ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН, Д. К. ФАДДЕЕВ

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ, СВЯЗАННЫХ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ПОЛУГРУППЫ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Настоящая статья примыкает к работе [1], в которой исследуются комплексные представления полугруппы матриц над конечным полем $k = GF(q)$, $q = p^c$. В [1] основную роль играет выяснение невырожденности матриц

$$\pi_\Delta = \sum_{P_i, P_j, Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P}_i)\,\Delta(\overline{Q'}\,\overline{P}_j) \times l_{P_i, P_j}.$$

Здесь Δ — неприводимое представление группы $L(m, k)$ невырожденных матриц порядка m; P_i и P_j — m-мерные подпространства в n-мерном пространстве S_n столбцов над полем k; $\overline{P}_i$ — матрица вида $n \times m$, столбцы которой составляют некоторый базис пространства P_i; $\overline{Q'}$ пробегает матрицы вида $m \times n$, строки которых составляют базисы всех m-мерных подпространств в n-мерном пространстве строк. Если под знаком Δ находится вырожденная матрица, то значение Δ считается равным 0.

Матрица π_Δ коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta = \Delta \circ 1_{n-m}$ группы $L(n, k)$. Здесь 1_{n-m} обозначает единичное представление группы $L(n-m, k)$, кружком обозначено умножение представлений групп $L(m, k)$ и $L(n-m, k)$ в смысле [2]. Представление $\lambda_m^n \Delta$ задается следующей явной формулой:

$$(\lambda_m^n \Delta)(A) = \sum_P \Delta(\alpha(A, P)) \times l_{AP, P}.$$

Здесь $A \in L(n, k)$; $\alpha(A, P) \in L(m, k)$ и определяется формулой $A\overline{P} = \overline{AP} \cdot \alpha(A, P)$.

Цель настоящей статьи — доказать невырожденность матриц π_Δ при любых m и n, если Δ есть единичное представление. В дальнейшем мы будем обозначать π_Δ при $\Delta = 1_m$ через π_m^n, опустив знак Δ и подчеркнув зависимость от m и n.

1°. **Эпиморфизм алгебры U_m^n на алгебру U_{m-1}^n.** Как показано в [1], алгебра матриц, коммутирующих с матрицами представления $S_m^n = \lambda_m^n(1_m)$ имеет вид: $U_m^n = \{c_0 U_{0m}^n + c_1 U_{1m}^n + \cdots + c_m U_{mm}^n\}$, где $U_{fm}^n = \sum_{\dim P_i \cap P_j = f} e_{P_i, P_j}$. Алгебра U_m^n коммутативна. Мы будем считать, что $m \leqslant 1/2\, n$ и лишь в конце статьи рассмотрим случай $m > n/2$. В предположении $m \leqslant n/2$ все матрицы U^n_{fm}, $f = 0, 1, \cdots, m$ имеют смысл, так что ранг алгебры U^n_m равен $m + 1$. Как показано в [1], имеется мономорфизм ψ модуля представления S^n_{m-1} в модуль представления S^n_m. Именно, модуль S^n_m имеет базис $\{e_{P_i}\}$, где P_i пробегает все m-мерные подпространства пространства S_n и мономорфизм ψ действует по формуле $\psi(e_{Q_j}) = \sum\limits_{P_i \supset Q_j} e_{P_i}$; здесь через $\{e_{Q_j}\}$ обозначен базис модуля S^n_{m-1} и через Q_j обозначены $(m-1)$-мерные подпространства S_n. Ясно, что $S^n_m = \psi(S^n_{m-1}) \oplus T^n_m$, где T^n_m — неприводимое представление группы $L(n, k)$. Степень представления T^n_m равна

$$\frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-m+1}-1)}{(q-1)\cdots(q^m-1)} - \frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-m+2}-1)}{(q-1)\cdots(q^{m-1}-1)}.$$

Соответственно, алгебра U^n_m раскладывается в прямую сумму алгебр, одна из которых изоморфна U^n_{m-1}, другая—полю C. Поэтому существует эпиморфизм ψ^* алгебры U^n_m на U^n_{m-1}, естественным образом связанный с мономорфизмом ψ.

