ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБ „УГЛОВЫХ“ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть R^m — m-мерное евклидово пространство. Пусть $G(r)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, определенная при $r>0$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0 G(r)\, r^{m-1}\, dr < \infty. \tag{1}$$

Мы скажем, что $f \in \mathfrak{M}_{G,h,p}$, если f допускает представление

$$f(y) = \int_{R^m} G(|x-y|)\; g(x)\, dx, \tag{2}$$

причем

$$\|f\| = \left(\int_{R^m} |g(x)|^p\, h(x_1)\, dx\right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{3}$$

Здесь x_1 — первая координата точки x, h — неотрицательная, четная функция, монотонная при положительных значениях аргумента.

Легко заметить, что если $g(x)$ — непрерывная и финитная функция, то $f(y)$, определяемая соотношением (2), тоже непрерывна.

Введем следующее обозначение: если μ — неотрицательная мера, сосредоточенная на E и имеющая единичную массу, то будем писать $\mu \prec E$.

Для изучения пространств $\mathfrak{M}_{G,h,p}$ нам потребуются емкости, определяемые следующим образом: если $E \subset R^m$ — борелевское множество, то

$$C_h(E) = \left(\inf\left(\int_{R^m}\left(\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\, dy\right)^{1/q}\right)^{-1},$$

когда $p>1$ $(1/p+1/q=1)$, и

$$C_h(E) = \left(\inf\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in R^m} h^{-1}(y_1)\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)\right)^{-1},$$

когда $p=1$, где inf берется по всем мерам $\mu \prec E$.

Нетрудно заметить, что введенные нами емкости обладают следующими свойствами:

1. $C_h(E) \geqslant 0$ для любого $E \subset R^m$,

2. Если $F \subset E$, то $C_h(F) \leqslant C_h(E)$,

3. $C_h\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_h(E_k)$.

Пусть f непрерывна и принадлежит $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$. Рассмотрим следующее множество:

$$E = \{x \in R^m / f(x) > 1\}.$$

Для любой меры $\mu \prec E$, при $p > 1$ мы имеем

$$1 < \int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_{R^m} \int_{R^m} G(|x-y|)\, g(y)\, d\mu(x)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^m} \left(\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\, dy\right)^{1/q} \left(\int_{R^m} |g(y)|^p h(y_1)\, dy\right)^{1/p}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$C_h(E) \leqslant \|f\|. \tag{4}$$

При $p = 1$ доказательство неравенства (4) аналогично. В силу неравенства (4) мы можем утверждать, что следующая теорема является частным случаем теоремы Аронщайна и Смита [1].

Теорема 1. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных функций, принадлежащих $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$, и*

$$\lim_{n, m \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0.$$

Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset R^m$ такое, что $C_h(E) < \varepsilon$ и $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $R^m \setminus E$.

Следствие. Если $f \in \mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset R^m$ такое, что $C_h(E) < \varepsilon$ и f определена и непрерывна на $R^m \setminus E$.

Для дальнейшего нам потребуется одно неравенство типа известного неравенства Харди и Литтльвуда. Теперь мы переходим к формулировке этого неравенства.

Пусть $f(x)$ — неотрицательная, измеримая функция на $-\infty < x < \infty$. Положим

$$E_f(\lambda) = \{x / f(x) > \lambda\}.$$

Определим функцию f^* следующим образом: $f^*(x) > \lambda$, если $|x| < 1/2\, m(E_f(\lambda))$ и $f^*(x) \geqslant \lambda$, если $|x| \geqslant 1/2\, m(E_f(\lambda))$ для любого $0 \leqslant \lambda < \infty$, где m — мера Лебега на $(-\infty, \infty)$.

