ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

Н. О. СИНАНЯН

О ВЗАИМОСВЯЗИ СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Введение

Рассмотрим бесконечную матрицу

$$T=\|a_{mk}\| \ (m,\ k=1,\ 2,\cdots) \tag{1}$$

и какой-нибудь бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

частные суммы которого обозначим через S_m $(m=1, 2,\cdots)$. T-средними ряда (2), определяемыми матрицей (1), называют величины

$$A_m(T)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}\ S_k \ (m=1,\ 2,\cdots). \tag{3}$$

Говорят, что ряд (2) суммируется методом T к значению S, если ряды в правой части равенства (3) сходятся для любого $m=1, 2,\cdots$ и величины $A_m(T)$ стремятся к пределу S при $m\to\infty$. Метод суммирования T называется регулярным, если всякий ряд (2), сходящийся к конечному значению S, суммируется методом T к тому же значению S.

Для того чтобы метод T был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы матрица (1), определяющая этот метод, удовлетворяла условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}|<H, \text{ где } H \text{ не зависит от } m, \tag{4}$$

$$\lim_{m\to\infty} a_{mk}=0 \quad \text{для каждого } k=1,\ 2,\cdots, \tag{5}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}=1. \tag{6}$$

Приведем два определения.

Определение 1. Будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные на отрезке [0,1], суммируется методом $T=\|a_{mk}\|$ в метрике $L_p[0,1]$, $p>0$, к функции $f(x)\in L_p[0,1]$, если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,S_k(x)\quad\left(S_k(x)=\sum_{l=1}^{k} u_l(x)\right)$$

сходятся в метрике $L_p[0,1]$ для всех $n=1,2,\cdots$ и T-средние

$$A_n(x,\ T)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,S_k(x)$$

сходятся к $f(x)$ в метрике L_p [0,1], т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |A_n(x,\ T)-f(x)|^p\,dx=0.$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммируемым по мере на отрезке [0, L] методом $T=\|a_{mk}\|$ к функции $f(x)$, если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,S_k(x)$ сходятся по мере на отрезке [0,1] для всех $n=1,2,\cdots$ и T-средние $A_n(x,\ T)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,S_k(x)$ сходятся к $f(x)$ по мере на отрезке [0,1].

Заметим, что из сходимости функционального ряда по мере или в метрике $L_p[0,1]$, $0<p<1$, вообще говоря, не следует его суммируемость регулярными методами в тех же метриках.

Случай ортогональных рядов заслуживает особого исследования, так как можно ожидать, что для специальных рядов могут иметь место другие явления.

В настоящей работе исследуется взаимосвязь сходимости и суммируемости регулярными методами общих ортогональных рядов. При этом в основном рассматриваются сходимость или суммируемость по мере и в метрике $L_p[0,1]$, $0<p<1$.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой полной в $L_2[0,1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ и для любого ленейного регулярного метода $T=\|b_{mk}\|$, где*

$$\lim_{m\to\infty}\max_k |b_{mk}|=0, \tag{7}$$

существуют ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varphi_k(x) \tag{8}$$

и линейный регулярный метод суммирования

$$T_0 = \|a_{mk}\|, \tag{9}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx = 0, \text{ где } 0 < p < 1;$$

2) *последовательность* $\{A_n(x, T_0)\}_{n=1}^{\infty}$, T_0*-средних ряда* (8), *определяемых матрицей* (9), *не сходится к нулю как в метрике* L_p [0,1], *так и по мере на отрезке* [0,1], *хотя ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x), \quad S_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_l \varphi_l(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

сходятся в метрике L_p [0,1];

3) *матрица* $\|a_{mk}\|$ *получается из матрицы* $\|b_{mk}\|$ *добавлением бесконечного числа нулевых столбцов.*

Теорема 2. *Для любого заранее заданного линейного регулярного метода суммирования* $T = \|a_{mk}\|$, *удовлетворяющего условию* (7), *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по некоторой, зависящей от метода T, *полной в* L_2 [0,1] *ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}$, *который удовлетворяет условиям:*

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx = 0, \text{ где } 0 < p < 1;$$

2) *последовательность* $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$, T*-средних ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, *определяемых матрицей* $T = \|a_{mk}\|$, *не сходится к нулю как в метрике* L_p [0,1], *так и по мере на отрезке* [0,1], *хотя ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad S_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_l \varphi_l(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

сходятся в метрике L_p [0,1].

Кроме того оказывается, что для некоторых полных ортогональных систем $\{\varphi_n(x)\}$ (например, для системы Хаара) сходимость по мере произвольного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ равносильна его суммируемости по мере некоторым, отличным от сходимости регулярным методом. А именно, в § 3 приведен пример конечнострочного линейного регулярного метода суммирования T, удовлетворяющего условию (7), который вместе с тем обладает тем свойством, что суммируемость по мере этим методом любого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$ по системе Хаара эквивалентна его сходимости по мере (см. теорему 3, § 3).

