ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

Д. И. ГУРЕВИЧ

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ С exp-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ В КОЛЬЦАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим кольцо H_ρ, равное индуктивному пределу при $A\to\infty$ банаховых пространств целых в C^n функций с нормами

$$\|f\|_A = \sup_{C^n} |f(z)|e^{-A\rho(z)},$$

где $\rho(z)$ — плюрисубгармоническая функция, определяемая следующим образом:

$$\rho(z) = \sum_{l=1}^{n} |\operatorname{Im} z_l|^m + |z|^{m_1} + \lg^{m_2}(1+|z|),\ m\geqslant 1,\ m_1\geqslant 0,\ m_2\geqslant 1. \qquad (0.1)$$

Пусть J — идеал этого кольца. Для любой функции $f\in H_\rho$ обозначим через f_z ее росток в точке $z\in C^n$, а через J_z обозначим идеал кольца H_z ростков голоморфных функций в этой точке, состоящий, по определению, из конечных сумм произведений $f_z g$, где $f\in J$, $g\in H_z$.

Мы говорим, что идеал J локализуем, если он совпадает с совокупностью всех функций $f\in H_\rho$ таких, что $f_z\in J_z$ для любой точки $z\in C^n$.

В настоящей статье мы рассматриваем замкнутые идеалы, порожденные множеством exp-полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i(a^k, z)} p_k(z),$$

где $z\in C^n$, $a^k\in Z^n$, $p_k\in P$, Z — кольцо целых чисел, а P — кольцо полиномов.

Exp-полиномы указанного вида мы будем в дальнейшем называть Z-exp-полиномами.

В книге [5] Л. Эренпрайсом было высказано предположение, из которого, в частности, следует, что идеалы, порожденные в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^n$, конечным набором exp-полиномов с алгебраическими показателями (в том числе, N-exp-полиномов), замкнуты и локализуемы. Эта гипотеза неверна при $n>1$. Покажем это на примере.

Пусть α — такое трансцендентное число, что функции $\sin z$ и $\sin\alpha z$ порождают в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^1$ идеал, не содержащий функцию $f=z$. Тогда нетрудно видеть, что идеал, порожденный в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^2$ функциями $\sin z_1$, $\sin z_2$, $z_1-\alpha z_2$, не локализуем. Отметим, что этот идеал не замкнут. Замкнув его, мы получим другой, уже локализуемый, идеал. Доказательству этого факта применительно ко всем замкнутым идеалам $J\subseteq H_\rho$, $z\in C^2$ с Z-exp-полиномиальными образующими и посвящена настоящая статья.

Точнее говоря, в основной теореме этой статьи мы устанавливаем справедливость следующего утверждения: замыкание любого идеала, порожденного в кольце H_ρ, $z\in C^2$, где ρ определена по формуле (0.1), произвольным множеством Z-exp-полиномов, локализуемо.

Сформулированное утверждение имеет приложение к теории систем дифференциально-разностных уравнений. А именно, из него вытекает следующая

Теорема. *Пусть задана система дифференциально-разностных уравнений вида*

$$\sum_{k=1}^{s} p_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x-a^k)=0,\ x\in R^2,\ a^k\in Z^2\ u\in\Phi, \tag{0.2}$$

где Φ — некоторое функциональное пространство на R^2, определенное ниже, в частности, пространство E *Шварца. Пусть X — подпространство решений системы* (0.2). *Тогда в X плотны* exp-*полиномиальные решения этой системы.*

§ 1. Предварительные построения

В кольце H_ρ, $z\in C^n$, с весовой функцией ρ, задаваемой формулой (0.1), обратимы все функции вида $e^{i(a,z)}$, $a\in Z^n$. Умножая произвольный Z-exp-полином на подходящую функцию такого вида, можно добиться, чтобы вектора $a^k\in Z^n$, входящие в показатели степени ее экспонент, имели неотрицательные координаты. Z-exp-полиномы, удовлетворяющие последнему условию, мы будем называть Z_+-exp-полиномами.

Отметим, что кольцо всех Z_+-exp-полиномов от n переменных — нетерово. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть отображение, ставящее каждому Z_+-exp-полиному f полином p_f от $2n$ переменных, связанный с f соотношением $f(z)=p_f(z, e^{iz})$. Очевидно, что это отображение есть изоморфизм на (нетерово) кольцо полиномов от $2n$ переменных.

Следовательно, для любого идеала $J\subseteq H_\rho$, порожденного произвольной совокупностью Z-exp-полиномов, существует конечный набор Z_+-exp-полиномов, его порождающий. Поэтому, не ограничивая общности, мы будем рассматривать только идеалы $J\subseteq H_\rho$, порожденные конечным числом Z_+-exp-полиномов.

Мы будем говорить, что Z_+-exp-полином f содержит z_1 (или e^{iz_1}), если степень полинома p_f по соответствующей переменной больше нуля.

Для любых двух Z_+-exp-полиномов g_1 и g_2 обозначим через $R(g_1, g_2)$ Z_+-exp-полином g такой, что $p_g=R(p_{g_1}, p_{g_2})$, где $R(p_{g_1}, p_{g_2})$ — результат полиномов p_{g_1} и p_{g_2}. Индексом внизу мы будем указывать исключаемую переменную, например, $R_{z_1}(g_1, g_2)$ или $R_{e^{lz_1}}(g_1, g_2)$. При этом мы, конечно, предполагаем, что оба Z_+-exp-полинома g_1 и g_2 содержат эту переменную.

