А. А. ВАГАРШАКЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В в е д е н и е

Пусть D —единичный шар в n -мерном евклидовом пространстве. Мы будем рассматривать класс функций U_λ , допускающих интегральное представление

$$u(x) = \int_0^1 v(t, x) d\lambda(t), \quad x \in D,$$

где λ —фиксированная, неотрицательная, конечная мера, а v —произвольная функция, которую можно представить в виде разности двух неотрицательных, гармонических в D функций.

При $n=2$ классы U_λ тесно связаны с известными классами мероморфных функций М. М. Джрбашяна [2].

Если $\omega(x)$ —возрастающая, непрерывная на $[0,1]$ функция такая, что $\omega(0) = 1$ и

$$\int_0^1 \omega(x) dx < \infty,$$

то, как показано в работе М. М. Джрбашяна [1], существует неотрицательная, конечная мера на $[0,1]$ $d\alpha_\omega(t)$ такая, что

$$\left(r \int_0^1 \omega(x) x^{r-1} dx \right)^{-1} = \int_0^1 x^r d\alpha_\omega(x), \quad 0 < r < \infty.$$

Из факторизационной теоремы М. М. Джрбашяна [2] следует, что если $\omega(x)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям, то U_{α_ω} совпадает с множеством функций вида $|p|f(z)|$, где $f \in N\{\omega\}$ и f не имеет нулей и полюсов*.

Некасательные граничные пределы для всего класса $N\{\omega\}$ были изучены в работах М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [3], [4].

В настоящей статье показано, что для классов U_λ (для любого $n > 2$), при условии, что $\lambda\{1\} = 0^{**}$, можно получить содержательные результаты не только для некасательных, но и для некоторых касательных граничных значений.

* Классы U_{α_ω} были введены М. М. Джрбашяном в работе [1], где они обозначаются U_ω . Определение классов $N\{\omega\}$ можно найти в [2].

** Заметим, что если $\omega(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow 1$, то $\alpha_\omega\{1\} = 0$.

Автор выражает благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи, а также Н. С. Ландкофу за ценное обсуждение статьи.
 1°. Введем обозначение

$$C_\rho(x) = \left\{ y \in \partial D \mid \left| y - \frac{x}{|x|} \right| < \rho \right\},$$

где $0 \neq x \in D, \rho > 0$.

Мы скажем, что $\varphi \in \Phi$, если $\varphi(t)$ — непрерывная, неубывающая функция, заданная при $0 \leq t \leq 2, \varphi(0) = 0, \varphi(2) = 1$ и существует число $c < \infty$ такое, что для любого $0 < t < 2$

$$\varphi(t) \int_1^2 \frac{\varphi^{n-1}(x)}{x^{n+1}} dx \leq c.$$

Докажем одно неравенство, обобщающее неравенство Н. Ароншайна и К. Т. Смита [6].

Лемма 1. Пусть $\varphi \in \Phi$, тогда для любой неотрицательной, гармонической в D функции $u(x)$ имеет место неравенство

$$u(x) \leq 2 \mu(\partial D) + \sup_{t > \rho(x)} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) (2 + 2^{n+1} n c),$$

где $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, а μ — мера, фигурирующая в представлении функции u интегралом Пуассона-Стилтьеса.

Доказательство. Пусть

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} d\mu(y),$$

где μ — неотрицательная, конечная мера. При $0 \neq x \in D$ и $y \in \partial D$ имеют место неравенства $|y - x| \geq 1 - |x|$ и $2|y - x| > \left| y - \frac{x}{|x|} \right|$. Используя эти неравенства, мы получаем

$$u(x) = \int_{C_\rho(x)} + \int_{\partial D \setminus C_\rho(x)} \leq \frac{2\mu(C_\rho(x))}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2^{n+1} (1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{d\mu(C_t(x))}{t^n} \leq$$

$$\leq \frac{2\mu(C_\rho(x))}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2\mu(\partial D) + 2^{n+1} n (1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{\mu(C_t(x))}{t^{n+1}} dt \leq$$

$$\leq 2\mu(\partial D) + \sup_{t > \rho} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) \left(2 \frac{\varphi^{n-1}(\rho)}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2^{n+1} n (1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{\varphi^{n-1}(t)}{t^{n+1}} dt \right).$$