При доказательстве теорем 1 и 2 использована лемма А. А. Талаляна [1].

Лемма (А. А. Талаляна [1]). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система, $\Phi(x)\in L_p[0,1], 0<p<1$ и p_0—фиксированное число, $0<p_0<p$.

Тогда для всякого натурального N и положительного η существует полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x)=\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x),\ m>N,$$

который удовлетворяет условиям:

$$\alpha)\qquad \int_0^1 |H(x)-\Phi(x)|^q\,dx<\eta,\ p_0\leqslant q\leqslant p;$$

$$\beta)\qquad \int_0^1 \left|\sum_{k=N}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|^q dx\leqslant\eta+\int_0^1 |\Phi(x)|^q\,dx.$$

$$(N\leqslant n\leqslant m,\ p_0\leqslant q\leqslant p).$$

Доказательство теоремы 1.

Пусть

$$T_0=\|b_{ij}\| \tag{1.1}$$

—линейный регулярный метод суммирования, для которого имеет место

$$\lim_{i\to\infty}\max_j |b_{ij}|=0. \tag{1.2}$$

Не нарушая общности, можем считать, что

$$\max_j |b_{ij}|<1,\ i=1,2,\cdots. \tag{1.3}$$

Пусть далее $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{1}{10H}, \tag{1.4}$$

где H — число, фигурирующее в условии (4).

Пользуясь условиями (4) и (6), натуральные числа i_1 и n_1 выберем настолько большими, чтобы выполнялись условия

$$\left|\sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j}-1\right|<\varepsilon_1, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=n_1+1}^{\infty} |b_{ij}|<\varepsilon_1, \text{ при } i\leqslant i_1. \tag{1.6}$$

Пусть $j_1<j_2<\cdots<j_{\tau_1}\leqslant n_1$ — те натуральные числа, для которых

$$b_{i_1 j_k}\neq 0,\ k=1, 2,\cdots, \tau_1. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\Delta_k=\left(\sum_{l=1}^{k-1}\frac{|b_{i,j_l}|}{H},\ \sum_{l=1}^{k}\frac{|b_{i,j_l}|}{H}\right)(k=1,\cdots, \tau_1) \tag{1.8}$$

(при $k=1$ сумма $\sum_{l=1}^{k-1}\frac{|b_{i,j_l}|}{H}$ равна нулю)

$$\left.\begin{array}{l} f_l(x)\equiv 0 \text{ при } l\leqslant n_1,\ l\neq j_1,\ j_2,\cdots, j_{\tau_1},\ x\in[0,1] \\ f_{j_k}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|b_{i,j_k}|} \text{ при } x\in\Delta_k \\ \quad 0 \text{ при } x\in[0,1]\setminus\Delta_k\end{cases} \\ \quad (k=1, 2,\cdots, \tau_1) \\ f_{n_1+1}(x)\equiv 0 \quad \text{при} \quad x\in[0,1] \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

$$F_1=\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j} f_j(x)\right|=1\right\}. \tag{1.10}$$

Отсюда, из (4), (1.5), (1.7), (1.8) и (1.9) имеем

$$\text{mes } E_1>\frac{1-\varepsilon_1}{H}$$

и

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j}\, f_j(x)\right|^p dx\geqslant\int_{E_1}\left|\sum_{j=1}^{n_1+1} b_{i,j} f_l(x)\right|^p dx>\frac{1-\varepsilon_1}{H}.$$

Предположим, что определены числа i_q, n_q, функции $f_1(x),\cdots, f_{n_1}(x),\cdots$ $\cdots, f_{n_{q-1}+1}(x),\cdots, f_{n_q}(x)$, $f_{n_q+1}(x)$ и множества $E_1, E_2,\cdots, E_q$.

Пользуясь условиями (4), (5) и (6) натуральные числа i_{q+1} и n_{q+1} выберем настолько большими, чтобы имели место неравенства

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_q+1} b_{ij} f_j(x)\right|^p dx+\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{q} b_{in_k+1}\, f_{n_k}(x)\right|^p dx<\varepsilon_{q+1} \text{ при } i\geqslant i_{q+1}, \tag{1.11}$$

$$\left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j}-1\right|<\varepsilon_{q+1}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=n_{q+1}+1}^{\infty} |b_{ij}|<\varepsilon_{q+1} \quad \text{при} \quad i \leqslant i_{q+1}. \tag{1.13}$$

Пусть $n_q+1<j_{\tau_q+1}<j_{\tau_q+2}<\cdots<j_{\tau_{q+1}} \leqslant n_{q+1}$ — все те натуральные числа, для которых

$$b_{i_{q+1}j_k} \neq 0, \ k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1}. \tag{1.14}$$