Предложение 1. 1. *Пусть* $f_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant t$ Z_+-exp-*полиномы от двух переменных, такие, что многочлены* p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$, *не имеют общего делителя* $h \not\equiv \text{const}$. *Пусть* J — *идеал, порожденный этими* Z_+-exp-*полиномами в кольце* H_ρ. *Тогда или в идеале* J *существует* Z_+-exp-*полином* $g \not\equiv 0$, *зависящий только от* z_2, *или в нем существуют два* Z_+-exp-*полинома* $g_1 \not\equiv 0$ *и* $g_2 \not\equiv 0$ *такие, что* g_1 *не содержит* e^{lz_1}, *а* g_2 — z_1.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в условиях предложения существуют коэффициенты λ_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, такие, что полиномы p_{f_1} и $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j p_{f_j}$ взаимно просты. Рассмотрим случай, когда Z_+-exp-полиномы f_1 и $h = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j f_j$ содержат и z_1 и e^{lz_1}. Тогда определены результанты $R_{z_1}(f_1, h)$ и $R_{e^{lz_1}}(f_1, h)$. Очевидно, что они отличны от тождественного нуля и принадлежат идеалу J. В этой ситуации мы можем положить $g_1 = R_{e^{lz_1}}(f_1, h)$, $g_2 = R_{z_1}(f_1, h)$.

Остальные случаи (когда одна из функций f_1 или h не содержит z_1, но обе содержат e^{lz_1}; когда одна не содержит z_1, а другая — e^{lz_1}, и т. д.) предлагается рассмотреть читателю. □

Для любой функции $g \in \mathrm{H}_\rho$ обозначим через N_g множество ее корней. Обозначим также через π оператор проектирования: $C^2 \ni (z_1, z_2) \to \to z_2 \in C^1$.

В дальнейшем мы будем рассматривать фиксированный идеал $J \subseteq \mathrm{H}_\rho$ с Z_+-exp-полиномиальными образующими f_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, от двух переменных. В пределах первых трех параграфов мы будем предполагать, что $\overline{\pi(\bigcap_j N_{f_j})} \neq C^1$, что полиномы p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$, не имеют общего делителя $h \not\equiv \text{const}$ и, что в идеале J отсутствует exp-полином, зависящий только от z_2.

Для упрощения обозначений будем считать, что $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, где g_1 и g_2 взяты из предложения 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть* $g_1 \not\equiv 0$ *и* $g_2 \not\equiv 0$ — exp-*полиномы от двух переменных, причем* $g_1 = \sum_k z_1^k h_k(z_2)$, $g_2 = \sum_k e^{kaz_1} q_k(z_2)$. Пусть N — *неприводимое аналитическое множество такое, что* $N \subseteq N_{g_1}$, $N \subseteq N_{g_2}$, $\dim N = 1$. *Тогда* N — *комплексная прямая*.

Доказательство предоставляется читателю.

Пусть f_0 — такой Z_+-полином, что $N_{f_0} = N_f$, и $R_{z_1}(f_0, f'_{0z_1}) \not\equiv 0$.

Представим f_0 в виде $f_* \prod_{k=1}^{r} (z_1 - c_k z_2 - d_k)$, где f_* — Z_+-exp-полином, не имеющий делителей вида $z_1 - cz_2 - d$. Обозначим через ∇ оператор „дифференцирования по касательному направлению к множеству N_{f_*}": $\nabla = f_{*z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} - f_{*z_2} \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Предложение 1.3. *Для любого* exp-*полинома*

$$g = \sum_{k=1}^{s} q_k(z_1, z_2) e^{a_k z_1},$$

где все $a_k \in C^1$ различны, а q_k суть полиномы по z_1, такие, что $R_{z_1}(f_*, q_k) \not\equiv 0$, $1 \leqslant k \leqslant s$, существует полином $P(\tau)$ с exp-*полиномиальными коэффициентами и* exp-*полином $h = \sum h_j(z_2) z_1^j$ такие, что $R_{z_1}(f_*, h) \not\equiv 0$, и $P(\nabla) g = h$, причем, если g — Z_+-exp-полином, то коэффициенты P суть Z-exp-полиномы, h — Z_--exp-полином.*

Доказательство. Если $s = 1$, то положим $P(\tau) = e^{-a_1 z_1} \tau^0$, $h = q_1$.

Пусть теперь $s > 1$. Рассмотрим функцию ∇g. Она имеет тот же вид, что и g, т. е. $\nabla g = \sum_{k=1}^{s} p_k(z_1, z_2) e^{a_k z_1}$, где p_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, суть полиномы по z_1. Функция $q_1 \nabla g - p_1 g$ не содержит члена с множителем $e^{a_1 z_1}$. Убедимся сейчас, что все ее коэффициенты при множителях $e^{a_k z_1}$, $k > 1$, отличны от тождественного нуля на любой неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$ такой, что $\overline{\pi N} = C^1$.

Предположим противное. Пусть для определенности коэффициент при $e^{a_2 z_1}$ равен нулю на неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$, для которой $\overline{\pi N} = C^1$.

На любом открытом круге $U \subset C^1 = \pi C^2$, не содержащем корней результанта $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1})$ накрытие $N \xrightarrow{\pi} C^1$ распадается на отдельные листы. Пусть $z_1 = \varphi(z_2)$ — уравнение некоторого листа накрытия $N \xrightarrow{\pi} C^1$ на таком круге.