Выведем явную формулу для эпиморфизма ψ^*. С этой целью прежде всего вычислим

$$U^n_{fm}\, \psi(e_{Q_1}) = \sum_{P_j \supset Q_1} \; \sum_{\dim P_i \cap P_j = f} e_{P_i} = \alpha_f \tau_f + \beta_f \tau_{f-1},$$

где $\tau_f = \sum\limits_{\dim P_i \cap Q_1 = f} e_{P_i}$.

Коэффициент α_f обозначает число m-мерных подпространств P_j, содержащих Q_1 и имеющих f-мерное пересечение с P_i, в предположении, что $\dim P_i \cap Q_1 = f$; β_f обозначает то же самое, но в предположении, что $\dim P_i \cap Q_1 = f - 1$. Других значений, кроме f и $f - 1$ число $\dim P_i \cap Q_1$ не может иметь. Положим $P_i \cap Q_1 = R$ и перейдем в факторпространство по R, обозначив этот переход тильдой. Если

$$\dim R = f - 1, \text{ то } \dim \tilde{Q}_1 = m - f, \ \dim \tilde{P}_i = \dim \tilde{P}_j = m - f + 1,$$

$$\dim \tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = 1, \ \dim \tilde{P}_i \cap \tilde{Q}_1 = 0 \ \text{ и } \ \tilde{P}_j \supset \tilde{Q}_1.$$

Все это обозначает, что $\tilde{P}_j$ получается из $\tilde{Q}_1$ сложением с одномерным подпространством, содержащимся в $\tilde{P}_i$. Поэтому β_f равно числу таких подпространств, т. е. $\beta_f = \dfrac{q^{m-f+1}-1}{q-1}$. Если же

$$\dim R = f, \text{ то } \dim \tilde{Q}_1 = m - f - 1, \ \dim \tilde{P}_i = \dim \tilde{P}_j = m - f,$$

$$\dim \tilde{P}_l \cap \tilde{P}_j = 0, \ \dim \tilde{P}_l \cap \tilde{Q}_1 = 0 \text{ и } \tilde{P}_j \supset \tilde{Q}_1.$$

Это означает, что $\tilde{P}_j$ есть любое подпространство размерности $m-f$, содержащее $\tilde{Q}$, кроме тех, которые получаются из $\tilde{Q}_1$ сложением с одномерными пространствами, содержащимися в $\tilde{P}_l$. Поэтому

$$\alpha_f = \frac{q^{n-m+1}-1}{q-1} - \frac{q^{m-f}-1}{q-1} = \frac{q^{n-m+1}-q^{m-f}}{q-1}.$$

Теперь вычислим

$$\sigma_k = \psi(U^n_{k,m-1}e_{Q_1}) = \sum_{\dim Q \cap Q_1 = k} \psi(e_Q) = \sum_{\dim Q \cap Q_1 = k} \sum_{P_l \supset Q} e_{P_l} = V_k\tau_k + \delta_k\tau_{k+1}.$$

Здесь $\tau_k = \sum\limits_{\dim P_l \cap Q_1 = k} e_{P_l}$, в соответствии с обозначением, введенным выше; коэффициент ν_k равен числу $(m-1)$-мерных подпространств Q, содержащихся в P_l и имеющих с Q_1 k-мерное пересечение, в предположении, что $\dim P_l \cap Q_1 = k$; коэффициент δ_k обозначает то же самое, но в предположении, что $\dim P_l \cap Q_1 = k+1$. Ясно, что ν_k равно числу $(m-1)$-мерных подпространств m-мерного пространства P_l, содержащих k-мерное подпространство $P_l \cap Q_1$, так что $\nu_k = \frac{q^{m-k}-1}{q-1}$, а δ_k равно числу $(m-1)$-мерных подпространств пространства P_l, не содержащих $(k+1)$-мерное подпространство $P_l \cap Q_1$, так что

$$\delta_k = \frac{q^m-1}{q-1} - \frac{q^{m-k-1}-1}{q-1} = \frac{q^m - q^{m-k-1}}{q-1}.$$