Теперь, предполагая, что $\rho = \rho(x)$ выбрано так, что $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, получаем

$$u(x) \leq 2 \mu(\partial D) + \sup_{t > \rho(x)} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) (2 + 2^{n+1} \mu c).$$

Введем несколько обозначений. Пусть $h(r)$ — непрерывная, положительная функция, заданная при $r > 0$. Пусть $E \subseteq \partial D$ — некоторое множество. Рассмотрим все покрытия множества E счетным набором шаров S_i радиусов r_i :

$$\bigcup_i S_i \supseteq E$$

и положим

$$M_h(E) = \inf \left(\sum_i h(r_i) \right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. Заметим, что для любого $F \subseteq \partial D$, $M_h(F) > 0$, если $F \subseteq E$, то $M_h(F) \leq M_h(E)$ и для любых F и E $M_h(F \cup E) \leq M_h(F) + M_h(E)$. В случае, когда $h(r) \geq c > 0$, при $r > 0$, имеем, что для любого $\emptyset \neq F \subseteq \partial D$, $M_h(F) \geq c$. Легко проверить, что если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^{n-1}} = 0,$$

то $M_h(\partial D) = 0$.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Обозначим

$$\Delta_\varphi(y) = \left\{ x \in D / \varphi \left(\left| y - \frac{x}{|x|} \right| \right) < 1 - |x| \right\},$$

где $y \in \partial D$.

Лемма 2. Пусть $g(t) \geq 1$ — непрерывная, невозрастающая функция, заданная при $t > 0$. Пусть $\varphi \in \Phi$, а $u(x)$ — неотрицательная, гармоническая в D функция. Тогда для множества

$$F = \left\{ y \in \partial D / \sup_{\Delta_\varphi(y) \ni x} \left(\frac{u(x)}{g(1 - |x|)} \right) = \infty \right\}$$

имеет место

$$M_h(F) = 0, \quad (1)$$

где $h(r) = \varphi^{n-1}(r) g(\varphi(r))$.

Обратно, для любого $F \subseteq \partial D$ такого, что $M_h(F) = 0$, существует неотрицательная, гармоническая функция $u(x)$ такая, что в любой точке $y \in F$ имеет место

$$\sup_{\Delta_\varphi(y) \ni x} \left(\frac{u(x)}{g(1 - |x|)} \right) = \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$E_A = \{x \in D / Ag(1 - |x|) < u(x)\},$$

где $2\mu(\partial D) < A < \infty$ — некоторое число. Согласно лемме 1, для любого $x \in D$ существует $t(x) > \rho(x)$, где $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, такая, что

$$u(x) < 2\mu(\partial D) + (2 + 2^{n+1}nc) \frac{\mu(C_{t(x)}(x))}{\varphi^{n-1}(t(x))}, \quad (3)$$

где μ — мера, связанная с функцией $u(x)$. Далее семейство шаров $\{C_{t(x)}(x)\}_{x \in E_A}$ на сфере покрывает множество F . Действительно, пусть $y \in \bigcup_{x \in E_A} C_{t(x)}(x)$, тогда для любого $x \in E$ имеем

$$\rho(x) \leq t(x) \leq \left| y - \frac{x}{|x|} \right|.$$

В силу монотонности φ

$$1 - |x| = \varphi(\rho(x)) \leq \varphi\left(\left| y - \frac{x}{|x|} \right|\right),$$

