\omega(\delta),$$

то есть

$$\omega(\delta)\geqslant\frac{k}{r^{1-\lambda}}\,\delta^{1-\lambda}. \tag{28}$$

Из (28) следует (26).

Итак, пусть для исходного выпуклого модуля непрерывности выполняются (23) и (25). Последнее означает, что найдется такая неограниченно возрастающая последовательность номеров $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ и такое $a>0$, что

$$r^{n_j(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right)<a,\ j=1,\,2,\cdots. \tag{29}$$

Положим $(n\geqslant 1)$

$$c_n=\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right). \tag{30}$$

Так как $\omega(\delta)$ — выпуклая функция, а

$$\frac{1}{r^n}=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{r}{r+1}\cdot\frac{1}{r^{n+1}},$$

то из (30) следует, что

$$c_n\geqslant 0,\ n=1,\,2,\cdots. \tag{31}$$

Пусть $0\leqslant N<M$. Тогда

$$\sum_{n=N+1}^{M} c_n=\sum_{n=N+1}^{M}\left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=N+1}^{M}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\sum_{n=N}^{-1}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{r}{r+1}\sum_{n=N+2}^{M+1}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)=$$

$$=\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)+\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-$$

$$-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M+1}}\right),$$

то есть

$$\sum_{n=N+1}^{M} c_n=\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right)+\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-$$

$$-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M+1}}\right). \tag{32}$$

Перейдем в (32) к пределу при $M\to\infty$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ получим

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n=\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right). \tag{33}$$

Из (31) и (33) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty. \tag{34}$$

Положим

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n B_n(x), \tag{35}$$

где $B_n(x)$ определяется по формуле (10). Из (11) и (34) вытекает, что ряд, стоящий в правой части (35), сходится равномерно и поэтому представляет собой некоторую непрерывную функцию $f_0(x)$. Покажем, что $f_0(x)\in H_\omega$. Пусть $0<\delta\leqslant 1$. Найдем целое число $N\geqslant 0$ такое, что

$$\frac{1}{r^{N+1}}<\delta\leqslant\frac{1}{r^{N}}. \tag{36}$$

Пусть $h\in[0,\delta]$. Согласно (35) имеем*

$$|f_0(x+h)-f_0(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{N} c_n\,|B_n(x+h)-B_n(x)|+$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n\,|B_n(x+h)-B_n(x)|. \tag{37}$$

Из (11), (12) и (37) получаем

---

* Здесь и в дальнейшем мы полагаем сумму равной нулю, если в ней верхний индекс меньше нижнего.

$$|f_0(x+h)-f_0(x)| \leqslant A_6 h \sum_{n=1}^{N} c_n r^n + 2A_6 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n. \tag{38}$$

Но (см. (30))

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n = \sum_{n=1}^{N} r^n \left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{1}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right) - \frac{1}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{r}{r+1}\sum_{n=0}^{N-1} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{1}{r+1}\sum_{n=2}^{N+1} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) = r\omega\left(\frac{1}{r}\right) +$$

$$+ r^N \omega\left(\frac{1}{r^N}\right) - \frac{r}{r+1}\omega(1) - \frac{r^2}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{r^N}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^N}\right) -$$

$$- \frac{r^{N+1}}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) = \frac{r}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{r}{r+1}\omega(1) + \frac{r^{N+1}}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^N}\right) -$$

$$- \frac{r^{N+1}}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) \quad \text{при } N = 0, 1, 2, \cdots.$$

Отсюда легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n \leqslant \frac{r^{N+1}}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^N}\right), \quad N = 0, 1, \cdots. \tag{39}$$

Из (33), (36), (38) и (39) следует, что

$$\omega(\delta, f_0) \leqslant A_2 r^2 \delta \frac{r^N}{r+1} \times \omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) + 2A_1 \frac{r}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{A_2 r^2}{r+1} + \frac{2A_1 r}{r+1}\right)\omega(\delta),$$

то есть для любого $\delta \in [0,1]$ модуль непрерывности $\omega(\delta, f_0) \leqslant (A_2 r + 2A_1)\,\omega(\delta)$. А это и означает, что $f_0(x) \in H_\omega$.