Из системы равенств

$$\sigma_{m-1} = \tau_{m-1},$$

$$\sigma_{m-2} = \frac{q^2-1}{q-1}\tau_{m-2} + \frac{q^m-q}{q-1}\tau_{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_1 = \frac{q^{m-1}-1}{q-1}\tau_1 + \frac{q^m-q^{m-2}}{q-1}\tau_2,$$

$$\sigma_0 = \frac{q^m-1}{q-1}\tau_0 + \frac{q^m-q^{m-1}}{q-1}\tau_1,$$

находим

$$\tau_f = (q-1)\left[\frac{1}{q^{m-f}-1}\sigma_f - \frac{q^m-q^{m-f-1}}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1})}\sigma_{f+1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{m-f-1}\frac{(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q)}{(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)}\sigma_{m-1}\right].$$

Как мы выяснили выше

$$U^n_{fm}\ \psi(e_{Q_1}) = \frac{q^{n-m+1}-q^{m-f}}{q-1}\tau_f + \frac{q^{n-f+1}-1}{q-1}\tau_{f+1} =$$

$$= \sigma_{f-1} + \frac{q^{n-m+1}-q^m}{q-1}\tau_f$$

(при $f=0$ первое слагаемое отсутствует).

Подставляя вместо τ_f его выражение через σ_i, мы придем к формуле

$$U^n_{fm}(\psi\, e_{Q_1}) = \psi\,((\psi^*\, U^n_{fm})\, e_{Q_1}),$$

где

$$\psi^*\, U^n_{fm} = U^n_{f-1,\, m-1} + \frac{q^{n-m+1}-q^m}{q^{m-f}-1}\, U^n_{f,\, m-1} -$$

$$-\frac{(q^{n-m+1}-q^m)(q^m-q^{m-f-1})}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1}-1)}\, U^n_{f+1,\, m-1} + \cdots +$$

$$+(-1)^{m-f-1}\frac{(q^{n-m+1}-q^m)(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q)}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1}-1)\cdots(q-1)}\, U^n_{m-1,\, m-1}.$$

Ясно, что ψ^* и есть искомый эпиморфизм алгебры U^n_m на алгебру U^n_{m-1}.

Используя выведенную формулу для ψ^*, мы имеем возможность индуктивно найти все гомоморфизмы алгебры U^n_m в поле комплексных чисел. Именно, зная гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}$ алгебры U^n_{m-1} в C (их кратности равны степеням неприводимых представлений $T^n_0, \cdots, T^n_{m-1}$), мы найдем соответствующие гомоморфизмы алгебры $\mathrm{U}^n{}_m$ (с теми же кратностями), как $\varphi_0\psi^*, \cdots, \varphi_{m-1}\psi^*$. Последний гомоморфизм φ_m находится из того, что сумма всех гомоморфизмов (с учетом кратностей, которые известны) равна следу. Однако, явные формулы для гомоморфизмов алгебры U^n_m в поле C очень громоздки, и мы их приводить не будем.

2°. Собственные значения матрицы π^n_m.

Лемма. $\psi^*\,\pi^n_m = q^{2n-4m+2}\,\pi^n_{m-1}$.

Доказательство. Согласно формулам (7) и (8) из [1], матрица π^n_m (при $m \leqslant n/2$) равна

$$\sum_{f=0}^{m} q^{(n-2m+f)\, m+1/2\,(m-f)(m+f-1)}\,(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\, U^n_{fm}.$$

Действительно, матрица Λ_f, участвующая в формуле (7), равна в рассматриваемом случае (согласно формуле (8)) числу невырожденных треугольных матриц порядка m и вида $\begin{pmatrix} E_f, & B_1 \\ 0, & B_2\end{pmatrix}$, которое, как легко видеть, равно $q^{1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)$. Применение гомоморфизма ψ^* дает:

$$\psi^*\pi_m^n=\sum_{f=1}^{m} q^{(n-2m+f)m+1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\,U_{f-1,\,m-1}^n+$$

$$+\sum_{f=0}^{m-1}(q^{n-m+1}-q^m)\,q^{(n-2m+f)m+1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\times$$

$$\times\sum_{k=f}^{m-1}(-1)^{k-f}\frac{(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q^{m-k})}{(q^{m-f}-1)\cdots(q^{m-k}-1)}\,U_{k,\,m-1}^n.$$