это означает, что $\Delta_\varphi(y) \cap E_A = \emptyset$. Следовательно, имеем

$$u(x) \leq Ag(1 - |x|), \text{ при } x \in \Delta_\varphi(y).$$

Поэтому $y \notin F$, а это эквивалентно тому, что $F \subseteq \bigcup_{x \in E_A} C_{t(x)}(x)$. Согласно

лемме Л. Альфорса — Н. С. Ландкофа (см. Н. С. Ландкоф [5], стр. 246) существует счетное подпокрытие такое, что его кратность не превосходит числа $N(n)$, зависящего только от размерности n . Это подпокрытие обозначим $\{C_{t(x_i)}(x_i)\}$. Согласно определению множества E_A и в силу (3) имеем

$$A - 2\mu(\partial D) \leq \frac{u(x_i) - 2\mu(\partial D)}{g(1 - |x_i|)} \leq (2 + 2^{n+1}nc) \frac{\mu(C_{t(x_i)}(x_i))}{\varphi^{n-1}(t(x_i))g(1 - |x_i|)}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} h(t(x_i)) &= \varphi^{n-1}(t(x_i))g(\varphi(t(x_i))) \leq \varphi^{n-1}(t(x_i))g(1 - |x_i|) \leq \\ &\leq \frac{2 + 2^{n+1}nc}{A - 2\mu(\partial D)} \mu(C_{t(x_i)}(x_i)). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$M_h(F) \leq \sum_I h(t(x_i)) \leq \frac{2 + 2^{n+1}nc}{A - 2\mu(\partial D)} N(n) \mu(\partial D).$$

В силу произвольности A , $M_h(F) = 0$.

Обратно, пусть $M_h(F) = 0$, $F \subseteq \partial D$. Тогда можем построить семейство шаров $\{S_k^{(m)}\}$ в ∂D так, чтобы удовлетворялись условия

$$\bigcup_k S_k^{(m)} \supseteq F, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \left(\sum_{k=1}^{\infty} h(r_k^{(m)}) \right) < \infty,$$

где $r_k^{(m)}$ — радиус шара $S_k^{(m)}$. Обозначим $y_k^{(m)} \in \partial D$ — центр шара $S_k^{(m)}$.

Тогда функция

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\sum_{k=1}^{\infty} h(r_k^{(m)}) \frac{1 - |x|^2}{|y_k^{(m)} - x|^2} \right)$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно, пусть $y \in F$. В силу (4) для любого $m = 1, 2, \dots$ существует k_m такое, что $S_{k_m}^{(m)} \ni y$. Рассмотрим точки

$$x_{k_m}^{(m)} = (1 - \varphi(r_{k_m}^{(m)})) y_{k_m}^{(m)}.$$

Мы имеем

$$\varphi \left(\left| y - \frac{x_{k_m}^{(m)}}{|x_{k_m}^{(m)}|} \right| \right) = \varphi(|y - y_{k_m}^{(m)}|) \leq \varphi(r_{k_m}^{(m)}) = 1 - |x_{k_m}^{(m)}|,$$

следовательно, $x_{k_m}^{(m)} \in \Delta_\varphi(y)$. Но с другой стороны

$$\frac{u(x_{k_m}^{(m)})}{g(1 - |x_{k_m}^{(m)}|)} \geq m \frac{h(r_{k_m}^{(m)})}{g(1 - |x_{k_m}^{(m)}|)(1 - |x_{k_m}^{(m)}|)^{n-1}} = m.$$

Это означает, что для $y \in F$ имеет место (2).

2°. Теперь докажем основную теорему.