Покажем теперь, что для этой функции $f_0(x) \in H_\omega$ имеет место (24). Рассмотрим $S_{n_j} = \sum_{m=1}^{r^{n_j}} \frac{|c_m(f_0)|}{m^\lambda}$. Преобразуя это выражение, последовательно получаем*

$$S_{n_j} = \sum_{n=1}^{n_j-1} \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{|c_m(f_0)|}{m^\lambda} = \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{1}{m^\lambda} > \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n \frac{r^{n+1}-r^n}{r^{(n+1)\lambda}} =$$

$$= \frac{r-1}{r^\lambda} \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n r^{n(1-\lambda)} = \frac{r-1}{r^\lambda} \sum_{n=1}^{n_j-1} r^{n(1-\lambda)} \left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \right.$$

---

* При этом мы пользуемся тем, что при $0 < \lambda < 1$ и $r \geqslant 2$ выражение

$$\frac{r-1}{r^\lambda} > \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\Bigg]\geqslant\frac{1}{2}\Bigg[\sum_{n=1}^{n_j-1}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-$$

$$-\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\sum_{n=0}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{r^\lambda}{r+1}\sum_{n=2}^{n_j}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda+r^{1-\lambda}}{r+1}\right)\sum_{n=2}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\right)r^{1-\lambda}\omega\left(\frac{1}{r}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\omega(1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda}{r+1}\right)r^{(n_j-1)(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j-1}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{r^\lambda}{r+1}r^{n_j(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right),$$

откуда получаем (так как при $0<\lambda<1$ как $r^\lambda<r+1$, так и $r^{1-\lambda}<$ $<r+1$), что

$$S_{n_j}\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda+r^{1-\lambda}}{r+1}\right)\sum_{n=2}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{2}\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\omega(1)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{r^\lambda}{r+1}r^{n_j(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right). \tag{40}$$

Но как нетрудно убедиться, используя дифференциальное исчисление, что при $0<\lambda<1$ и $r\geqslant 2$ сумма

$$r^\lambda+r^{1-\lambda}<r+1. \tag{41}$$

Поэтому из (23), (29), (40) и (41) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty}S_{n_j}=\infty$, то есть для построенной нами функции $f_0(x)$ соотношение (24) выполняется. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что, как видно из доказательства, достаточность условия (22) имеет место и при $\lambda=1$.

Из теоремы 1 сразу выводится

Следствие 1. Пусть система $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ и число λ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда чтобы ряд (21) сходился для любой функции $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ с $0<\alpha\leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda+\alpha>1$.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Пусть $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Положим ($\sigma\geqslant 1$)

$$f_{m\sigma}(x)=\frac{f_m(x)}{\|f_m\|_\sigma},\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{42}$$

Так как $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — базис пространства $C(0,1)$, то $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^\infty$ — тоже базис этого пространства для любого $\sigma\geqslant 1$. Из (42) следует, что коэффициенты разложения $\{c_{m\sigma}(f)\}_{m=0}^\infty$ любой непрерывной функции $f(x)$

по базису $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ связаны с ее коэффициентами разложения $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ соотношениями

$$c_{m\sigma}(f) = c_m(f)\,\|f_m\|_{\sigma}. \tag{43}$$

Мы исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^{\lambda}}$$

при некоторых значениях σ и λ. Этот вопрос для системы Фабера-Шаудера при $\sigma=2$ был рассмотрен П. Л. Ульяновым [4] и Т. Н. Сабуровой [7]. Поскольку нормы $\|f_m\|_{\sigma}$ допускают оценку через $\frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}}$ сверху и снизу (см. предложение 5), то из (43) и теоремы 1 сразу выводится

Теорема 2. *Пусть* $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется соотношением* (42), *числа* $\sigma\in[1,\infty)$ *и* λ *таковы, что* $0<\frac{1}{\sigma}+\lambda<1$, *а* $\omega(\delta)$*—некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^{\lambda}} < \infty \quad \text{для всех} \quad f(x)\in H_{\omega}, \tag{44}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{1}{\sigma}+\lambda}}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right)<\infty.$$

Следствие 2. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ и числа σ и λ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда, чтобы ряд (44) сходился для любой функции $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $\alpha\in(0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\sigma}+\lambda+\alpha>1$.