Для любой функции χ, определенной в C^2, обозначим через χ_φ функцию, определенную на U и равную там $\chi(\varphi(z_2), z_2)$. Поскольку для любой функции

$$f_{*z_1}(\varphi(z_2), z_2) \frac{d}{dz_2} \chi_\varphi = (\nabla \chi)\Big|_{z_1 = \varphi(z_2)},$$

то нетрудно видеть, что наше предположение о коэффициенте при множителе $e^{a_2 z_1}$ эквивалентно условию: функция $u = (q_2)_\varphi e^{a_2 \varphi(z_2)}$ удовлетворяет в круге U дифференциальному уравнению

$$u' (q_1)_\varphi - u \left[\frac{d}{dz_2} (q_1)_\varphi + (q_1)_\varphi a_1 \varphi' \right] = 0.$$

Поскольку этому же уравнению удовлетворяет функция $u = (q_1)_\varphi e^{a_1 \varphi(z_2)}$, то по теореме единственности указанные функции линейно зависимы, т. е. с некоторой константой C выполняется соотношение $(q_2)_{z_2} e^{a_2 z_1} = C (q_1)_{z_2} e^{a_1 z_1}$. Отсюда вытекает, что $(q_2 - Cq_1 e^{(a_1-a_2) z_1})|_N \equiv 0$. Рассмотрим результант $R_{z_1}(q_*, q_2 - Cq_1 e^{(a_1-a_2) z_1})$. Он тоже равен нулю на компоненте N, но отличен от тождественного нуля в C^2.

Нетрудно видеть, что указанный результант имеет вид exp-полинома g_2 из леммы 1.2. По этой лемме N—прямая. Но поскольку $\overline{\pi N} = C^1$, а exp-полином f_* не имеет делителей вида $z_1 - cz_2 - d$, то мы пришли к противоречию, показывающему справедливость промежуточного утверждения.

Положим $\gamma_0 = g$, $\gamma_1 = q_1 \nabla g - p_1 g$, $Q_0(\tau) = \tau^0$, $Q_1(\tau) = q_1\tau - p_1\tau^0$. По индукции строятся функции γ_k, $k = 2, \cdots, s-1$, и полиномы $Q_k(\tau)$ с exp-полиномиальными коэффициентами, такие, что $\gamma_k = Q_k(\nabla) g$, γ_k не содержит слагаемых с множителями $e^{a_j z_1}$, $j \leqslant k$, коэффициенты γ_k при множителях $e^{a_j z_1}$, $j > k$, отличны от тождественного нуля на любой неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$, $\overline{\pi N} = C^1$. Положив теперь $P = e^{-a_s z_1} \times \times Q_{s-1}, h = e^{-a_s z_1} \gamma_{s-1}$, мы получим искомые P и h.

Таким образом первое утверждение предложения 1.3 доказано. Второе — непосредственно вытекает из способа построения полинома P и exp-полинома h. □

§ 2. Локальные и глобальные оценки для голоморфных функций

Предложение 2.1. *Для произвольного* exp-*полинома* $g \not\equiv 0$ *от* n *переменных существуют константы* A, B *и* k *такие, что*

$$|g(z)| \geqslant \hat{d}^k(z, N_g) e^{-A|z| - B}, \tag{2.1}$$

где $\hat{d}(z, N_g) = \min(d(z, N_g), 1)$, *а* $d(z, N_g)$ — *расстояние от точки* z *до* N_g.

Доказательство. Нетрудно видеть, что существуют $a \in C^n$ и линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ порядка } q \text{ такие, что } P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(e^{(a, z)} g) = 1.$$

Тогда с учетом теоремы 4.3 [1] получаем

$$1 = \left| P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) e^{(a, z)} g \right| \leqslant e^{|a||z|} \sum_{|\alpha| \leqslant q} |b_\alpha| |g^{(\alpha)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C e^{|a||z|} \sum_{|\alpha| \leqslant q} \hat{d}^{-|\alpha|}(z, N_g)(1 + |z|)^{3|\alpha|} |g(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C e^{|a||z|} |g(z)| (1 + |z|)^{3|q|} \hat{d}^{-q}(z, N_g),$$

что и составляет искомый результат. □

Замечание 2.2. На самом деле, с некоторыми C и k справедлива более точная оценка

$$C|g(z)| \geqslant \hat{d}^k(z, N_g)(1+|z|)^{-k} e^{H(\omega)|z|},$$

где ω — элемент единичной сферы в C^n, $z=|z|\omega$, а $H(\omega)$ — индикатор роста функции g.

Оценки, аналогичные (2.1), можно доказать для любой функции $g \in H_\rho$, удовлетворяющей уравнению $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g=1$, где $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, ограниченными по модулю величиной $e^{A\rho(z)+B}$. Нам потребуется локальный аналог этого утверждения. Его доказательство мы разобъем на две леммы.

Выражение $K(z, r)$ мы используем для обозначения открытого шара радиуса r с центром в точке $z \in C^n$.

Лемма 2.3 *Пусть функция $g(z)$ аналитична в шаре $K(0, R) \subset C^n$, $0<R\leqslant 1$, и пусть существует линейный дифференциальный оператор $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ порядка q с коэффициентами $h_\alpha(z)$, $|\alpha|\leqslant q$,* $|h_\alpha| \leqslant M_1$ такой, что $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g=h(z)$, *где $h(z)$ и $h_\alpha(z)$, $|\alpha|\leqslant q$ суть некоторые функции в $K(0, R)$. Тогда для любой точки $z\in K(0, R/2)$ и любого числа $0<r\leqslant R/2$ существуют точка $v\in K(z, r)$ и константа C, не зависящая от g, M_1, R, r такие, что*

$$C|g(v)| > \frac{|h(z)|\, r^q}{M_1}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из условий леммы непосредственно вытекают неравенства

$$|h(z)| = \left|P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g\right| \leqslant M_1 \sum_{|\alpha|<q} |g^{(\alpha)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \sum_{|\alpha|\leqslant q} \alpha! \max_{|z_j-v_j|<r/3\sqrt{n}} |g(v)|(3\sqrt{n}/r)^{|\alpha|}.$$

