ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5. 1974 Математика

А. А. ЧУБАРЯН

О ДЛИНАХ ВЫВОДОВ ФОРМУЛ В РАСШИРЕНИЯХ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

В настоящей работе сравнивается длина выводов формул в двух формальных системах, в одной из которых доказуема непротиворечивость другой. Аналогичная задача по сравнению числа шагов выводов рассматривалась Гёделем [1]. Им была сформулирована следующая теорема: пусть S—непротиворечивая формальная система, которая получается посредством присоединения к формальной арифметике оператора L w (см. [5]), и пусть система S_1 получается из S путем добавления аксиом квантификации II порядка; при этом некоторые формулы, недоказуемые и неопровержимые в S становятся доказуемыми или опровержимыми в S_1; тогда для любой вычислимой функции φ найдется формула F такая, что для длин l и l_1 (определяемых как число формул) самых коротких ее доказательств в S и S_1 имеет место $l > \varphi(l_1)$.

Доказательство этой теоремы впервые было опубликовано Крейселом и Ваном [2]. При этом авторами указывается, что вычислимость функции φ несущественна; фактически в [2] доказано, что существует бесконечная последовательность формул с одной и той же длиной вывода в S_1, в то время как длины выводов тех же формул в S не ограничены. Введение функции φ в формулировку теоремы придает ей вид утверждения об оценке функции Шеннона для сравнения числа шагов выводов в двух вышеназванных системах. Однако, если сложность вывода определяется как количество формул в нем, то построение указанной функции Шеннона оказывается, вообще говоря, невозможным, так как в рассматриваемых формальных системах за одно и то же число шагов можно вывести бесконечно много различных формул.

Мостовским доказан в [3] вариант теоремы Гёделя, в котором в качестве длины вывода берется гёделев номер этого вывода. Автор вводит в формулировку требование вычислимости функции φ, что существенно для его результата, однако при этом рассматриваемые им системы оказываются более сложными (подробнее о работе Мостовского будет сказано ниже).

Арбибом в [4] устанавливается сходство теоремы „ускорения доказательств“ Гёделя с теоремой ускорения вычислений Блюма.

В настоящей работе также сравниваются по длине выводов две формальные системы, но определяемая нами сложность вывода дает возможность определить функцию Шеннона для сравнения минимальной длины вывода формулы в более широкой системе с минимальной длиной вывода той же формулы в первоначальной системе (при этом сравнение проводится лишь для тех формул, которые выводимы одновременно в обеих системах). Устанавливается, что указанная функция Шеннона всюду на достаточно больших натуральных числах превышает любую наперед заданную обще-рекурсивную функцию. Такое утверждение может рассматриваться как аналог теоремы Рабина [8] для оценок сложности длин выводов.

В работе все термины и утверждения понимаются конструктивно [9].

Определим рассматриваемые формальные системы.

Через S обозначим обычную формальную арифметику ([5], гл. IV) с алфавитом ( ), $|\, a\, 0\, \&\, \vee \supset \neg\, \exists\, \forall + \cdot\, | =$. а также с обычным определением терма, формулы и вывода. При этом предметные переменные определяются как слова в алфавите системы: под переменной X_i мы будем понимать слово $(\overbrace{||\cdots|}^{i\text{ раз}}a)$.

Первая из рассматриваемых нами систем (в дальнейшем будем обозначать ее через S^0) получается присоединением к S функциональных переменных для всевозможных примитивно рекурсивных функций, а также термов и аксиом, имеющих вид определяющих равенств для примитивной рекурсии и суперпозиции. При этом функциональные переменные мы определим как слова в алфавите, полученном присоединением нового символа f к алфавиту системы S: переменную f_i^n размерности n определим как слово $(\overbrace{||\cdots|}^{i\text{ раз}}f\overbrace{||\cdots|}^{n\text{ раз}})$.

Как известно, утверждение о непротиворечивости формальной системы может быть выражено в ней различными способами. Одну из общепринятых формул, посредством которой в системе S^0 можно выразить непротиворечивость S^0 и которая недоказуема в S^0 (см., напр., [5], русский перевод, стр. 189) зафиксируем и будем обозначать ее в дальнейшем через „Consis“.

Вторая из рассматриваемых систем является таким непротиворечивым расширением S^0, в котором доказуема формула Consis.

В частности, систему такого рода можно получить, присоединив Consis к S^0 в качестве аксиомы. Одно из таких расширений системы S^0 (неважно которое) зафиксируем и будем впредь обозначать через S^1.