Пусть $h(t)$ — неотрицательная, четная функция, монотонная при положительных значениях аргумента. Введем функцию $h_\alpha(t)$ $(\alpha > 0)$ следующим образом:

$$h_\alpha(t)=\begin{cases} h(t-\alpha), & \text{если} \quad t<-\alpha \\ h_1(2t), & \text{если} \quad |t|<\alpha \\ h(t+\alpha), & \text{если} \quad t>\alpha, \end{cases}$$

где $h_1(t)=h(t)$, когда $h(t)$ возрастает при $t>0$ и

$$h_1(t)=\begin{cases} h(t), & \text{если } |t|>2\alpha \\ \operatorname*{ess\,inf}_{-2\alpha<x<2\alpha} h(x), & \text{если } |t|\leqslant 2\alpha, \end{cases}$$

когда $h(t)$ убывает при $t>0$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть f — неотрицательная, измеримая функция, а h — неотрицательная, четная функция, монотонная при $t>0$. Если $\varphi(t)$ — неотрицательная и симметрично убывающая функция, а $|\beta|<\alpha$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, f(t+\beta)\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, f_\alpha(t)\, dt$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha^p(t)\, h_\alpha(t)\, dt \leqslant 2^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} f^p(t)\, h(t)\, dt \quad (1\leqslant p<\infty),$$

где

$$f_\alpha(t)=\begin{cases} f(t-\alpha), & \text{если} \quad t<-\alpha \\ 2\,(f\cdot\chi_{2\alpha})^*(2t), & \text{если} \quad |t|<\alpha \\ f(t+\alpha), & \text{если} \quad t>\alpha. \end{cases}$$

Здесь $\chi_\gamma(t)$ — характеристическая функция интервала $(-\gamma, \gamma)$.

Пусть P — ортогональный проектор из R^m на гиперплоскость $R^{m-1}=\{x\in R^m/x_1=0\}$. Через $E^{(\varepsilon)}$ обозначим подмножество множества E, находящееся в полосе $\{x\in R^m/|x_1|<\varepsilon\}$. Введем множество

$$\widetilde{E}=\bigcap_{n=1}^{\infty} P(E^{(\varepsilon_n)}),$$

где $\varepsilon_n\downarrow 0$. Легко заметить, что $\widetilde{E}$ в действительности не зависит от последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Используя конструкцию Ю. Г. Решетняка [2] и лемму 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $h(t)$ — неотрицательная, четная функция, монотонная при $t>0$, то*

$$C_h(\widetilde{E})\leqslant 2^{\frac{p-1}{p}}\, C_h(E) \quad (1\leqslant p<\infty)$$

для любого измеримого множества E.

Исходя из следствия теоремы 1 и теоремы 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f\in\mathfrak{M}_{G,h,p}$, тогда f имеет конечные нормальные граничные значения всюду на R^{m-1}, кроме некоторого множества $E\subset R^{m-1}$, для которого $C_h(E)=0$.*

Доказательства результатов этого параграфа можно найти у автора [5].

2°. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые подпространства пространств $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$ и докажем более тонкие граничные свойства функций из этих подпространств. Для введения и изучения этих подпространств нам понадобится несколько новых понятий.

Обозначим через $R^m_+ = \{x \in R^m / x_1 > 0\}$. Через $C_0(R^m)$ обозначим непрерывные функции, определенные на R^m и стремящиеся к нулю в бесконечности.

Введем понятие выметания. Выметание меры μ будет обозначаться через $\hat{\mu}$. Выметания мер Дирака определяются следующими свойствами:

1. $\hat{\delta}_x$ — неотрицательная мера в R^m и $\hat{\delta}_x(R^m) = 1$;

2. если $x \overline{\in} R^m_+$, то $\hat{\delta}_x = \delta_x$;

3. если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R^m$ сходится к x, то для любого $\varphi \in C_0(R^m)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_{x_n}(y) = \int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_x(y).$$

Пусть μ — некоторая конечная мера в R^m. Рассмотрим выражение

$$L(\varphi) = \int_{R^m} \left(\int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_x(y) \right) d\mu(x),$$

где $\varphi \in C_0(R^m)$. Очевидно, что имеет место неравенство

$$|L(\varphi)| \leqslant \max_{x \in R^m} |\varphi(x)| \cdot |\mu|, \tag{5}$$

где $|\mu|$ — полная вариация меры μ. Следовательно L — непрерывный линейный функционал на $C_0(R^m)$. Выметание меры μ определяется как мера, представляющая функционал L.

