

С. А. ГРИГОРЯН, М. И. КАРАХАНИЯН

ОБ ε -НОРМАЛЬНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР

В работе обобщается одна теорема Вилкена об ε -нормальных алгебрах.

Пусть X -компактное хаусдорфово пространство, и $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на X .

Подалгебра A алгебры $C(X)$ называется функциональной, если A содержит константы, разделяет точки X и равномерно замкнута (т. е. замкнута в $\sup$ -норме).

Определение 1. Функциональная алгебра A называется ε -нормальной, если для всяких двух замкнутых множеств F_1 и F_2 , содержащихся в X , пересечение которых пусто, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ существует функция $f \in A$ такая, что для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{2}$ выполняется условие

$$\sup_{x \in F_1} |1 - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{а} \quad \sup_{x \in F_2} |f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Легко видеть, применив теорему Мергеляна, что если функциональная алгебра удовлетворяет этому условию с некоторым $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, то она удовлетворяет ему и для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ (см. [1]).

Определение 2. Границей Шоке функциональной алгебры A называется такое максимальное подмножество K множества X , которое удовлетворяет следующему условию: для всякого $x_0 \in K$ существует $f \in A$ такое, что $f(x_0) = 1$, $|f(x)| < 1$ для $x \neq x_0$.

В дальнейшем через $Ch(A)$ будем обозначать границу Шоке алгебры A , а через M_A — пространство максимальных идеалов.

Пусть A — функциональная алгебра и F — замкнутое множество в X .

Через A_F обозначим функциональную алгебру, порожденную сужениями функции из A на F . Вилкеном в [1] была получена следующая

Теорема. Пусть A — функциональная алгебра и $M_A = X$. Если X — окружность, то A — ε -нормальная алгебра.

Ниже мы приведем общее утверждение, специализацией которого является результат Вилкена.

Теорема. Пусть A — функциональная алгебра такая, что $M_A = X$. Если $X \setminus Ch(A)$ вполне несвязно, то A — ε -нормальная алгебра.

Доказательство этой теоремы проведем в несколько этапов, т. е. сформулируем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть A — функциональная алгебра и $M_A \setminus X$ вполне несвязно. Тогда $M_A = X$.

Доказательство. Допустим противное: пусть $M_A \neq X$. Тогда, как известно, $M_A \setminus X$ — открытое множество и следовательно существует открытого множества $U \subset M_A$ такого, что $U \subset \bar{U} \subset M_A \setminus X$. По условию $M_A \setminus X$ вполне несвязно, следовательно, $\bar{U}$ также вполне несвязно. Покажем, что $\bar{U}$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 таких, что $\bar{U} = F_1 \cup F_2$ и $(\bar{U} \setminus U) \cap F_1 = \emptyset$. Действительно, поскольку U вполне несвязно, то для любой тройки точек x_0, x_1, x_2 , где $x_0, x_1 \in \bar{U} \setminus U$, а $x_2 \in \bar{U} \setminus U$ найдутся открыто-замкнутые множества $F_{x_1} \ni x_0, x_1$ и $F_{x_2} \ni x_2$ такие, что $F_{x_1} \cup F_{x_2} = \bar{U}$, а $F_{x_1} \cap F_{x_2} = \emptyset$. Если x_2 пробегает все $\bar{U} \setminus U$, то мы получим покрытие $\bar{U} \setminus U$ системой открыто замкнутых множеств $\{F_{x_i}\}_{i \in I}$. Поскольку $\bar{U}$ компактно, то $\bar{U} \setminus U$ также будет компактным множеством, следовательно, из системы $\{F_{x_i}\}_{i \in I}$ можно выбрать конечную систему $\{F_{x_i}^1\}_{i=1}^n$, которая покрывает $\bar{U} \setminus U$. Рассмотрим систему $\{F_{x_i}^1\}_{i=1}^n$ открыто-замкнутых множеств таких, что $F_{x_i}^1 \cap F_{x_i}^{*1} = \emptyset$ и $F_{x_i}^1 \cup F_{x_i}^{*1} = \bar{U}$. Положим $F_1 = \bigcap_{i=1}^n F_{x_i}^1$ и $F_2 = \bigcup_{i=1}^n F_{x_i}^{*1}$. Легко видеть, что F_1 и F_2 открыто-замкнутые непересекающиеся множества такие, что $F_1 \cup F_2 = \bar{U}$ и $F_1 \cap (\bar{U} \setminus U) = \emptyset$. Ясно, что $x_0 \in F_1$. Так как $F_1 \cup F_2 = \bar{U}$, то отсюда имеем, что $M_A = F_1 \cup (F_2 \cup (M_A \setminus U))$. Поскольку $M_A \setminus U$ — замкнутое множество $F_1 \cap (M_A \setminus U) = \emptyset$, то $F_1 \cap (F_2 \cup (M_A \setminus U)) = \emptyset$. Итак, M_A представлено в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и $F_2 \cup (M_A \setminus U)$. Следовательно, на основании теоремы Шилова об идемпотентах, существует функция $\chi(x) \in A$ такая, что

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_1, \\ 0, & x \in F_2 \cup (M_A \setminus U). \end{cases}$$

Но граница Шилова алгебры A лежит в X , а $F_1 \cap X = \emptyset$. Полученное противоречие означает, что $M_A = X$. Лемма доказана. В дальнейшем мы используем известную лемму (см. [1]), которую сформулируем ниже.