Длину формулы мы будем понимать в соответствии с обычным пониманием длины слова.

В дальнейшем буква W будет использоваться нами в роли переменной, допустимыми значениями которой являются всевозможные выводы в системе S^0 и в системе S^1, а буква F в роли переменной, допустимыми значениями которой являются формулы, выводимые в S^0 (ясно, что эти формулы выводимы также и в S^1).

Длину вывода W формулы F в системе $S^i\ (i=0,1)$ определим как сумму длин всех формул этого вывода и обозначим через $L\ (W \underset{i}{\rightarrow} F)$.

В дальнейшем термин „псевдофункция" будет пониматься нами в том же смысле, как введено в [10] и [11].

Будем называть число n сложностью формулы F по выводимости в системе S^i $(i=0, 1)$, если оно равно минимальной из длин всевозможных выводов этой формулы в системе S^i. В силу этого, n является значением псевдофункции $\overline{L}^i(F)$, определяемой следующим соотношением:

$$(\overline{L}^i(F)=n)\equiv(\neg\neg\exists W(L(W \underset{i}{\rightarrow} F)=n)\ \&\ \forall W(L(W \underset{i}{\rightarrow} F)\geqslant n)).$$

Ясно, что для каждой формулы $F\ \overline{L}^1(F)\leqslant\overline{L}^0(F)$.

Определим псевдофункцию Шеннона $Ш^{10}$ посредством следующего соотношения

$$(Ш^{10}(n)=m)\equiv(\forall F(\overline{L}^1(F)\leqslant n\supset\neg\neg\exists W(L(W \underset{0}{\rightarrow} F)\leqslant m))\ \&$$

$$\&\forall m'(m'<m\supset\neg\forall F(\overline{L}^1(F)\leqslant n\supset\neg\neg\exists W(L(L(W \underset{0}{\rightarrow} F)\leqslant m'))))^*.$$

Теорема. *Для всякой обще-рекурсивной функции φ существует такое натуральное число n_0, что для всех $n>n_0$ имеет место*

$$Ш^{10}(n)>\varphi(n).$$

Замечание: Для сложности вывода, понимаемой в смысле определения Мостовского [3], можно определить псевдофункцию Шеннона $Ш^{10}$ так же, как это сделано выше, и тогда результат Мостовского [3] может быть сформулирован следующим образом: для всякой обще-рекурсивной функции φ существует число n_0 такое, что $Ш^{10}(n_0)>\varphi(n_0)$. Следует отметить, что формальные системы, рассматриваемые в книге Мостовского, допускают введение функциональных символов для произвольных обще-рекурсивных функций; таким образом, эти системы более сложны по сравнению с системами, рассматриваемыми в настоящей статье.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые понятия и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Условимся, как обычно, для любого целого неотрицательного n терм $(\cdots((0)')'\cdots)'$, представляющий в интерпретации наших формальных систем натуральное число n, обозначать через $\overline{n}$.

---

* Соотношения, с помощью которых были введены указанные псевдофункции могут быть сокращенно записаны в виде

$$\overline{L}^i(F)=\min_{W} L(W \underset{i}{\rightarrow} F)$$

и

$$Ш^{10}(n)=\max_{\overline{L}^1(F)\leqslant n}\overline{L}^0(F).$$

Далее строчными буквами x, y, z, u, v, w (возможно с индексами) будем обозначать математические переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа (в содержательном понимании). Отметим, что, в отличие от метаматематических переменных, переменные наших формальных систем обозначаются заглавными буквами X_i $(i = 1, 2, \cdots)$.

Для дальнейшего нам нужно зафиксировать одну из гёделевых нумераций формальных объектов системы S^0. Нам будет удобно пользоваться арифметизацией, основанной на следующей нумерации (аналогичная нумерация рассматривается в [5]):

$$g\,(()=3,\ g\,())=5,\ g\,(,)=7,\ g\,(|)=9,\ g\,(a)=11,\ g\,(0)= \\ =13,\ g\,(f)=15,$$

$$g\,(\&)=17,\ g\,(V)=19,\ g\,(\supset)=21,\ g\,(\urcorner)=23,\ g\,(\exists)=25,\ g\,(\forall)=27,$$

$$g\,(')=29,\ g\,(+)=31,\ g\,(\cdot)=33,\ g\,(=)=35.$$

Пусть дано слово $m_0m_1\cdots m_r$, где все m_i какие-либо из вышеприведенных символов. Гёделевский номер $g\,(m_0m_1\cdots m_r)$ этого слова определим как $2^{g\,(m_0)}\cdot 3^{g\,(m_1)}\cdots p_r^{g\,(m_r)}$, где p_i есть i-ое простое число $(p_0 = 2)$.