Для любой меры μ определим потенциал этой меры следующим образом:

$$U^{(\mu)}(x) = \int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(y).$$

Мы скажем, что выметание согласовано с ядром G, если для любой неотрицательной меры μ имеет место следующее неравенство:

$$U^{(\mu)}(x) \geqslant U^{(\hat{\mu})}(x). \tag{6}$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выметание согласовано с ядром G.

Определим новые емкости следующим образом: если E — борелевское множество в R^m, то

$$\hat{C}_h(E) = \left(\inf\left(\int_{R^m} (U^{(\hat{\mu})}(x))^q\, h^{-q/p}(x_1)\, dx\right)^{1/q}\right)^{-1},$$

когда $p > 1$ $(1/p + 1/q = 1)$, и

$$\hat{C}_h(E) = (\inf (\operatorname{esssup}_{y \in R^m} h^{-1}(y_1)\, U^{(\hat{\mu})}(y)))^{-1},$$

когда $p = 1$, где inf берется по всевозможным мерам $\mu \prec E$.

Легко заметить, что введенные нами емкости $\hat{C}_h$ обладают теми же свойствами, что и C_h.

Из (6) следует, что для любого $E \subset R^m$

$$C_h(E) \leqslant \hat{C}_h(E).$$

Введем пространство $\hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p} \subset \mathfrak{M}_{O,h,p}$ следующим образом. Мы скажем, что $f \in \hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p}$ если существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_{O,h,p} \cap C_0(R^m)$ такая, что $\|f_n - f\| \to 0$ и f_n для любого n обладает следующим свойством:

$$\int_{R^m} f_n(x)\, d\mu(x) = \int_{R^m} f_n(x)\, d\hat{\mu}(x) \tag{7}$$

для любой конечной меры μ.

Теорема 4. *Если $f \in \hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество E такое, что $\hat{C}_h(E) < \varepsilon$ и функция f определена и непрерывна на $R^m \setminus E$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{M}_{O,h,p} \cap C_0(R^m)$ и, кроме этого, для любой меры μ имеет место равенство

$$\int_{R^m} f(x)\, d\mu(x) = \int_{R^m} f(x)\, d\hat{\mu}(x).$$

Рассмотрим множество

$$E = \{x \in R^m / f(x) > 1\}.$$

Для любой меры $\mu \prec E$, при $p > 1$ мы имеем

$$1 < \int_{R^m} f(x)\, d\mu(x) = \int_{R^m} f(x)\, d\hat{\mu}(x) = \int_{R^m}\int_{R^m} G(|x-y|)\, g(y)\, d\hat{\mu}(x)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^m}\left(\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\hat{\mu}(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\, dy\right)^{1/q} \left(\int_{R^m} |g(y)|^p h(y_1)\, dy\right)^{1/p}.$$

Следовательно

$$\hat{C}_h(E) \leqslant \|f\|. \tag{8}$$

При $p=1$ доказательство неравенства (8) аналогично.

Применяя теперь теорему Ароншайна и Смита [1], нетрудно получить требуемый результат.

3°. В этом n^0 мы докажем одно важное свойство емкости $\hat{C}_h$.

Для каждой точки $x \in R^m$ через $\Delta_c(x)$ $(c>1)$ обозначим множество тех $y \in R^m$, которые удовлетворяют условию

$$c\,\hat{\delta}_y(E) \geqslant \hat{\delta}_x(E)$$

для любого ограниченного измеримого множества $E \subset R^m$.

Заметим, что если $x \in R^m$, то $\Delta_c(x) \ni x$ для любого $c>1$.