Обозначим

$$\Delta_k=\left(\sum_{l=\tau_q+1}^{k-1} \frac{|b_{i_{q+1}j_l}|}{H}, \sum_{l=\tau_q+1}^{k} \frac{|b_{i_{q+1},j_l}|}{H}\right) \tag{1.15}$$

$$(k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1})$$

(при $k=\tau_q+1$ сумма $\sum\limits_{l=\tau_q+1}^{k-1} \frac{|b_{i_{q+1}j_l}|}{H}$ равна нулю)

$$\left.\begin{aligned}
&f_j(x) \equiv 0 \ \text{при} \ n_q+1<j \leqslant n_{q+1}, \ j \neq j_k, \ k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [0,1] \\
&f_{j_k}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|b_{i_{q+1}j_k}|} & \text{при} \quad x \in \Delta_k \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \Delta_k \end{cases} \\
&\qquad (k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1}) \\
&f_{n_{q+1}+1}(x) \equiv 0 \quad \text{при} \ x \in [0,1]
\end{aligned}\right| \tag{1.16}$$

и

$$E_{q+1}=\left\{x: \left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j} f_j(x)\right|=1\right\}. \tag{1.17}$$

Отсюда, учитывая (4), (1.12), (1.14), (1.15) и (1.16) имеем

$$\operatorname{mes} E_{q+1}>\frac{1-\varepsilon_{q+1}}{H} \tag{1.18}$$

и

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j} f_j(x)\right|^p dx \geqslant \int_{E_{q+1}} \left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}+1} b_{i_{q+1}j} f_j(x)\right|^p dx >$$

$$>\frac{1-\varepsilon_{q+1}}{H}. \tag{1.19}$$

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, \tag{1.20}$$

определенных равенствами (1.9) и (1.16), натуральные числа $i_1 < i_2 < \cdots < i_q < \cdots$; $n_1 < n_2 < \cdots < n_q < \cdots$ и множества $E_1, E_2, \cdots, E_q, \cdots$, которые удовлетворяют условиям (1.11), (1.13) и (1.19).

Докажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} f_j(x), \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.21}$$

сходится в метрике $L_p [0,1]$.

Так как в силу (1.15) и (1.16) имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{H}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

то учитывая также условия (4) (см. введение), получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 |b_{ij}|\, |f_j(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \to \infty, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{1.22}$$

Таким образом, ряды (1.21) сходятся в метрике $L_p [0,1]$, а следовательно, сходятся также в метрике $L_p [0,1]$, $0 < p < 1$.

Используя лемму 1, с помощью матрицы (1.1) построим линейный регулярный метод суммирования

$$T = \| a_{ij} \| \tag{1.23}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1.24}$$

по системе $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющие требованиям теоремы 1.

Сначала покажем, что последовательность $\{f_k(x)\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx = 0, \quad 0 < p < 1, \tag{1.25}$$

$$\lim_{i \to \infty} \sup \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} f_j(x) \right|^p dx > 0. \tag{1.26}$$

Из (1.15) и (1.16), предполагая, что $n_q + 1 < n \leqslant n_{q+1}$, имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{|b_{i_{k+1} n}|^p} \cdot \dfrac{|b_{i_{k+1} n}|}{H} & \text{при } n = j_{\tau_{k+1}}, \cdots, j_{\tau_{k+1}}, \ k = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 \text{ — для остальных } n, & n_k < n \leqslant n_{k+1}. \end{cases}$$

Отсюда и из (1.2) вытекает (1.25).

Проверим выполнение условия (1.26)

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx \geqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx -$$

$$-\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx - \int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx. \tag{1.27}$$

Из (1.13) и (1.16) мы имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right| dx < \frac{\varepsilon_q}{H}, \tag{1.28}$$

следовательно, имея ввиду (1.4), возьмем q_0 настолько большим, чтобы

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_k+1}^{\infty} b_{i_k j} f_j(x)\right|^p dx < \frac{1}{4H},\ q > q_0. \tag{1.29}$$

Таким образом, из (1.27), (1.11), (1.19) и (1.29) будем иметь

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx > \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \varepsilon_q - \frac{1}{4H},\ q > q_0. \tag{1.30}$$

Отсюда, так как $\varepsilon_q \to 0$, вытекает (1.26).

Теперь приступим к построению матрицы (1.23) и ряда (1.24). В формулировке леммы 1, полагая $\Phi(x) = f(x)$, $N = 1$, $q = p$, $\eta = \varepsilon_1$ определим полином

$$\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x),$$

который удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - f_1(x)\right|^p dx < \varepsilon_1, \tag{1.31}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|^p dx \leqslant \varepsilon_1 + \int_0^1 |f_1(x)|^p dx, \tag{1.32}$$

где $1 \leqslant n \leqslant m_1$.