Лемма 2. Пусть A — функциональная алгебра такая, что для всякого замкнутого множества F имеем $M_{A_F} = F$. Тогда A есть ε -нормальная алгебра.

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что M_{A_F} является замкнутым подмножеством в X . Так как $M_A = X$, то $M_{A_F} \subset X$. Теперь покажем, что для любого замкнутого множества $F \subset X$ имеем $M_{A_F} = F$. Допустим противное. Пусть для некоторого замкнутого множества $F_0 \subset X$, $M_{A_{F_0}} \neq F_0$. Рассмотрим $M_{A_{F_0}} \setminus F_0$. По лемме 1 $M_{A_{F_0}} \setminus F_0$ не является вполне несвязным множеством. Поэтому, из условия теоремы следует, что найдется точка $x_0 \in Ch(A)$ такая,

что $x_0 \in M_{A_F} \setminus F_0$. Это означает, что существует $f \in A$ такая, что $f(x_0) = 1$, а $|f|_{F_0} < 1$. Однако это невозможно, в силу принципа максимума. Отсюда следует, что для всякого замкнутого множества $F \subset X$ имеем $M_{A_F} = F$. Но тогда по лемме 2 алгебра A является ε -нормальной. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть A — функциональная алгебра и $M_A = X$. Если X — окружность, то A — ε -нормальная алгебра.

Доказательство. Покажем, что $X \setminus Ch(A)$ — вполне несвязное множество. Пусть $X \setminus Ch(A)$ не является вполне несвязным множеством. Это означает, что существует некоторая дуга $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ на окружности такая, что $Ch(A) \cap \gamma_{[\alpha, \beta]} = \emptyset$. Рассмотрим алгебру $A_{\gamma_{[\alpha, \beta]}}$. Поскольку граница Шилова произвольной функциональной алгебры B не может состоять из конечного числа точек, если X само не состоит из конечного числа точек, то найдутся $x_0 \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$, $x_0 \neq \alpha$, $x_0 \neq \beta$ и функция $g \in A_{\gamma_{[\alpha, \beta]}}$ такие, что $g(x_0) = 1$, $|g(x)| < 1$, $x \neq x_0$. Так как $g(x)$ является равномерным пределом на $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ функций из A , то для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{2} \min |1 - |g(\alpha)|, 1 - |g(\beta)||$ найдется функция $\varphi \in A$ такая,

что $|g(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для $x \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$. Легко видеть, что функция $\varphi(x) \in A$ достигает своего максимума модуля на дуге $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ в некоторой внутренней точке этой дуги. Но поскольку $M_A = X$, то на основании теоремы Росси (см. [2], стр. 84) существует $x_1 \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$, $x_1 \neq \alpha$, $x_1 \neq \beta$ и функция $f \in A$ такие, что $f(x_1) = 1$, $|f(x)| < 1$, $x \neq x_1$, т. е. $x_1 \in Ch(A)$, и мы получаем противоречие. Следовательно, $X \setminus Ch(A)$ — вполне несвязно и поэтому A является ε -нормальной алгеброй и т. д.

Следствие 2. Пусть A — функциональная алгебра на произвольном графе X . Если $M_A = X$, то A — ε -нормальная алгебра.

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.IV. 1974

Ս. Ա. ԳՐԻԳՐԻԱՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆԻԱՆ. Ֆունկցիոնալ հանրահաշիվների ε -նորմալությունը մասին (ամփոփում)

Հնդհանրացվում է Վիլկենի թեորեմը ε -նորմալ հանրահաշիվների մասին:

S. A. GRIGORIAN, M. I. KARAKHANIAN. On ε -normality of functional algebras (summary)

The papere generalizes the Wilken theorem on ε -normal algebras.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. R. Wilken. Approximate normality and function algebras on the interval and the circle, Proc. Inter. Sympos on Function Algebras, Tulan Univ. Scott-Foresman, 1965, 98—111.
2. Р. Ганнин, Х. Росси. Аналитические функции многих комплексных переменных, Изд. „Мир“, 1972.
3. K. Nistizawa. On some separation properties of a function Algebras, Proc. Jap. Acad., 48, № 8, 1972.
4. K. Nistizawa. On a separation property of a function algebras, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 22, 1971, 127—132.