Для любого множества $E \subset R^m$ через E_c обозначим следующее множество:

$$E_c = \bigcup_{x \in E} \Delta_c(x).$$

Лемма 2. *Если $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ и при $n=1, 2, \cdots$, $y_n \in \Delta_c(x_n)$, то $y_0 \in \Delta_c(x_0)$.*

Доказательство. Пусть E — ограниченное измеримое множество. Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать ограниченное открытое множество $G_\varepsilon \supset E$ и замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ такие, что

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) - \varepsilon \leqslant \hat{\delta}_{x_0}(F_\varepsilon), \quad \hat{\delta}_{y_0}(E) + \varepsilon \geqslant \hat{\delta}_{y_0}(G_\varepsilon).$$

Пусть $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ — непрерывная функция в R^m, равная нулю вне G_ε и равная единице на F_ε. Так как при $n=1, 2.$ $y_n \in \Delta_c(x_n)$ то,

$$c \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_n}(x) \geqslant \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_n}(x), \quad n=1, 2, \cdots. \tag{9}$$

В силу третьего свойства выметаний мы в (9) можем перейти к пределу под знаком интегралов. Переходя к пределу мы получаем

$$c \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_0}(x) \geqslant \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_0}(x).$$

Следовательно

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) - \varepsilon \leqslant \hat{\delta}_{x_0}(F_\varepsilon) < \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_0}(x) \leqslant c \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_0}(x) \leqslant$$

$$\leqslant c\,\hat{\delta}_{y_0}(G_\varepsilon) \leqslant c\,(\hat{\delta}_{y_0}(E) + \varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ мы имеем

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) \leqslant c\,\hat{\delta}_{y_0}(E),$$

откуда следует, что $y_0 \in \Delta_c(x_0)$.

Следствие. *Для любого компактного множества K множество K_c замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K_c$ сходится к y_0. Существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ такая, что $y_n\in\Delta_c(x_n)$. В силу компактности K, из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0\in K$. В силу леммы 2 $y_0\in$ $\in\Delta_c(x_0)$. Следовательно, $y_0\in K_c$.

Лемма 3. *Пусть $K\subset R^m$ компактно. Тогда существует измеримая по Борелю функция π, определенная на K_c и принимающая значения в K:*

$$\pi\colon K_c\to K$$

такая, что $x\in\Delta_c(\pi(x))$ для любого $x\in K_c$.

Доказательство. Пространство R^m гиперплоскостями, перпендикулярными координатным осям, разобъем на кубы со стороной, равной 1. Кубы, которые пересекаются с K обозначим: $\delta_1, \delta_2,\cdots,\delta_{n_1}$. Введем множества

$$\sigma_1=(K\cap\delta_1)_c,\ \sigma_k=(K\cap\delta_k)_c\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}(K\cap\delta_l)_c,\ k=2,\cdots,n_1.$$

На втором шаге кубы $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n_1}$ мы разбиваем на более мелкие кубы со стороной 2^{-1} и так далее. Предположим, что сделано k шагов и при этом выбраны кубы $\{\delta_{i_1,\ldots,i_k}\}$ и множества $\{\sigma_{i_1,\ldots,i_k}\}$ такие, что удовлетворяются условия:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \Big(\bigcup_{(i_k)}\delta_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}\Big)\cap K=\delta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\cap K;\\
&2.\ \bigcup_{(i_k)}\sigma_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}=\sigma_{i_1,\ldots,i_{k-1}};\qquad\qquad (10)\\
&3.\ \sigma_{i_1,\ldots,i_{k-1},i}\cap\sigma_{i_1,\ldots,i_{k-1},j}=\varnothing,\ \text{если } i\neq j;\\
&4.\ \sigma_{i_1,\ldots,i_k}\subset(K\cap\delta_{i_1,\ldots,i_k})_c.
\end{aligned}
$$

Тогда на $(k+1)$-ом шаге кубы $\{\delta_{i_1,\ldots,i_k}\}$ разбиваются на более мелкие со стороной $2^{-(k+1)}$; кубы, пересекающие K и содержащиеся в $\delta_{i_1,\ldots,i_k}$, обозначаются $\delta_{i_1,\ldots,i_k,1}$; $\delta_{i_1,\ldots,i_k,2}$; $\cdots$ (их всего лишь конечное число). Введем следующие множества:

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_k,1}=\sigma_{i_1,\ldots,i_k}\cap(K\cap\delta_{i_1,\ldots,i_k,1})_c,$$

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_k,i}=\sigma_{i_1,\ldots,i_k}\cap\Big((K\cap\delta_{i_1,\ldots,i_k,i})_c\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}(K\cap\delta_{i_1,\ldots,i_k,j})_c\Big),\ i=2,3,\cdots.$$

Очевидно, что построенные нами семейства множеств удовлетворяют условию (10) с заменой k на $k+1$. Заметим, что из следствия леммы 2 и из вышеприведенной конструкции следует, что $\sigma_{i_1,\ldots,i_n}$ измеримо по Борелю при любом наборе $(i_1,\cdots,i_n)$.

Пусть $x\in K_c$. Так как $\bigcup_{(i)}\sigma_i=K_c$ и $\{\sigma_i\}$ не пересекаются друг с другом, то существует единственный индекс i_1 такой, что $\sigma_{i_1}\ni x$. Из пунктов 2 и 3 условия (10) следует, что существует единственная последовательность $i_1, i_2, \cdots$ такая, что $\sigma_{i_1, \ldots, i_n} \ni x$ при любом n.

Рассмотрим последовательность кубов $\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1, i_2} \supset \cdots$. Так как сторона куба $\delta_{i_1, \ldots, i_n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ и все они пересекаются с множеством K, то существует единственная точка $y \in K$ такая, что $y \in \delta_{i_1, \ldots, i_n}$ при любом n. Значение π в точке x мы определим равным y. Так как $x \in \sigma_{i_1, \ldots, i_k} \subset (K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k})_c$, то существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ такая, что $y_k \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k}$ и $x \in \Delta_c(y_k)$. Очевидно, что $y_k \to \pi(x)$. В силу леммы 2 $x \in \Delta_c(\pi(x))$.

Докажем, что π измеримо по Борелю. Для этого достаточно показать, что $\pi^{-1}(\delta_{i_1, \ldots, i_n})$ измеримо. Через J_m обозначим множество индексов $(j_1, \cdots, j_m)$, для которых $K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap \delta_{j_1, \ldots, j_m} \neq \varnothing$. Докажем, что

$$\pi^{-1}(\delta_{i_1, \ldots, i_n}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{(j_1, \cdots, j_m) \in J_m} \sigma_{j_1, \cdots, j_m} \right). \tag{11}$$

Пусть $x \in \pi^{-1}(\delta_{i_1, \ldots, i_n})$. Существует последовательность $j_1^0, j_2^0, \cdots$ такая, что $x \in \sigma_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$ для любого m. По определению функции $\pi \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \ni \pi(x)$ для любого m. Следовательно $\pi(x) \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap$ $\cap\, \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$. Поэтому $(j_1^0, \cdots, j_m^0) \in J_m$ для любого m, откуда следует, что x принадлежит правой части (11).

Пусть

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{(j_1, \cdots, j_m) \in J_m} \sigma_{j_1, \cdots, j_m} \right).$$

Из пунктов 2 и 3 условия 10 следует, что существует последовательность $j_1^0, j_2^0, \cdots$ такая, что $x \in \sigma_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$ и $(j_1^0, \cdots, j_m^0) \in J_m$ для любого m. Следовательно

$$\pi(x) \in \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \text{ и } K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \neq \varnothing$$

для любого m. Отсюда вытекает, что $\pi(x) \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n}$, или, что то же самое, $x \in \pi^{-1}(\delta_{i_1, \ldots, i_n})$.

Следствие. Если E открыто, то существует измеримая по Борелю функция π

$$\pi \colon E_c \to E$$

такая, что $x \in \Delta_c(\pi(x))$ для любого $x \in E_c$.