Полицилиндр $\left\{v\in C^n: |v_j-z_j| \leqslant \frac{r}{3\sqrt{n}}, \forall j\right\}$ содержится в шаре $K(z, r)$ и, следовательно, в этом шаре существует искомая точка. ☐

Лемма 2.4. *В условиях предыдущей леммы дополнительно предположим, что $|\operatorname{grad} g| \leqslant M_2$, $M_2\geqslant 1$. Тогда существуют константы D и k, не зависящие от g, M_1, M_2, R такие, что*

$$D|g(z)| \geqslant \min(\hat{d}^{kq}(z, N_g)|h(z)|^k (M_1, M_2^q)^{-k}, 1/2),$$

где $\hat{d}=\min(d(z, N_g), R)$, $z\in K(0, R/2)$.

Доказательство. Фигурировавшую в предыдущей лемме величину r положим равной $\frac{1}{6}\min(\hat{d}, M_2^{-1})$. Зафиксируем точку $z\in K(0, R/2)$ и рассмотрим шар $K(v, 2r)$, где v — точка, удовлетворяющая неравенству (2.2). Отметим, что $K(z, r)\subset K(v, 2r)\subset K(0, R)$.

Если в шаре $K(v, 2r)$ существует точка w такая, что $|g(w)| \geqslant 1$, то
$$|g(z)| \geqslant |g(w)| - M_2|z-w| \geqslant 1 - M_2 \cdot 3r \geqslant 1/2.$$
Если же такой точки нет, то в шаре $K(v, 2r)$ гармоническая функция $-\lg|g(z)|$ не меньше нуля и для нее несложно доказать оценку $-\lg|g(z)| \leqslant -2^{2n}\lg|g(v)|$. Отсюда
$$|g(z)| \geqslant |g(v)|^{2^{2n}} \geqslant |h(z)|^{2^{2n}} M_1^{2^{2n}} C^{-2^{2n}} \left(\frac{1}{6}\min(\tilde{d}, M_2^{-1})\right)^{2^{2n}\cdot q},$$
откуда непосредственно вытекает необходимый результат. □

Лемма 2.5. *Пусть $g(z)$ — функция, голоморфная в круге $K(0, R) \subset C^1$, такая, что $g(0) \neq 0$. $|g(z)| \leqslant M$. Тогда в круге $K(0, R/2)$ число m корней функции g (с учетом их кратности) удовлетворяет неравенству*
$$m \leqslant \log_2 M - \log_2|g(0)|.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon < R/2$. В круге $K(0, R-\varepsilon)$ функция $g(z)$ имеет конечное число корней. Пусть ζ_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, — ее корни, занумерованные в порядке возрастания модулей, из которых первые m корней и только они содержатся в круге $K(0, R/2)$. Тогда, как следует из формулы Йенсена, справедливо неравенство
$$(R-\varepsilon)^k \prod_{j\leqslant k} |\zeta_j|^{-1} \leqslant M/|g(0)|.$$
Очевидно, что
$$(R-\varepsilon)^m (R/2)^{-m} \leqslant (R-\varepsilon)^m \prod_{j\leqslant m} |\zeta_j|^{-1} \leqslant (R-\varepsilon)^k \prod_{j\leqslant k} |\zeta_j|^{-1}.$$
Из произвольности ε вытекает соотношение $2^m \leqslant M/|g(0)|$, эквивалентное доказываемому неравенству. □

На основании приведенных лемм мы можем теперь установить некоторые оценки снизу для функции $\max_j \lg|f_j|$.

§ 3. Оценки снизу для функции $\max_j \lg|f_j|$

Теорема 3.1. *Для любого $l > 0$ существует константа A и последовательность чисел R_j, $j = 1, 2, \cdots$, таких, что $l(j-1) < R_j < lj$ и на множестве $\pi^{-1}\Pi$, где $\Pi = \bigcup_j \partial K(0, R_j)$, а $\partial K(0, R_j)$ — граница круга $K(0, R_j) \subset C^1 = \pi C^2$, выполняется неравенство, $\max_j \lg|f_j(z)| \geqslant -A(|z|+1)$.*

Доказательство. Напомним, что f_1, f_0 и f_* — Z_+-exp-полиномы, являющиеся полиномами по z_1 такие, что $N_{f_1} = N_{f_0}$, $R_{z_1}(f_0, f_{0z_1}) \not\equiv 0$, $f_0 = f_* \prod_{j=1}^{r}(z_1 - c_j z_2 - d_j)$ и f_* не имеет делителей вида $z_1 - cz_2 - d$.

Для каждого $1 \leqslant j \leqslant r$ существует Z-exp-полином f_{i_j} из базисного набора такой, что $f_{i_j}(c_j z_2 + d_j,\ z_2) \not\equiv 0$.

Рассмотрим полином $P(\cdot)$ и Z-exp-полином h, удовлетворяющие условиям предложения 1.3 с $g = f_2$. По этому предложению $R_{z_1}(f_*,\ h) \not\equiv 0$. Поскольку $R_{z_1}(f_*,\ f'_{*z_1}) \not\equiv 0$, то exp-полином

$$\chi = R_{z_1}(f_*,\ f'_{*z_1}) \cdot R_{z_1}(f_*,\ h) \prod_{j=1}^{r} f_{i_j}(c_j z_2 + d_j,\ z_2),$$

зависящий только от z_2, отличен от тождественного нуля.