Положим

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \cdots, m_1 - 1;\ i = 1, 2, \cdots,$$
$$a_{i m_1} = b_{i1},\ i = 1, 2, \cdots. \tag{1.33}$$

Предположим, что определены полином $\sum_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x)$ и числа a_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, m_l$; $i = 1, 2, \cdots$. В формулировке леммы, полагая $\Phi(x) =$

$= f_{l+1}(x) - \sum_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x)$, $N = m_l + 1$, $q = p$, $\eta = \varepsilon_{l+1}$, определим полином

$$\sum_{k=m_l+1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k(x)$$

так, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k(x) - f_{l+1}(x) \right|^p dx < \varepsilon_{l+1}, \tag{1.34}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=m_l+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \varepsilon_{l+1} + \int_0^1 \left| f_{l+1}(x) - \sum_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx, \tag{1.35}$$

где $m_l + 1 < n \leqslant m_l + 1$.

Положим

$$a_{ij} = 0 \text{ при } j = m_l + 1, \cdots, m_{l+1} - 1; \ i = 1, 2, \cdots,$$
$$a_{i m_{l+1}} = b_{i\, l+1}, \ i = 1, 2, \cdots. \tag{1.36}$$

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим матрицу (1.23) и ряд (1.24). Теперь докажем, что они удовлетворяют всем требованиям теоремы 1. Требование 3) выполнено, в силу (1.33) и (1.36). Проверим выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Пусть n — произвольное натуральное число и r выбрано так, что $m_r < n \leqslant m_{r+1}$.

Имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_r(x) \right|^p dx +$$
$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=m_r+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx + \int_0^1 |f_r(x)|^p dx. \tag{1.37}$$

Из (1.35) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=m_r+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \varepsilon_{\eta+1} + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_{r+1}(x) \right|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_{r+1} + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_r(x) \right|^p dx + \int_0^1 |f_r(x)|^p dx + \int_0^1 |f_{r+1}(x)|^p dx. \tag{1.38}$$

Учитывая (1.37), (1.34), (1.38), (1.25) и (1.4), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right|^p dx=0. \tag{1.39}$$

Таким образом, условие 1) теоремы 1 выполнено.

Прежде чем проверить условие 2) покажем, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}S_j(x),\ i=1,2,\cdots \tag{1.40}$$

сходятся в метрике $L_p\,[0,1]$.

Учитывая (1.36), достаточно доказать, что

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\to 0 \text{ при } N>n\to\infty,\ i=1,2,\cdots.$$

Из (1.34) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\leqslant\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}\left(S_{m_j}(x)-f_j(x)\right)\right|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}f_j(x)\right|^p dx\leqslant\sum_{j=n}^{N}|b_{ij}|^p\cdot\int_0^1|S_{m_j}(x)-f_j(x)|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}f_j(x)\right|^p dx\leqslant\sum_{j=n}^{N}|b_{ij}|^p\cdot\varepsilon_j+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}f_j(x)\right|^p dx.$$

Отсюда, из (1.4) и из того факта, что ряд (1.21) сходится в метрике $L_p\,[0,1]$, вытекает

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N}b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\to 0, \text{ при } N>n\to\infty.$$

Учитывая (1.36), можем написать

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{i_qj}S_j(x)\right|^p dx=\int_0^1\left|\sum_{r=1}^{\infty}b_{i_qr}S_{m_r}(x)\right|^p dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\left|\sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q}b_{i_qr}S_{m_r}(x)\right|^p dx-\int_0^1\left|\sum_{r=1}^{n_{q-1}+1}b_{i_qr}S_{m_r}(x)\right|^p dx- \tag{1.41}$$

$$-\int_0^1\left|\sum_{r=n_q+1}^{\infty}b_{i_qr}S_{m_r}(x)\right|^p dx.$$

Из (1.19) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r} S_{m_r}(x) \right|^p dx \geqslant \int_0^1 \left| \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q r} f_r(x) \right|^p dx -$$

$$- \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \int_0^1 \left| |S_{m_r}(x) - f_r(x)|^p dx > \frac{1-\varepsilon_k}{H} - \right. \tag{1.42}$$

$$- \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \varepsilon_r.$$

Далее из (1.11) и (1.34) получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q r} S_{m_r}(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{r=1}^{n_{k-1}+1} |b_{i_k r}|^p \int_0^1 |S_{m_r}(x) - f_r(x)|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left\| \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q r} f_r(x) \right|^p dx < \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r + \varepsilon_q, \tag{1.43}$$

а из (1.29) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{r=n_q+1}^{\infty} b_{i_q r} S_{m_r}(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \int_0^1 |S_{m_n}(x) - f_r(x)|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{r=n_q+1}^{\infty} b_{i_q r} f_r(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p| \cdot \varepsilon_r + \frac{1}{4H} \cdot \tag{1.44}$$

при $q \geqslant q_0$

Таким образом, из (1.41)—(1.44) получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{i_q j} S_j(x) \right|^p dx > \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r -$$

$$- \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \varepsilon_q - \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \frac{1}{4H} =$$

$$= \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \varepsilon_q - \sum_{r=1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \frac{1}{4H}, \quad q \geqslant q_0.$$

Из полученного неравенства вытекает, что T_0 — средние ряда (1.24) не сходятся к нулю в метрике $L_p[0,1]$.