Доказательство. Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность компактов таких, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Согласно лемме 3 существуют измеримые по Борелю функции π_n такие, что

$$\pi_n \colon (K_n)_c \to K_n.$$

Определим функцию π следующим образом:

$$\pi(x)=\begin{cases}\pi_1(x), & \text{если } x\in(K_1)_c\\ \pi_{n+1}(x), & \text{если } x\in(K_{n+1})_c\setminus(K_n)_c,\ n=1,\cdots.\end{cases}$$

Очевидно, что π обладает требуемыми свойствами.

Лемма 4. *Пусть E—открытое множество в R^m. Тогда для любой меры $\mu\prec E_c$ существует мера $\nu\prec E$ такая, что для любой неотрицательной функции $\varphi\in C_0(R^m)$ имеет место неравенство*

$$\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\nu}(y)\leqslant c\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\mu}(y).$$

Доказательство. Пусть $\mu\prec E_c$. Определим меру ν следующим образом: если F — измеримое подмножество в E, то

$$\nu(F)=\mu(\pi^{-1}(F)).$$

Пусть $\varphi\geqslant 0$ и $\varphi\in C_0(R^m)$, тогда мы имеем

$$\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\mu}(y)=\int_{E_c}\left(\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\delta}_z(y)\right)d\mu(z).$$

Так как $z\in\Delta_c(\pi(z))$ для любого $z\in E_c$, то

$$c\int_{E_c}\left(\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\delta}_z(y)\right)d\mu(z)\geqslant\int_{E_c}\left(\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\delta}_{\pi(z)}(y)\right)d\mu(z)=$$

$$=\int_{E}\left(\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\delta}_x(y)\right)d\nu(x)=\int_{R^m}\varphi(y)\,d\hat{\nu}(y).$$

Теорема 5. *Для любого открытого множества $E\subset R^m$ имеет место неравенство*

$$C_h(E_c)\leqslant c\,\hat{C}_h(E).$$

Доказательство. Пусть $\mu\prec E_c$ произвольно. Согласно лемме 4 существует мера $\nu\prec E$ такая, что

$$U^{(\hat{\nu})}(x)\leqslant c\,U^{(\hat{\mu})}(x)$$

для любого $x\in R^m$. Пусть $p>1$. В силу (6) мы имеем

$$\int_{R^m}(U^{(\hat{\nu})}(x))^q h^{-q/p}(x_1)\,dx\leqslant c^q\int_{R^m}(U^{(\hat{\mu})}(x))^q h^{-q/p}(x_1)\,dx.$$

Следовательно

$$C_h(E_c)\leqslant c\,\hat{C}_h(E).$$

В случае $p=1$ доказательство аналогично.

Пусть $x \in R^{m-1}$. Через $K_c^{\varepsilon}(x)$ обозначим множество тех $y \in R^m$, для которых $x \in P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y))$. Здесь P — ортогональный проектор из R^m на R^{m-1}, а

$$\Delta_c^{(\varepsilon)}(x) = \Delta_c(x) \cap \{z \in R^m / |z - Pz| < \varepsilon\}.$$

Определение. Пусть f — функция, определенная на некотором подмножестве R^m. Мы скажем, что f имеет „угловое" граничное значение в $x \in R^{m-1}$, если для любого $c > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что f определена на $K_c^{\varepsilon}(x)$ и существует следующий предел:

$$\lim_{K_c^{\varepsilon}(x) \ni y \to x} f(y).$$

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathring{\mathfrak{M}}_{\alpha, h, p}$, тогда f имеет „угловые" граничные значения всюду на R^{m-1}, кроме некоторого множества E, для которого $C_h(E) = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество F такое, что $\mathring{C}_h(F) < \varepsilon$ и f определена и непрерывна на $R^m \setminus F$. В силу теорем 2 и 5 для любого c имеем

$$C_h(\widetilde{F}_c) \leqslant 2^{p-1/p} C_h(F_c) \leqslant 2^{p-1/p} c \cdot C_h(F) \leqslant 2^{p-1/p} \cdot c \cdot \varepsilon. \tag{12}$$