Если через $c\,(i)$ обозначить гёделев номер переменной X_i, то, по определению, $c\,(i) = 2^3\cdot\left(\prod\limits_{k=1}^{i} p_k^9\right)\cdot p_{i+1}^{11}\cdot p_{i+2}^5$, следовательно, $c\,(i)$ — примитивно рекурсивная функция.

Наконец, гёделев номер произвольной последовательности $e_0e_1\cdots$ $\cdots e_q$ слов определим следующим образом:

$$g\,(e_0e_1\cdots e_q) = 2^{g\,(e_0)}\cdot 3^{g\,(e_1)}\cdots p_q^{g\,(e_q)}\,.$$

Отметим, что вывод может рассматриваться как последовательность слов, являющихся формулами.

Нетрудно убедиться, что функция g взаимно однозначно отображает множество всех символов, выражений и конечных последовательностей слов системы S^0 в некоторое примитивно рекурсивное множество целых положительных чисел.

Мы будем говорить, следуя [6], что предикат $R\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ нумерически выразим в S^0, если существует формула $\overline{R}(X_1, X_2, \cdots X_n)$ системы S^0 с n свободными переменными такая, что для любых натуральных чисел k_1, $k_2, \cdots, k_n$

(1) если $R\,(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, то $\vdash_{S^0} \overline{R}\,(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \cdots, \overline{k}_n)$;

(2) если же неверно $R\,(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, то $\vdash_{S^0} \urcorner\,\overline{R}\,(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \cdots, \overline{k}_n)$.

Как известно, всякий обще-рекурсивный предикат нумерически выразим в S^0.

Определим следующую функцию:

$$\text{Дв}(y) = \sum_{i=0}^{lh(y)} lh(ex_i(y)),$$

где $lh(y)$ есть функция, равная числу отличных от нуля показателей в разложении числа y на простые множители, и $ex_i(y)$ — функция, равная показателю числа p_i в разложении y на простые множители. В силу примитивной рекурсивности двух последних функций (см., напр., [6]), функция Дв (y) также примитивно рекурсивна. Нетрудно убедиться, что для значений y, которые являются гёделевыми номерами выводов, Дв (y) дает длину вывода с номером y.

Напомним определения следующих примитивно рекурсивных функций и предикатов (см. [6]).

Fml (x): „x является гёделевым номером некоторой формулы".

Sub $st(x, y, u, v)$: „x является гёделевым номером результата подстановки терма с гёделевым номером u вместо всех свободных вхождений переменной с гёделевым номером v в выражение с гёделевым номером y".

Sub (y, u, v) = гёделеву номеру результата подстановки терма с гёделевым номером u вместо всех свободных вхождений переменной с гёделевым номером v в выражение с гёделевым номером y.

Pf (y, x): „y является гёделевым номером вывода формулы с гёделевым номером x".

Num (y) = гёделеву номеру $\overline{y}$.

Определим функцию: $\rho(x, y)$ = гёделеву номеру результата подстановки в формулу с гёделевым номером x терма с гёделевым номером y вместо всех свободных вхождений переменной X_3. Из определения следует, что $\rho(x, y) = \text{Sub}(x, y, 2^{c(3)})$, следовательно, является примитивно рекурсивной функцией.

Функциональную переменную, соответствующую функции ρ, обозначим через $\overline{\rho}$, а гёделев номер переменной $\overline{\rho}$ — через c_ρ.

Определим предикат: $T(u, v, w, z)$: „существует такое x, что $x \leqslant u$, и x является гёделевым номером произвольной формулы $A(X_1, X_3)$ со свободными переменными X_1 и X_3, и $u = \rho(x, w)$, и v является гёделевым номером вывода длины $\leqslant z$ формулы $A(\overline{\rho}(\overline{x}, \overline{w}), \overline{w})$".