В первой сумме заменим $f-1$ на k, во второй—сделаем тривиальные преобразования и изменим порядок суммирования. Получим

$$\psi^*\pi_m^n=\sum_{k=0}^{m-1}q^{(n-2m+k+1)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n+$$

$$+(q^{n-m+1}-q^m)\sum_{k=0}^{m-1}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,q^{(n-2m+k)m+1/2(m-k)(m-k-1)}\times$$

$$\times\sum_{f=0}^{k}q^f(1-q^{f+1})\cdots(1-q^k)\,U_{k,\,m-1}^n,$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\sum_{f=0}^{k}q^f(1-q^{f+1})\cdots(1-q^k)=1,$$

$$\psi^*\pi_m^n=q^m\sum_{k=0}^{m-1}q^{(n-2m+k)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n+$$

$$+(q^{n-m+1}-q^m)\sum_{k=0}^{m-1}q^{(n-2m+k)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots$$

$$\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n=q^{2n-4m+2}\,\pi_{m-1}^n,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы и сказаного выше следует, что собственные значения $\varphi_i(\pi_{m-1}^n)$, $i=0,\cdots,m-1$, матрицы π_{m-1}^n, после умножения на $q^{2n-4m+2}$, превращаются в собственные значения $\varphi_i(\pi_m^n)$ матрицы π_m^n, с сохранением кратностей. Последнее собственное значение определяется из сравнения следов:

$$Sp\,\pi_m^n=q^{2n-4m+2}\,Sp\,\pi_{m-1}^n+t_m\,\varphi_m(\pi_m^n).$$

Здесь t_m есть кратность собственного значения $\varphi_m(\pi_m^n)$, равная степени неприводимого представления T_m^n группы $L(n,k)$, так что

$$t_m=\frac{(q^n-1\cdots(q-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)}-$$

$$-\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-1)\cdots(q-1)}=$$

$$=\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-q^m)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Далее

$$Sp\,\pi^n_m=q^{(n-m)m}\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)}.$$

Здесь первый множитель равен диагональному элементу матрицы π^n_m, второй множитель равен ее порядку. После несложных преобразований получим

$$\varphi_m(\pi^n_m)=q^{nm-m^2-m}.$$

Пусть теперь $0\leqslant s<m$. Тогда

$$\varphi_s(\pi^n_m)=\varphi_s(\pi^n_s)\cdot q^{2n-4s-2}\cdot q^{2n-4s-6}\cdots q^{2n-4m+2}=q^{2m(n-m)-s(n-s+1)}.$$

Таким образом, все собственные значения матрицы π^n_m отличны от нуля и являются степенями числа q.

Формула для собственных значений выведена в предположении, что $m\leqslant 1/2\,n$. Легко видеть, что матрица π^n_m равна матрице π^n_{n-m}, при надлежащей нумерации строк и столбцов. Поэтому в предположении $m\geqslant 1/2n$ для собственных значений матрицы π^n_m сохраняется прежняя формула и только индекс s нужно считать меняющимся от 0 до $n-m$.

Ленинградское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова АН СССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 16.VII.1973

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ. Դ. Կ. ՖԱԴԴԵԵՎ. Որոշ մատրիցների չվերասերվածությունը, կապված վերջավոր դաշտերի վրա մատրիցների կիսախմբի ներկայացման հետ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հաշվվում է π_Δ մատրիցայի սեփական արժեքները, երբ $\Delta=1$ [1] *աշխատանքի տերմիններով և ցույց է տրվում այդ մատրիցների չվերասերվածությունը։*

B. M. EDIGARIAN, D. K. FADDEEV. *On the nonsingularity of certain matrices connected with representations of a semigroup of matrices over finite field* (summary)

Eigenvalues of matrices π_Δ with $\Delta=1$ are calculated in terms of [1]. The nonsingularity of this matrices is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Едигарян* и *Д. К. Фаддеев.* Комплексные представления полугруппы матриц ранга 2 над конечным полем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.,' VI, № 6, 1971, 440—457.
2. *J. A. Green.* The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer., Math. Soc., 80, № 2, 1955, 402—467.