Этот (и даже более общий) результат для системы Фабера-Шаудера при $\sigma=2$ получен Т. Н. Сабуровой [7].

Положив $\lambda=0$ в условии теоремы 2, получим

Следствие 3. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, число $\sigma\in(1,\infty)$, а $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m\sigma}(f)| < \infty \quad \text{для всех} \quad f(x)\in H_{\omega}, \tag{45}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right)<\infty.$$

Следствие 4. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ и число σ удовлетворяют условиям следствия 4. Тогда, чтобы для любой функции $f(x)\in\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $0<\alpha\leqslant 1$ ряд (45) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\sigma}+\alpha>1$.

Достаточность этого условия для системы Фабера-Шаудера при $\sigma=2$ доказана П. Л. Ульяновым [4], а необходимость при тех же предложениях — Т. Н. Сабуровой [7].

§ 3. О сходимости рядов для функций ограниченной вариации

Здесь мы рассмотрим вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}},\ \mu>0,\ \lambda>0, \tag{46}$$

где $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ суть коэффициенты разложения функции* $f(x)\in\in CV(0,1)$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$, являющемуся либо системой из F, либо системой Фабера-Шаудера. Для системы Фабера-Шаудера схожие вопросы рассматривали П. Л. Ульянов [4], В. А. Матвеев [14], Т. Н. Сабурова [7]. Поскольку при $\mu>0$ и $\lambda>1$ ряд (46) будет сходиться для любой непрерывной функции (см. (6) и (8)), то мы будем рассматривать лишь случаи $\mu>0$, $0<\lambda\leqslant 1$. Нами будет доказана следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ *— либо система из* F, *построенная для некоторого числа* r, *либо система Фабера-Шаудера, а числа* μ *и* λ *таковы, что* $\mu>0$, $0<\lambda\leqslant 1$. *Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}<\infty \quad \text{для всех } f(x)\in CV(0,1), \tag{47}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu+\lambda>1. \tag{48}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть верно (48), а функция $f(x)\in CV(0,1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0<\mu<1$. Тогда получим

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}\frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}}\frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^{n\lambda}}\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}}|c_m(f)|^{\mu}.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера к внутренней сумме и учитывая, в зависимости от системы $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$, либо предложение 2, либо предложение 3, получим**

* Классом $CV(0,1)$ называется класс непрерывных функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке [0,1].

** Мы обозначаем $A_9=\max\left(A_4,\frac{1}{2}\right)$.

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}\frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^{n\lambda}}\left(\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}}|c_m(f)|\right)^{\mu}\left(\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}}1\right)^{1-\mu}\leqslant$$

$$\leqslant\left[A_0\bigvee_0^1(f)\right]^{\mu}(r-1)^{1-\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n(1-\mu)}}{r^{n\lambda}}=A(r,\mu,f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^{n(\mu+\lambda-1)}}<\infty,$$

так как $\mu+\lambda>1$, то есть ряд (47) сходится.

Необходимость. Пусть теперь $\mu+\lambda\leqslant 1$. Построим такую функцию $f_0(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, для которой ряд (47) расходится. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\mu=1-\lambda$ и, следовательно, искать такую функцию $f_0(x)$, что

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{|c_m(f_0)|^{1-\lambda}}{m^{\lambda}}=\infty. \tag{49}$$

Положим (см. (10))

$$f_0(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_n(x)}{r^n n\ln^2 n}. \tag{50}$$

Из (11) следует, что $f_0(x)\in C(0,1)$. Покажем, что она искомая.

Оценим ее модуль непрерывности. Пусть $0\leqslant\delta\leqslant 1$ и $0\leqslant h\leqslant\delta$. Из (12) и (50) следует, что

$$|f_0(x+h)-f_0(x)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|B_n(x+h)-B_n(x)|}{r^n\,n\ln^2 n}\leqslant A_6 h\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\leqslant 3A_6 h,$$

то есть модуль непрерывности $\omega(\delta,f_0)\leqslant 3A_6\delta$ и поэтому $f_0(x)\in\mathrm{Lip}\,1$, следовательно, $f_0(x)\in CV(0,1)$.