Докажем, что в любой точке $x \in R^{m-1} \setminus \widetilde{F}_c$ функция f имеет „угловые" граничные значения. Мы имеем

$$x \in R^{m-1} \setminus \widetilde{F}_c = R^{m-1} \setminus (\bigcap_{\varepsilon>0} P((\bigcup_{y \in F} \Delta_c(y))^{(\varepsilon)})) =$$

$$= R^{m-1} \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{y \in F} P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y)) = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{y \in F} (R^{m-1} \setminus P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y))).$$

Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$x \in R^{m-1} \setminus P(\Delta_c^{(\varepsilon_0)}(y))$$

для любого $y \in F$. Это означает, что

$$K_c^{(\varepsilon_0)}(x) \cap F = \varnothing.$$

Так как f непрерывна на $R^m \setminus F$, то она непрерывна на $K_c^{(\varepsilon_0)}(x)$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{K_c^{(\varepsilon_0)}(x) \ni y \to x} f(y).$$

Из этого следует, что если $E \subset R^{m-1}$ — множество, где нет „угловых" граничных значений для функции f, то $E \subset \bigcup_{c>1} \widetilde{F}_c$. Нетрудно заметить, что если $c_1 < c_2$, то $\widetilde{F}_{c_1} \subset \widetilde{F}_{c_2}$. Поэтому $\bigcup_{c>1} \widetilde{F}_c = \bigcup_{n=2}^{\infty} \widetilde{F}_n$. Пусть $c = n$, а

$\varepsilon = n^{-1} 2^{-(n-p-1)/p} \delta$, где δ— заранее фиксированное число. Тогда мы имеем

$$C_h(E) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} C_h(\bar{F}_h) < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \frac{\delta}{2}\cdot$$

В силу произвольности $\delta > 0$, имеем $C_h(E) = 0$.

4°. В этом параграфе мы рассмотрим несколько конкретных примеров.

Рассмотрим классическое выметание, т. е. если $x \bar{\in} R^m_+$, то $\hat{\delta}_x = \delta_x$, если $x \in R^m_+$, то

$$\hat{\delta}_x(E) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{m/2}} \int\limits_{E \cap R^{m-1}} \frac{x_1}{|x-y|^m}\, dy,$$

где $E \subset R^m$ — измеримое множество.

Пусть $G(r)$, $r > 0$ —неотрицательная, невозрастающая функция и

$$\int\limits_0 G(r)\, r^{m-1}\, dr < \infty.$$

Если функция $G(|x|)$ супергармонична, то, очевидно, что имеет место неравенство согласованности (6). В случае, когда $G(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, для выполнения неравенства (6) достаточно, чтобы $\Delta G(|x|) \geqslant 0$ или, что то же самое

$$rG''(r) + (m-1)\, G'(r) \geqslant 0, \ r > 0.$$

В этом частном случае пространство $\hat{\mathfrak{M}}_{G,h,p}$ совпадает с пространством функций, которые принадлежат $\mathfrak{M}_{G,{}^*h,p}$ и гармоничны в R^m_+.

Теперь выясним, что из себя представляют множества $K_c^*(x)$.

Если $x \bar{\in} R^m_+$, то $\Delta_c(x) = x$. Пусть $x \in R^m_+$. Рассмотрим множество тех $y \in R^m$, для которых

$$c\,\hat{\delta}_y(E) \geqslant \hat{\delta}_x(E) \tag{13}$$

для любого $E \subset R^m$. Для выполнения неравенства (13) достаточно, чтобы

$$c\, \frac{y_1}{|y-z|^m} \geqslant \frac{x_1}{|x-z|^m}$$

для любого $z \in R^{m-1}$. Рассмотрим те точки y, для которых $x_1 = y_1$. Для таких точек мы получаем условие:

$$\sqrt[m]{c} \geqslant \max_{z \in R^{m-1}} \frac{|y-z|}{|x-z|}.$$

Для этого достаточно, чтобы имело место неравенство:

$$(1+|z|^2)\, c^{2/m} > 1+\left|\frac{P(x)-P(y)}{x_1}-z\right|^2$$

для любого $z \in R^{m-1}$, или

$$(1+|z|^2)\, c^{2/m} > 1+\left(\left|\frac{P(x)-P(y)}{x_1}\right|+|z|\right)^2.$$