Теперь докажем, что они не сходятся к нулю и по мере. Сначала покажем, что последовательность

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right\}_{q=1}^{\infty} \tag{1.45}$$

не сходится к нулю по мере при $q \to \infty$.

Из (1.15), (1.16) и (1.13) имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right| dx \leqslant \frac{1}{H} \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}| < \frac{\varepsilon_{q+1}}{H}. \tag{1.46}$$

Отсюда, из (1.11), (1.17), (1.18) получаем, что последовательность (1.45) не сходится к нулю по мере. С другой стороны из (1.36) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} S_j(x) - b_{ij} f_j(x)\right|^p dx = \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} (S_{m_j}(x) - f_j(x)\right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^p \cdot \varepsilon_j \leqslant \max_j |b_{ij}|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j. \tag{1.47}$$

Учитывая (1.2) и (1.4) получаем, что левая часть неравенства (1.47) сходится к нулю. Отсюда, учитывая, что последовательность (1.45) не сходится к нулю по мере, вытекает, что и T_0-средние ряда (1.24) не сходятся к нулю по мере, что и доказывает условие 2).

Таким образом теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим линейный регулярный метод суммирования (1.1) и последовательность функций (1.20), которые были определены выше равенствами (1.9) и (1.16). Возьмем следующую подпоследовательность последовательности (1.20):

$$\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty} \setminus \{f_{n_k+1}(x)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{2.1}$$

где функции расположены по их порядку в первоначальной системе (1.20).

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$. С помощью леммы 1 определим последовательность полиномов

$$\left\{\psi_l(x) = \sum_{i=m_{l-1}+1}^{m_l} c_i \varphi_i(x)\right\}, \; l \neq n_k+1, \; k=1, 2, \cdots; \; 1 \leqslant l < +\infty, \tag{2.2}$$

которые удовлетворяют условию

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=m_{l-1}+1}^{m_l} c_i \varphi_i(x) - \left(f_l(x) - \sum_{i=1}^{m_{l-1}} c_i \varphi_i(x)\right)\right|^p dx < \varepsilon_l, \tag{2.3}$$

где $l \neq n_k+1$, $k=1, 2, \cdots$.

Пусть функции $\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ дополняют систему (2.2) до полной в $L_2[0,1]$ ортогональной системы.

Обозначим

$$\psi_{n_k+1}(x)=\theta_k(x),\ k=1,2,\cdots. \tag{2.4}$$

Таким образом, мы определим полную ортонормированную систему $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\|\psi_n(x)\|_2}\cdot\psi_n(x). \tag{2.5}$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Phi_k(x), \tag{2.6}$$

где

$$a_k=\begin{cases}\|\psi_k\|_2, & \text{если } k\neq n_i+1,\ i=1,2,\cdots\\ 0, & \text{если } k=n_i+1,\ i=1,2,\cdots.\end{cases} \tag{2.7}$$

Докажем, что ряд (2.6) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Проверим выполнение условия 1). Обозначим

$$n'=\begin{cases}n-1, & \text{если } n=n_k+1,\ k=1,2,\cdots,\\ n & \text{для остальных } n.\end{cases} \tag{2.8}$$

Отсюда, из (2.7), (2.3), (2.4) и (2.5) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k(x)\right|^p dx=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n'} a_k\Phi_k(x)\right|^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n'} a_k\Phi_k(x)-f_{n'}(x)\right|^p dx+\int_0^1|f_{n'}(x)|^p\,dx< \tag{2.9}$$

$$<\varepsilon_{n'}+\int_0^1|f_{n'}(x)|^p\,dx.$$

Учитывая (2.8), (1.2), (1.4) и определение функции (1.20), из неравенства (2.9) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k(x)\right|^p dx=0. \tag{2.10}$$

Проверим выполнение условия 2). Сначала докажем, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}S_j(x),\ i=1,2,\cdots,\ \text{где } S_j(x)=\sum_{k=1}^{j} a_k\Phi_k(x), \tag{2.11}$$

сходятся в метрике $L_p[0,1]$. Учитывая (2.7), (2.8) и (2.3), имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}S_j(x)\right|^p dx\leqslant\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}(S_{j'}(x)-f_{j'}(x)\right|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}f_{j'}(x)\right|^p dx<2\sum_{j=n}^m|b_{ij}|^p\cdot\varepsilon_{j'}+\tag{2.12}$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}f_{j'}(x)\right|^p dx.$$