Пусть ζ_j, $j = 1, 2, \cdots$ — его корни, занумерованные в порядке возрастания модулей. Существует константа C такая, что $C|\zeta_j| > j$ (см., например, [1]). Опишем около каждого корня ζ_j круг с центром в ζ_j и радиуса $a|\zeta_j|^{-2}$, где $a = \dfrac{l}{4C^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{-2}\right)^{-1}$.

Поскольку сумма диаметров этих кругов удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2a|\zeta_j|^{-2} < 2 \cdot \frac{l}{4C^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}\right)^{-1} \cdot C^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \frac{l}{2},$$

то для любого j на интервале $\left(l(j-1) + \dfrac{l}{4},\ lj - \dfrac{l}{4}\right)$ существует число R'_j такое, что окружность $\partial K(0,\ R'_j)$ не пересекает ни один из построенных кругов.

Нетрудно видеть, что расстояние $d(\partial K(0,\ R'_j),\ N_\chi) > (bR'^2_j)^{-1}$ с некоторой b, не зависящей от j. Кроме того, мы считаем, что $(bR'^2_j)^{-1} < \min(1,\ l/4)$ при всех j.

Рассмотрим в $C^1 = \pi C^2 (2\,bR'^2_j)^{-1}$-окрестности окружностей $\partial K(0,\ R'_j)$. Обозначим их через U_j.

Ниже мы покажем, что для всякого j существует константа R_j такая, что $\partial K(0,\ R_j) \subset U_j$ и с некоторыми A и B выполняется соотношение

$$\lg|f_2(z)| > -A|z| - B, \quad z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\Pi, \tag{3.1}$$

где $\Pi = \bigcup\limits_j \partial K(0,\ R_j)$.

Поскольку оценки такого же типа, как это следует из предложения 2.1, выполняются на множестве $\{z \in C^2 : z_1 - c_j z_2 - d_j = 0\} \cap \pi^{-1}\Pi$ для функции $\lg|f_{i_j}(z)|$, то с некоторыми $A_1 \geqslant 0$ и $B_1 \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\max_j \lg|f_j(z)| > -A_1|z| - B_1, \quad z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\Pi.$$

Пусть константы $A_2 \geqslant 0$ и $B_2 \geqslant 0$ таковы, что $\max\limits_j |\operatorname{grad} f_j| \leqslant e^{A_2|z| + B_2}$. Рассмотрим $\dfrac{1}{2} e^{-(A_1+A_2)(|z|+1)-(B_1+B_2)}$-окрестность множества $N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$. Пусть точка v принадлежит ей, а точка $z \in N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$ такова, что $d(v, z) < e^{-(A_1+A_2)(|z|+1)-(B_1+B_2)}$. Одна из функций f_j в этой точке удовлетворяет неравенству $\lg|f_j| \geqslant -A_1|z| - B_1$. Оценим ее модуль в точке v:

$$|f_j(v)| \geqslant |f_j(z)| - |z-v| \max_{[z, v]} |\operatorname{grad} f_j| \geqslant e^{-A_1|z|-B_1} -$$

$$-\frac{1}{2} e^{-(A_1+A_2)(|z|+1)-(B_1+B_2)} e^{A_2(|z|+1)+B_2} = \frac{1}{2} e^{-A_1|z|-B_1} \geqslant \frac{1}{2} e^{-A_1(|v|+1)-B_1}.$$

Следовательно, для любой точки z из указанной окрестности с некоторыми A_3 и B_3 имеет место неравенство $\max_j \lg|f_j(z)| \geqslant -A_3|z| - B_3$.

Рассмотрим дополнение этой окрестности до множества $N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$. Нетрудно видеть, что на нем с некоторыми A_4 и B_4 выполняется оценка $\lg|f_1| > -A_1|z| - B_4$. Положив $A_5 = \max(A_3, A_4)$, $B_5 = \max(B_3, B_4)$, получаем

$$\max_j \lg|f_j| > -A_5|z| - B_5, \quad z \in \pi^{-1}\Pi,$$

что составляет требуемый результат.

Докажем теперь существование констант A, B и последовательности R_j, $j = 1, 2, \cdots$, удовлетворяющих (3.1). Доказательство этого, будем проводить в два этапа. Сначала мы установим, что на многообразии N_{f_*} в некоторой окрестности множества $N_{f_*} \cap \pi^{-1}\Pi'$, где $\Pi' = \bigcup_j \partial K(0, R'_j)$, функция f_2 не может иметь „слишком много“ корней, на основании чего мы сможем выбрать последовательность R_j. Затем мы в некоторой меньшей окрестности оценим функцию $\lg|f_2|$ снизу через расстояние до корней, из чего выведем существование искомых A и B.

Исходя из предложения 2.1 заключаем, что для точек z, принадлежащих U_j, с некоторыми A_0 и B_0, не зависящими от z и j, выполняется неравенство $|\chi(z)| \geqslant e^{-A_0|z|-B_0} R_j^{\prime -2}$. Аналогичное утверждение справедливо для всех exp-полиномов, входящих множителями в функцию χ.