А это имеет место, если

$$|P(x)-P(y)| \leqslant x_1 \sqrt{\frac{c^{2/m}-1}{2}}. \tag{14}$$

Пусть $z \in R^{m-1}$. Тогда из полученного нами равенства (14) легко следует, что $K_\varepsilon^1(x)$ содержит находящуюся в полосе $\{y \in R^m / 0 < y_1 < \varepsilon\}$ часть конуса с вершиной в точке z и с образующими, которые с нормалью в точке z образуют угол α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{c^{2/m}-1}{2}}\right)$. Множество $K_\varepsilon^1(z) \cap (R^m \setminus R_+^m)$ это часть нормали в точке z, которая находится в полосе $\{y \in R^m / -\varepsilon < y_1 < 0\}$. Следовательно, в этом частном случае, если f имеет „угловое граничное значение в точке $z \in R^{m-1}$, то f имеет предел, когда мы приближаемся к точке z по некасательным к гиперплоскости R^{m-1} путям, находящимся в R_+^m и по нормали, находящейся в $R^m \setminus R_+^m$. После этих замечаний уже нетрудно понять, что утверждает теорема 6 в этом частном случае.

Л. Карлесоном [3] и Х. Валлином [4] рассмотрены некасательные граничные свойства для некоторых классов гармоничных функций*.

У Х. Валлина рассматриваются пространства функций f, которые гармоничны в R_+^m и

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2\, h(y_1)\, dy < \infty \tag{15}$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R_+^m$. Здесь h — неотрицательная, измеримая функция, удовлетворяющая некоторым специальным условиям (см. Х. Валлин [4]). Наш метод позволяет изучить некасательные граничные свойства для гармонических функций, на которых поставлено условие типа (15) на производные более высоких порядков.

В заключение автор выражает благодарность Н. С. Ландкофу за внимание к работе и ценные замечания.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ростовский инженерно-строительный
институт

Поступила 1.X.1973

---

* Результаты Х. Валлина являются обобщением результатов Карлесона.

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Որոշ ֆունկցիաների դասերի «անկյունային» եզրային արժեքների մասին (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում դիտարկվում են ինտեգրալ ներկայացում թույլ տվող ֆունկցիաների որոշ դասերի եզրային արժեքները։ Նկարագրվում են այն բազմությունները $R^{m-1} = \{(x_1, \cdots, x_m) \in R^m / x_1 = 0\}$*-ում, որտեղ այդ ֆունկցիաներն ունեն նորմալ եզրային արժեքներ։ Դիտարկվում են նաև վերոհիշյալ տարածությունների որոշ ենթատարածություններ։ Նկարագրվում են այն բազմությունները* R^{m-1}*-ում, որտեղ այդ ֆունկցիաներն ունեն «անկյունային» եզրային արժեքներ։*

A. A. VAGARSHAKIAN. *On „angular" boundary values of some classes of functions* (summary)

In the present paper the boundary values of some classes of functions, permiting integral representation are considered. The subsets of $R^{m-1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^m / x_1 = 0\}$, where these functions have normal boundary values, described. Some subspaces of spaces mentioned above are also considered. The sets in R^{m-1}, where these functions have „angular" boundary values, are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Aronszajn, K. T. Smith.* Functional spaces and functional completion, Ann. de l'inst. Fourier, 6, 1956, 125—185.
2. *Ю. Г. Решетняк.* О граничном поведении функций с обобщенными производными, Сиб. матем. журн., 13: 2, 1972, 411—419.
3. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.
4. *H. Wallin.* On the existance of boundary values of a class of Beppo Levi functions, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 3, 1965, 510—525.
5. *А. А. Вагаршакян.* Граничные свойства некоторых классов функций, Сиб. матем. журн. (в печатя).