Так как в силу (1.15) и (1.16) имеем

$$\int_0^1|f_n(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{H},\ n=1,2,\cdots,\tag{2.13}$$

то учитывая также условие (4) (см. введение), получаем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}f_{j'}(x)\right|dx\leqslant\frac{1}{H}\sum_{j=n}^m|b_{ij}|\to 0\ \text{при}\ n,\ m\to\infty.\tag{2.14}$$

Таким образом, из (2.12), учитывая (1.4) и (2.14), получаем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^m b_{ij}S_j(x)\right|^p dx\to 0,\ \text{при}\ n,\ m\to\infty.\tag{2.15}$$

Далее имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^\infty b_{i_q}S_j(x)\right|^p dx\geqslant\int_0^1\left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_qj}S_j(x)\right|^p dx-$$

$$-\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{ij_q}S_j(x)\right|^p dx-\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_qj}S_j(x)\right|^p dx.\tag{2.16}$$

Из (2.3) и (1.19) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_qj}S_j(x)\right|^p dx\geqslant\int_0^1\left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_qj}f_j(x)\right|^p dx-$$

$$-\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q}|b_{i_qj}|^p\int_0^1|S_j(x)-f_j(x)|^p\,dx\geqslant\frac{1-\varepsilon_q}{H}-\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q}|b_{i_qj}|^p\,\varepsilon_j.\tag{2.17}$$

Из (2.3), (2.7), (2.8) и (1.11) следует

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_qj}S_j(x)\right|^p dx\leqslant\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_qj}(S_{j'}(x)-f_{j'}(x)\right|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx \leqslant \sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} + \varepsilon_q. \tag{2.18}$$

Из (2.3), (2.7) и (2.8) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx \leqslant \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \int_0^1 |S_{j'}(x)-f_{j'}(x)|^p\, dx +$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx \leqslant \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} +$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx. \tag{2.19}$$

Из (2.16)—(2.19) получаем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx \geqslant \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} - \varepsilon_q - \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} - \tag{2.20}$$

$$-\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx \geqslant \frac{1-\varepsilon_q}{H} -$$

$$-\max |b_{i_q j}|^p \cdot 5 \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j - \int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx.$$

С другой стороны, из (1.13), (1.15), (1.16) получаем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right| dx \to 0 \text{ при } q\to\infty, \tag{2.21}$$

следовательно

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x)\right|^p dx \to 0 \text{ при } q\to\infty. \tag{2.22}$$

Отсюда, учитывая (1.3) и (1.4), из (2.20) и (2.22) получаем, что T_0-средние ряда (2.6) че сходятся к нулю в метрике $L_p\,[0,1]$. Имея ввиду (1.11), (1.17), (1.18) и (2.21), тем же методом, что и в теореме 1, нетрудно показать, что T_0-средние ряда (2.6) не сходятся к нулю и по мере.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Сходимость и суммируемость рядов по системе Хаара

В этом параграфе рассматривается следующий конечнострочный линейный регулярный метод суммирования

$$T=\|a_{mk}\|, \tag{3.1}$$

где

$$a_{1k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=1\\ 0 \text{ при } k\neq 1,\end{cases}$$

$$a_{2k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=2\\ 0 \text{ при } k\neq 2,\end{cases}$$

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n-2}} \text{ при } 2^{n-2}+1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}\\ 0 \text{ — при остальных } k\end{cases}$$

$$(n=3,\ 4,\cdots).$$

для которого доказывается следующая

Теорема 3. *Ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\chi_k(x)$$

по системе Хаара и последовательности

$$\{A_n(x,\ T)\},\ n=1,\ 2,\cdots$$

T-средних этих рядов, определенных матрицей (3.1), *сходятся почти всюду (по мере) на отрезке* [0,1] *одновременно к одной и той же функции.*

Доказательство. Рассмотрим линейный регулярный метод суммирования, определяемый матрицей (3.1), и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\chi_k(x) \tag{3.2}$$

по системе Хаара.

Пусть

$$A_n(x,\ T)=\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\,S_m(x),\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{3.3}$$

где $S_m(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k\chi_k(x)$ — последовательность T-средних ряда (3.2), определяемых матрицей (3.1).

Сначала покажем, что почти всюду сходимость ряда (3.2) и последовательности (3.3) эквивалентны.

Так как матрица (3.1) регулярна, то из сходимости почти всюду ряда (3.2) вытекает сходимость почти всюду последовательности (3.3).

Теперь покажем, что из сходимости почти всюду на отрезке [0,1] последовательности (3.3), вытекает сходимость почти всюду на отрезке [0,1] ряда (3.2).