Теорема. Пусть $\varphi \in \Phi$ и λ — неотрицательная конечная мера на $[0, 1]$, $\lambda\{1\} = 0$ и u — функция из U_λ . Тогда всюду на ∂D существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta_\varphi(y) \ni x \rightarrow y} u(x),$$

кроме некоторого множества $F \subseteq \partial D$, для которого $M_h(F) = 0$ при любом h , допускающем представление

$$h(t) = \varphi^{n-1}(t) g(\varphi(t)),$$

где $g(t)$ — неотрицательная, непрерывная, невозрастающая функция и

$$\int_0^1 g(1-t) d\lambda(t) < \infty.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно рассмотреть функции $u \in U_\lambda$, допускающие интегральное представление

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) d\lambda(t), \quad (5)$$

где v — неотрицательная, гармоническая функция. Пусть g — неотрицательная непрерывная, невозрастающая функция и

$$\int_0^1 g(1-t) d\lambda(t) < \infty.$$

Согласно лемме 2 для всех точек $y \in \partial D$, кроме некоторого множества $E_g \subseteq \partial D$, для которого $M_h(E_g) = 0$, где $h(t) = \varphi^{n-1}(t) g(\varphi(t))$, существует $M = M(y) < \infty$ такая, что

$$v(x) \leq Mg(1 - |x|), \quad x \in \Delta_r(y). \tag{6}$$

Пусть $y \in \partial D \setminus E_g$. В силу (6) имеем

$$v(tx) \leq Mg(1 - t|x|) \leq Mg(1 - t), \quad x \in \Delta_\varphi(y), \quad 0 < t < 1.$$

Очевидно, что при $0 \leq t < 1$ имеет место

$$\lim_{\Delta_\varphi(y) \ni x \rightarrow y} v(tx) = v(ty).$$

Следовательно, в силу теоремы Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла в (5), и это показывает, что

$$\lim_{\Delta_\varphi(y) \ni x \rightarrow y} u(x) \tag{7}$$

существует и конечен. Следовательно, множество $F \subseteq \partial D$, для которого в любой точке $y \in F$ предел (7) не существует, входит в E_g , поэтому $M_h(F) = 0$.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступила 7.I.1974

Ա. Ա. ՎԱԳԱՐՇԱԿՅԱՆԻ ՀԱՐՄՈՆԻԿ ֆունկցիաների մի Էսկի դասերի եզրային հատկությունները (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է հարմոնիկ ֆունկցիաների U_λ դասերը, որոնք թույլ են տալիս

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) d\lambda(t), \quad x \in D,$$

ինտեգրալ ներկայացումը, որտեղ D -ն միավոր գունդ է n -չափանի էվկլիդեսյան տարածություն մեջ, λ -ն ոչ բացասական վերջավոր չափ է $[0,1]$ -ուսմ, $\lambda\{1\} = 0$, իսկ $v = v_1 - v_2$, որտեղ $v_i (i=1, 2)$ ոչ բացասական հարմոնիկ ֆունկցիաներ են D -ում, Չափերի օգնությամբ, որոնք հանդիսանում են Հաուզդորֆի չափերի ընդհանրացումը, նկարագրվում է այն ենթարազմությունը $F \subseteq \partial D$, որտեղ $a \in U_\lambda$ ֆունկցիան եզրային արժեքներ չունի:

A. A. VAGARSHAKIAN. *Boundary properties of some classes of harmonic functions (summary)*

The classes U_λ of harmonic functions, which permit integral representation

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) d\lambda(t), \quad x \in D,$$

where D is unit ball in n -dimensional Euclidean space, λ is nonnegative, bounded measure on $[0,1]$, $\lambda\{1\} = 0$, and $v = v_1 - v_2$, with nonnegative harmonic functions $v_i, i=1, 2$, or are considered. The subset $F \subseteq \partial D$, where the function $u \in U_\lambda$ has no boundary values is described in terms of generalised Hausdorff measures.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Обобщенный оператор Римана-Адувиля и некоторые его приложения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
2. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., (121), № 4 (8), 1972.
3. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6, 1970.
4. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 2—3, 1971, 182—194.
5. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала, М., Изд. "Наука", 1966.
6. N. Aronszajn, K. T. Smith. Functional spaces and functional completion, Ann. de l'inst. Fourier, 6, 1956, 125—185.