Далее, из (50) вытекает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_m(f_0)|^{1-\lambda}}{m^{\lambda}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(r^n n\ln^2 n)^{1-\lambda}}\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}}\frac{1}{m^{\lambda}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{r-1}{r^{\lambda}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\lambda}(\ln n)^{2-2\lambda}}=\infty,$$

так как $\lambda>0$, то есть для построенной нами функции $f_0(x)$ выполняется (49). Теорема доказана.

Замечание 3. Как видно из доказательства этой теоремы, функцию $f_0(x)\in CV(0,1)$, для которой верно (49), можно найти даже в классе Lip 1.

Применим теперь теорему 3 к вопросу о сходимости рядов вида (см. (42), (43))

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_{m\sigma}(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}. \tag{51}$$

Аналогично тому, как была выведена теорема 2 из теоремы 1, из теоремы 3 сразу выводится

Теорема 4. *Пусть система* $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется соотношением* (42), *а числа* σ, μ *и* λ *таковы, что* $\mu > 0$, $0 < \lambda + \frac{\mu}{\sigma} < 1 \leqslant \sigma$. *Тогда, чтобы для любой функции* $f(x) \in CV(0,1)$ *ряд* (51) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $1 + \frac{1}{\sigma} > \frac{1-\lambda}{\mu}$.

Необходимость этого условия для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ получена Т. Н. Сабуровой [7].

Выведем теперь из теоремы 4 некоторые очевидные следствия.

Следствие 5. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, а числа σ и λ таковы, что $\sigma \geqslant 1$, $\lambda > -\frac{1}{\sigma}$. Тогда для любой функции $f(x) \in CV(0,1)$ имеет место соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^{\lambda}} < \infty.$$

Это утверждение для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ доказано П. Л. Ульяновым [4].

Следствие 6. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, а числа μ и σ таковы, что $\mu > 0$, $\sigma \geqslant 1$. Тогда, чтобы для любой функции $f(x) \in CV(0,1)$ имело место

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m\sigma}(f)|^{\mu} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu > \frac{\sigma}{\sigma+1}$.

Это утверждение для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ доказано П. Л. Ульяновым [4], а для системы Хаара—тоже им [1].

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору П. Л. Ульянову за постоянное внимание к моей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 4.VI.1973

Ա. Պ. ԳՈՐՅԱՉԵՎ. Կտոր առ կտոր պոլինոմյալ բազիսներով շարքերի գործակիցների մի քանի հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնք բնութագրում են կտոր առ կտոր պոլինոմյալ բազիսներով, ինչպես նաև Ֆաբեր-Շաուդերի սիստեմով որոշակի դասերին պատկանող անընդհատ ֆունկցիաների վերլուծությունների գործակիցների նվազման կարգը։

A. P. GORYACHEV. *On some properties of coefficients of series by piece-polynomial bases* (summary)

Necessary and sufficient conditions characterizing the rate of decrease of decomposition coefficients of some classes of continuous functions by piece polynomial bases and the Faber-Schauder system are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* О рядах по системе Хаара, Матем. сб., 63, № 3, 1964, 356—391.
2. *A. Haar.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-systeme, Math. Ann., 69. 1910, 331—371.
3. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
4. *П. Л. Ульянов.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера, Матем. заметки, 7, № 4, 1970, 431—442.
5. *G. Faber.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, Tahresberichte der deutsch. Math-Ver., 19, 1910, 104—112.
6. *J. Schauder.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeit., 26, № 1, 1927, 47—65.
7. *Т. Н. Сабурова.* О теоремах вложения для некоторых классов непрерывных функций, Вестник МГУ, сер. матем., мех., № 3, 1971, 20—29.
8. *А. П. Горячев.* О кусочно-полиномиальных базисах в пространстве непрерывных функций, Изв. ВУЗов, матем., № 1 (128), 1973, 37—50.
9. *С. Н. Никольский.* Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, ДАН СССР, 52, № 3, 1946, 191—194.
10. *Z. Ciesielski.* On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{<0,1>}$, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys., VII, № 4, 1959, 227—232.
11. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
12. *П. Л. Ульянов.* О множителях Вейля для безусловной сходимости, Матем. сб., 60, № 1, 1963, 39—62.
13. *А. В. Ефимов.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, Матем. сб., 54, № 1, 1961, 51—90.
14. *В. А. Матвеев.* О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 6, 1966, 1397—1419.