Представим $A_n(x, T)$ в следующем виде:

$$A_n(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) = S_{2^{n-2}}(x) + c_{2^{n-2}+1} \chi_{2^{n-2}+1}(x) +$$

$$+ \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}} c_{2^{n-2}+2} \chi_{2^{n-2}+2}(x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} c_{2^{n-1}} \chi_{2^{n-1}}(x). \tag{3.4}$$

Обозначим

$$B_n(x) = A_n(x, T) - S_{2^{n-2}}(x) = c_{2^{n-2}+1} \chi_{2^{n-2}+1}(x) +$$

$$+ \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}} c_{2^{n-2}+2} \chi_{2^{n-2}+2}(x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} c_{2^{n-1}} \chi_{2^{n-1}}(x). \tag{3.5}$$

Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что

$$\lim_{n \to \infty} B_n(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } [0,1], \tag{3.6}$$

если последовательность (3.3) почти всюду сходится.

Предположим противное. Пусть

$$E \subset [0,1], \ \text{mes } E > 0,$$

и на множестве E последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю.

Обозначим

$$E_k = \left\{x\colon x \in E, \ \limsup_{n \to \infty} |B_n(x)| > \frac{1}{k}\right\}. \tag{3.7}$$

Ясно, что

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots; \ \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$$

и

$$\lim_{k \to \infty} \text{mes } E_k = \text{mes } E.$$

Следовательно, существует натуральное число k_0, для которого

$$\text{mes } E_{k_0} > 0. \tag{3.8}$$

Так как последовательность

$$A_n(x, T) - A_{n-1}(x, T), \ n = 1, 2, \cdots \tag{3.9}$$

почти всюду сходится к нулю, то по теореме Егорова существует множество G,

$$G \subset E_{k_0}, \ \text{mes } G > 0,$$

на котором последовательность (3.9) равномерно сходится к нулю.

Пусть x_0, $x_0 \in G$ — точка плотности множества G, где

$$x_0 \neq \frac{l}{2^m}, \ m = 1, 2, \cdots; \ l = 1, 2, \cdots.$$

Пусть далее $B_{n_l}(x)$—подпоследовательность последовательности (3.5), удовлетворяющая условию

$$|B_{n_i}(x_0)| > \frac{1}{k_0}. \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает существование номера $n(i)$, $2^{n_i-2} < n \leqslant 2^{n_i-1}$, для которого

$$|c_{n(i)} \cdot \chi_{n(i)}(x)| > \frac{1}{k_0}.$$

С другой стороны, из определения системы Хаара следует, что

$$|B_{n_i}(x)| > \frac{1}{k_0} \tag{3.11}$$

всюду на множестве $\{x: \chi_{n(i)}(x) \neq 0\}$.

Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{k_0}$. Пусть натуральное число N настолько велико, что

$$|A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| < \varepsilon \text{ при } i \geqslant N,\ x \in G. \tag{3.12}$$

Можно считать также, что

$$\frac{\operatorname{mes} \Delta_{n(i)} \cap G}{\operatorname{mes} \Delta_{n(i)}} > \frac{1}{2} \text{ при } i > N, \tag{3.13}$$

где $\Delta_{n(i)}$ — интервал, вне которого $\chi_{n(i)}(x) = 0$. Из (3.13) будем иметь

$$\{x: \chi_{n(i)}(x) > 0\} \cap G \neq \varnothing \text{ и } \{x: \chi_{n(i)}(x) < 0\} \cap G \neq \varnothing,\ i > N. \tag{3.14}$$

Легко видеть, что

$$|A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| = |B_{n_i}(x) + \frac{1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-3}+2} \chi_{2^{n_i-3}+2}(x) + \cdots + \frac{2^{n_i-3}-1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-2}} \chi_{2^{n_i-2}}(x)|. \tag{3.15}$$

Из (3.11) и (3.14) при $i > N$ имеем

$$\left\{x: B_{n_i}(x) > \frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing$$

и

$$\left\{x: B_{n_i}(x) < -\frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing.$$

Отсюда и из определения функций Хаара получаем

$$\left\{x: \left| B_{n_i}(x) + \frac{1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-3}+2} \chi_{2^{n_i-3}+2}(x) + \cdots + \frac{2^{n_i-3}-1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-2}} \chi_{2^{n_i-2}}(x) \right| > \frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing,$$

что в силу (3.15) и противоречит условию (3.12). Теперь докажем, что сходимость по мере ряда (3.2) и последовательности (3.3) эквивалентны.

Так как из сходимости по мере ряда (3.2) вытекает сходимость по мере к нулю последовательности

$$c_{2^n+1}\chi_{2^n+1}(x)+\cdots+c_{2^{n+1}}\chi_{2^{n+1}}(x),\ n=1,2,\cdots,$$

а, следовательно, и последовательности $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. 3.5)), то последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$, если ряд (3.2) сходится по мере к $f(x)$.