Зафиксируем радиус R'_j и точку $z \in \partial k(0, R'_j)$. Пусть $z_1 = \varphi_k(z_2)$ $1 \leqslant k \leqslant k_0$—уравнения листов накрытия $N_{f_*} \xrightarrow{\pi} C^1$ над кругом $K(z, (2bR_j^{\prime 2})^{-1}$. Здесь k_0 — степень f_* как полинома по z_1. Очевидно, что с некоторыми A_1 и B_1, не зависящими от z и k, $1 \leqslant k \leqslant k_0$, функции $\varphi_k(z_2)$ допускают оценку $|\varphi_k(z_2)| \leqslant e^{A_1 R'_j + B_1}$, $z_2 \in U_j$. Следовательно, при $z_2 \in U_j$ с некоторыми A_2 и B_2 справедливо неравенство

$$|f_2(\varphi_k(z_2), z_2)| \leqslant \exp e^{A_2 R'_j + B_2}. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что существуют полином $P_1(\tau)$ и число m такие, что коэффициенты этого полинома имеют вид $g(f'_{*z_1})^{-m}$, $g \in H_0$, и $P_1(f'_{\cdot z_1}\nabla) = P(\nabla)$, где P — полином, фигурировавший выше. Функция $R_{z_1}(f_\cdot, h)$ представима в виде

$$R_{z_1}(f_\cdot, h) = h_1 \cdot h + h_2 f_\cdot = h_1 P(\nabla)\ f_2 + h_2 f_\cdot = h_1 P_1(f'^{-1}_{\cdot z_1}\nabla) f_2 + h_2 f_\cdot,$$

где h_1, h_2 — $Z_\perp$-exp-полиномы.

С учетом соотношения $f'_{\cdot z_1}(\varphi_k(z_2), z_2)\left(\frac{d}{dz_2}\right)(f_2)_{\varphi_k} = (\nabla f_2)|_{z_1=\varphi_k(z_2)}$ получаем

$$h_1(\varphi_k(z_2), z_2)\,P_1\left(\frac{d}{dz_2}\right)(f_2)_{\varphi_k} = R_{z_1}(f_\cdot, h).$$

Все коэффициенты этого уравнения (мы относим туда и функцию $(h_1)_{\varphi_k}$) оцениваются сверху величиной $\exp e^{A_2R'_j+B_2}$, а функция $R_{z_1}(f_\cdot, h)$ удовлетворяет на U_j неравенству $|R_{z_1}(f_\cdot, h)| > e^{-A_3R'_j-B_3}$ с некоторыми A_3 и B_3, общими для всех j.

Применив к функции $(f_2)_{\varphi_k}$ лемму 2.3 с $R=(5bR'^2_j)^{-1}$, заключаем, что в $(10bR'^2_j)^{-1}$-окрестности точки z существует точка v, для которой с некоторыми A_4 и B_4 $|(f_2)_{\varphi_k}(v)| > \exp(-e^{A_4R'_j+B_4})$, причем A_4 и B_4 не зависят от j, k и точки v.

Круг $K(v, 2(5bR'^2_j)^{-1})$ лежит в $(2bR'^2_j)^{-1}$-окрестности точки $z\in\partial K(0, R'_j)$. Функция $(f_2)_{\varphi_k}$ определена на нем. Применим к ней лемму 2.5. Из этой леммы с учетом неравенства (3.2) следует, что существуют константы A_5 и B_5, не зависящие от j и $z\in\partial K(0, R'_j)$ такие, что в круге $K(v, (5bR'^2_j)^{-1})$, а следовательно, и в круге $K(z, (10bR'^2_j)^{-1})$ число корней функции $(f_2)_{\varphi_k}$ не превосходит величины $e^{A_5R'_j+B_5}$.

Окружность $\partial K(0, R'_j)$ можно покрыть кругами с центрами на ней и радиусами $(10bR'^2_j)^{-1}$ так, чтобы число этих кругов не превосходило величины $[2\pi R'_j : (10bR'^2_j)^{-1}] + 1 = [20\pi bR'^3_j] + 1$ и чтобы центры двух соседних кругов находились друг от друга на расстоянии не большем, чем $(10bR'^2_j)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что указанные круги покрывают $(30bR'^2_j)^{-1}$-окрестность окружности $\partial K(0, R'_j)$ и, следовательно, в эту окрестность проектируется общих корней функций $f_\cdot$ и f_2 не более, чем

$$e^{A_5R'_j+B_5}\cdot k_0([20\pi bR'^3_j]+1) < e^{A_6R'_j+B_6},$$

с некоторыми A_6 и B_6, не зависящими от j.

В $(60bR'^2_j)^{-1}$-окрестности окружности $\partial K(0, R'_j)$ существует окружность $\partial K(0, R_j)$, не пересекающая ни один из кругов, лежащих в этой окрестности и имеющих центры в точках множества $N = \pi\{z \in C^2 : f_2(z) = f_*(z) = 0\}$ и радиусы $e^{-A_4 R_j - B_4}(120\, bR_j^{2})^{-1}$. Отсюда вытекает, что с некоторыми A_7 и B_7, не зависящими от j, имеет место неравенство $d(\partial K(0, R_j), N) > e^{-A_7 R_j - B_7}$.

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства. Пусть $z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\partial K(0, R_j)$ и $z_1 = \varphi(z_2)$ — уравнение листа накрытия $N_{f_*} \xrightarrow{\pi} C^1$, содержащего точку z и определенного в $(60\, bR_j^{2})^{-1}$-окрестности точки $z_2 = \pi z$.

Функцию $\varphi'(z_2)$ оценим по модулю, исходя из формулы $\varphi' = -f'_{*z_2}/f'_{*z_1}$, того факта, что с некоторыми Z_+-exp-полиномами h_1 и h_2 $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1}) = h_1 f_* + h_2 f'_{*z_1}$ и того, что $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1})$ будучи exp-полиномом, оценивается на основании предложения 2.1. При этом мы получим, что в бицилиндре $\{v \in C^2 : |v_1 - z_1| < (60\, bR_j^{2})^{-1},\ |v_2 - z_2| < 1\}$ с некоторыми A_8 и B_8 имеет место неравенство $|\varphi'(v_2)| < e^{A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) + B_8}$.

Пусть точка $v_2 \in C^1 = \pi C^2$ принадлежит $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки $z_2 = \pi z$. Тогда точка $v = (v_1, v_2)$, где $v_1 = \varphi(v_2)$, принадлежит указанному бицилиндру. Это легко установить, используя неравенство $|v_1 - z_1| < |v_2 - z_2| \cdot \max\limits_{[v_2, z_2]} |\varphi'|$.

Для произвольной функции g, определенной в $\pi^{-1}(\bigcup\limits_j U_j)$ и удовлетворяющей там оценке $|g(v)| < e^{A_9 |v| + B_9}$ с некоторыми A_9 и B_9, рассмотрим функцию $g_\varphi = g(\varphi(v_2), v_2)$. Из сказанного выше следует, что в $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки z_2 имеет место неравенство $|g_\varphi| \leqslant e^{(A_9 + 2)(|z_2| + |\varphi(z_2)|) + B_9}$.

Учитывая этот факт, применим к функции $(f_2)_\varphi$ лемму 2.4, положив в ней $R = e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$. Из указанной леммы следует, что в $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки z с некоторыми A_{10}, B_{10} и k, не зависящими от j и $z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\partial K(0, R_j)$, выполняется неравенство

$$|(f_2)_\varphi| > e^{-A_{10}(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_{10}} \min(d^k(z_2, \pi N), R^k),$$

завершающее доказательство. □

§ 4. Основная теорема

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 4.1. *Пусть* $f_1, \cdots, f_t$ — *произвольный набор* Z-exp-*полиномов от двух переменных, и пусть* J — *идеал, порожденный ими в кольце* H_ρ, *где* ρ *определена по формуле* (0.1). *Тогда замкнутый идеал* J *локализуем.*

Доказательство. Мы можем считать, что все f_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, суть Z_+-exp-полиномы. Пусть p — наибольший общий полиномиальный делитель полиномов p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$. Рассмотрим идеал J_1, порожденный в кольце H_ρ Z_+-exp-полиномами $f_j/p(z, e^{iz})$.

Пусть функция $h \in \mathrm{H}_p$ такова, что $h_z \in J_z$ для любой точки $z \in C^2$. Методами работы [4] из леммы 2.3 несложно выводится включение $h_1 = h/p(z, e^{iz}) \in \mathrm{H}_p$. Очевидно, что $h_{1z} \in J_{1z}$ для любой точки $z \in C^2$. Локализуемость идеала $\overline{J}$ будет установлена, если мы докажем включение $h \in \overline{J}$. Для этого достаточно убедиться в справедливости включения $h_1 \in \overline{J}_1$.

По предложению 1.1 в идеале J_1 или содержится Z-exp-полином $g_1 \neq 0$, зависящий только от z_2 или в нем существуют два Z_+-exp-полинома $g_1 \neq 0$ и $g_2 \neq 0$, не содержащих e^{iz_1} и z_1 соответственно. Отсюда, используя лемму 1.2, мы делаем вывод, что все неприводимые компоненты $N \subseteq \bigcap_j N_{fj/p}$ такие, что $\dim N = 1$, суть комплексные прямые. Нетрудно убедиться в том, что этих прямых конечное число.

Пусть q_1 — полином, равный произведению всех общих делителей вида $z_1 - cz_2 - d$ функций $f_j/p(z, e^{iz})$ (с учетом кратности этих делителей), а полином q_2 равен произведению всех остальных общих линейных делителей функций $f_j/p(z, e^{iz})$. Положим $q = q_1 q_2$.

Рассмотрим функцию $h_2 = h_1/q$ и идеал J_2, порожденный в кольце H_p функциями $'f_j = f_j/p(z, e^{iz})\, q$. Для любой точки $z \in C^2$ $h_{2z} \in J_z$ и, кроме того, $h_2 \in \mathrm{H}_p$. Аналогично сказанному выше для завершения доказательства нам достаточно установить включение $h_2 \in \overline{J}_2$.

Если в идеале J_1 существует Z-exp-полином (пусть это будет $f_1/p(z, e^{iz})$), зависящий только от z_2, то для него существуют константы A и B и последовательность R_j, $j-1 < R_j < j$, такие, что на множестве $\pi^{-1}(\bigcup_j \partial K(0, R_j))$ выполняется соотношение

$$\lg |f_1/p(z, e^{iz})| \geqslant -A|z_2| - B.$$

Как следствие сказанное переносится и на функцию $'f_1$.

Если же указанной функции в идеале J_1 нет, то по предложению 1.1 в J_1 есть два Z_+-exp-полинома (пусть это будут f_1/p и f_2/p), первый из которых не содержит e^{iz_1}, а второй — z_1.

Нетрудно видеть, что f_1/pq_1 — Z_+-exp-полином, причем множество N общих корней его и Z_+-exp-полиномов f_j/p, $2 \leqslant j \leqslant t$, таково, что $\pi N \neq C^1$. Теперь используя теорему 3.1, несложно убедиться в существовании констант A и B и последовательности R_j, $j-1 < R_j < j$, таких, что

$$\max_j \lg |'f_j| \geqslant -A|z| - B, \quad z \in \pi^{-1}(\bigcup_j \partial K(0, R_j)).$$