Остается доказать, что из сходимости по мере последовательности (3.3) вытекает сходимость по мере ряда (3.2).

Предположим, что последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к $f(x)$. Так как

$$A_n(x, T)=S_{2^{n-2}}(x)+B_n(x), \tag{3.16}$$

то для того чтобы доказать сходимость по мере к $f(x)$ ряда (3.2) достаточно показать, что последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к нулю.

Предположим $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю по мере, т. е. существуют положительные числа ε_0, η_0, для которых можно указать последовательность натуральных чисел $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{mes}\{x: |B_{n_l}(x)|>\eta_0\}>\varepsilon_0. \tag{3.17}$$

Учитывая, что последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере, можно указать число $N>0$ такое, что

$$\operatorname{mes}\{x: |A_n(x, T)-A_{n-1}(x, T)|>\eta_0\}<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{3.18}$$

при $n>N$. Пусть $n_l>N$, тогда

$$\operatorname{mes}\{x: |A_{n_l}(x, T)-A_{n_l-1}(x, T)|>\eta_0\}>\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{3.19}$$

Ясно, что

$$|A_{n_l}(x, T)-A_{n_l-1}(x, T)|=|B_{n_l}(x)+$$

$$+\frac{1}{2^{n_l-3}}c_{2^{n_l-3}+2}\chi_{2^{n_l-3}+2}(x)+\cdots+\frac{2^{n_l-3}-1}{2^{n_l-3}}c_{2^{n_l-2}}\chi_{2^{n_l-2}}(x)|. \tag{3.20}$$

Из соотношения (3.17) следует, что существует n, для которого имеет место

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{2^{n_l-1}-n+1}{2^{n_l-2}}c_n\chi_n(x)\right|>\eta_0,\ 2^{n_l-2}<n\leqslant 2^{n_l-1}. \tag{3.21}$$

Пусть $\chi^{(1)}(x), \chi^{(2)}(x), \cdots, \chi^{(k)}(x)$ есть множество всех функций, удовлетворяющих соотношению (3.21).

Обозначим

$$e_i^+ = \{x: c_i \chi^i(x) > 0\} \text{ и } e_i^- = \{x: c_i \chi^i(x) < 0\}. \tag{3.22}$$

$$1 \leqslant i \leqslant k.$$

Так как

$$\frac{1}{2^{n_l-3}} c_{2^{n_l-3}+2} \chi_{2^{n_l-3}+2}(x) + \cdots + \frac{2^{n_l-3}-1}{2^{n_l-3}} c_{2^{n_l-2}} \chi_{2^{n_l-2}}(x) = \text{const}$$

при $x \in e_i^+ \cup e_i^-$, то для произвольного числа i, $i = 1, 2, \cdots, k$, из соотношения (3.20) и (3.21) следует, что

$$|A_{n_l}(x, T) - A_{n_l-1}(x, T)| > \eta_0, \tag{3.23}$$

хотя бы на одном из интервалов e_i^+ и e_i^-. Ясно, что

$$\left.\begin{array}{l} \text{mes } e_i^+ = \text{mes } e_i^-, \ i = 1, 2, \cdots, k \\ (e_i^+ \cup e_i^-) \cap (e_j^+ \cup e_j^-) = \varnothing \ \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, \cdots, k \\ \text{mes} \bigcup\limits_{i=1}^{k} (e_i^+ \cup e_i^-) = \text{mes}\{x: |B_{n_l}(x)| > \eta_0\} < \varepsilon_0 \end{array}\right| . \tag{3.24}$$

Из (3.17), (3.23) и (3.24) следует, что

$$\text{mes}\{x: |A_{n_l}(x, T) - A_{n_l-1}(x, T)| > \eta_0\} > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

что противоречит соотношению (3.19). Полученное противоречие показывает, что последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к нулю, чем и завершается доказательство теоремы 3.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.I.1974

Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Ընդհանուր օրթոգոնալ շարքերի գումարման և զուգամիտության փոխադարձ կապի մասին (ամփոփում)

Ցանկացած լրիվ օրթոգոնալ սիստեմով կառուցվում է շարք, որը զուգամիտում է, ինչպես նաև գումարվում է (L_p մետրիկայում, $0 < p < 1$) մի որոշ մեթոդով, բայց տարբեր ֆունկցիաների։

N. O. SINANIAN. *On the interconnection between the convergence and summability of general orthogonal series* (summary)

By every complete orthonormal system a series is constructed, which both converges and sums (in L_p, $0 < p < 1$ matrics) according to some method, but to different sums.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* Представление функций классов L_p, $0<p<1$ ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientarum, Hungarical, Tom. (1—2), 1970, 1—9.