Меняя местами z_1 и z_2 и повторно применяя те же рассуждения, мы получим, что для образующих $'f_j$ идеала J_2 всегда существуют константы A и B и две последовательности R_j^1 и R_j^2 такие, что $j-1 < R_j^i < j$, $i = 1, 2$, и каждая компонента связности множества

$$\{z \in C^2 : \max_j \lg |'f_j| < -A|z| - B\}$$

лежит в множестве вида

$$U_{jk} = \{ R_j^1 < |z_1| < R_{j+1}^1, \ R_k^2 < |z_2| < R_{k+1}^2 \}.$$

Теперь включение $h_2 \in J_2$, завершающее доказательство, непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 4.2. [2]. Пусть J — замкнутый идеал в кольце $\mathbf{H}_\rho$, $z \in C^n$, где ρ определена по формуле (0.1). Тогда, если в идеале J существует ограниченное множество $\{f_\tau\}$ такое, что с некоторыми A и B все компоненты связности G_k множества

$$\{ z \in C^n : \sup_\tau \lg |f_\tau| < -A|z| - B \}$$

ограничены и $\sup_{z \in G_k} |z| / (1 + \inf_{z \in G_k} |z|) < C$, где C не зависит от k, то идеал J локализуем.

Рассмотрим теперь приложение основной теоремы к теории систем дифференциально-разностных уравнений. С этой целью мы приведем построение некоторых функциональных пространств, определенных в [3].

Пусть $\mathbf{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}$ и $\mathbf{E}_{\alpha, A}^{(j)}$ — банаховы пространства комплекснозначных функций на R^n, для которых соответственно определены нормы

$$\|g\| = \sup_{x, q} \left| e_{\alpha, A}^{-1}(x) \frac{g^{(q)}(x)}{B^{|q|} |q|^{|q| \beta}} \right|, \quad \|g\| = \sup_{x, |q| \leq j} |e_{\alpha, A}^{-1}(x) g^{(q)}(x)|,$$

где $e_{\alpha, A}(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{e} \left| \frac{x}{A} \right|^{1/\alpha} \right)$, если $\alpha > 0$, $e_{0, A} = 1$ при $|x| \leqslant A$, $e_{0, A} = \infty$ при $|x| > A$. Положим $\mathbf{E}_\alpha^\beta = \lim_{B \to 0} \operatorname{pr}_{A \to \infty} \mathbf{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $\mathbf{E}_\alpha^* = \lim_{j, A \to \infty} \operatorname{pr} \mathbf{E}_{\alpha, A}^{(j)}$.

Тогда, как доказано в [3], кольцо $\mathbf{H}_\rho$ с весовой функцией ρ, заданной формулой (0.1), связано при $m_2 = 1$ с пространством

$$\Phi = \begin{cases} \mathbf{E}_{\frac{m-1}{m}}^{1/m_1}, & \text{если } m_1 > 0, \\ \mathbf{E}_{\frac{m-1}{m}}, & \text{если } m_1 = 0, \end{cases}$$

соотношением $F(\Phi') = \mathbf{H}_\rho$, где F — преобразование Фурье, а Φ' — пространство, сильно сопряженное к Φ.

В такой ситуации проблема локализуемости замкнутых идеалов кольца $\mathbf{H}_\rho$ является двойственной по отношению к проблеме о допустимости спектрального анализа и синтеза инвариантными относительно сдвига подпространствами пространства Φ (см. [6]). Не останавливаясь на подробностях редукции одной проблемы к другой, сформулируем следующую итоговую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть задана система однородных дифференциально-разностных уравнений вида*

$$\sum_{k=1}^{s} p_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x - a^k) = 0, \quad x \in R^2, \quad a^k \in Z_2, \quad u \in \Phi.$$

(*Мощность этой системы может быть произвольной*). *Пусть* X — *подпространство ее решений. Тогда, если* $X \neq \{0\}$, *то* X *допускает спектральный анализ, т. е. содержит* exp-*полином и* $\neq 0$ *и спектральный синтез, т. е. совпадает с замыканием множества* exp-*полиномов в нем содержащихся*.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт железнодорожного транспорта

Поступила 12.III.1973

Դ. Ի. ԳՈՒՐԵՎԻՉ. exp-պոլինոմիալ ծնիչներով փակ իդեալներ երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների օղակներում (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ օղակներում առաջացած փակ իդեալները հետևյալ տեսքի ծնիչներով

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i\left(a_1^k z_1 + a_2^k z_2\right)} p_k(z_1, z_2),$$

որտեղ p_k-*ն բազմանդամներ են, իսկ* a_j^k-*ն ամբողջ թվեր: Ապացուցված է, որ այդպիսի իդեալները միարժեքորեն որոշվում են իրենց լոկալ ստրուկտուրայով:*

D. I. GUREVICH. *Closed ideals with* exp-*polynomial generators in the rings of entire functions of two variables* (summary)

In the paper the closed ideals, generated in some rings of entire functions of two variables by the generators

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i\left(a_1^k z_1 + a_2^k z_2\right)} p_k(z_1, z_2),$$

where p_k are polynoms, and a_j^k-integers, are studied. It is proved that such ideals are defined by their local structure.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. И. Гуревич*. Обобщенные базисы в некоторых кольцах голоморфных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, 1972, 568—582.
2. *Д. И. Гуревич*. Замкнутые идеалы с нульмерным множеством корней в некоторых кольцах голоморфных функций, Матем. сб., (в печати).
3. *В. П. Паламодов*. Преобразование Фурье быстро растущих бесконечно дифференцируемых функций, Труды ММО, 11, 1962, 309—350.
4. *L. Ehrenpreis*. Solutions of Some Problems of Division. 2, Am. J. Math., 77, 1955, 286—292.
5. *L. Ehrenpreis*. Fourier analysis in several complex variables, New York, Wiley—Interscience, 1970.
6. *B. Malgrange*. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équatiens de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6, 1956, 271—355.