Нетрудно показать, что этот предикат примитивно рекурсивен, действительно

$$T(u, v, w, z) \equiv \exists x_{x \leqslant u} (\text{Fml}(x) \,\&\, \neg\, \text{Sub}\, st(x, x, 2^{c(x)}, 2^{c(1)}) \,\&$$

$$\&\, \neg\, \text{Sub}\, st(x, x, 2^{c(x)}, 2^{c(3)})$$

$$\&\, u = \rho(x, w)$$

$$\&\, \text{Pf}(v, \text{Sub}(\rho(x, w), 2^{c_\rho} \cdot 3^3 \cdot 5^{\text{Num}(x)} \cdot 7^7 \cdot 11^{\text{Num}(w)} \cdot 13^5, 2^{c(1)})$$

$$\&\, \text{Дв}(v) \leqslant z).$$

Пусть $\tau(t, z)$ — такая примитивно рекурсивная функция, что для каждого t существует z такое, что $\tau(t, z) = 0$.

Посредством $V_\tau(x_1, x_2, x_3)$ будем в дальнейшем обозначать предикат

$$V_\tau(x_1, x_2, x_3) \equiv \exists x_4 ((\tau(x_3, x_4) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < x_4 \supset \neg (\tau(x_3, x_5) = 0)))\&$$

$$\& T(x_1, x_2, x_3, x_4)).$$

Предикат

$$V'_\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\tau(x_3, x_4) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < x_4 \supset \neg (\tau(x_3, x_5) = 0)))\&$$

$$\& T(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

является примитивно рекурсивным, а значит, нумерически выразимым в S^0, следовательно, существует формула системы S^0 $\overline{V}'_\tau(X_1, X_2, X_3, X_4)$ со свободными переменными X_1, X_2, X_3, X_4 такая, что для всех k_1, k_2, k_3, k_4, если $V'_\tau(k_1, k_2, k_3, k_4)$, то $\vdash_{S^0} \overline{V}'_\tau(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4)$. Если обозначить функциональную переменную для функции τ через $\overline{\tau}$, то в качестве $\overline{V}'_\tau(X_1, X_2, X_3, X_4)$ может служить формула

$$(\overline{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \neg (\overline{\tau}(X_3, X_5) = 0))) \& \overline{T}(X_1, X_2, X_3, X_4), \qquad (*)$$

где $\overline{T}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ — некоторая фиксированная формула, нумерически выражающая в S^0 предикат $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$. В дальнейшем за формулой (*) зафиксируем обозначение $\overline{V}'_\tau(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Обозначим формулу $\exists X_4 \overline{V}'_\tau(X_1, X_2, X_3, X_4)$ через $\overline{V}_\tau(X_1, X_2, X_3)$. Нетрудно показать, что для произвольного набора натуральных чисел k_1, k_2, k_3, если имеет место $V_\tau(k_1, k_2, k_3)$, то $\vdash_{S^0} \overline{V}_\tau(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3)$.

Возьмем формулу $\forall X_2 \neg \overline{V}_\tau(X_1, X_2, X_3)$. Свободными переменными этой формулы являются X_1 и X_3. Пусть ее гёделев номер есть c_τ.

Формулу $\forall X_2 \neg \overline{V}_\tau(\overline{\varphi}(\overline{c}_\tau, X_3), X_2, X_3))$ обозначим через F_τ. Результат подстановки произвольного терма r в формулу F_τ вместо переменной X_3 будем записывать в виде $[F_\tau]_r^{X_3}$.

Лемма 1. *Если S^0— непротиворечивая система, то для всяких натуральных чисел l и m, если m наименьшее такое число, что $\tau(l, m) = 0$, то формула $[F_\tau]_{\overline{l}}^{X_3}$ не выводима в S^0 с длиной вывода, не превышающей m.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть S^0 — непротиворечивая система и для некоторых l и m, m является минимальным таким, что $\tau(l, m)=0$, и формула $[F_\tau]_{\overline{l}}^{X_3}$ выводима в S^0 с длиной вывода, не превышающей m. Пусть k есть гёделев номер этого вывода.

Рассмотрим вывод формулы $[F_{\tau}]^{X}_{\bar{l}}$ в S^0; приписав к нему две формулы

$$\forall X_2 \urcorner \overline{V_{\tau}}\,(\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ X_2,\ \bar{l}) \supset \urcorner\, \overline{V_{\tau}}\,(\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ \bar{k},\ \bar{l})$$

и

$$\urcorner \overline{V_{\tau}}\ (\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ \bar{k},\ \bar{l}),$$

получим вывод формулы $\urcorner \overline{V_{\tau}}\ (\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ \bar{k},\ \bar{l})$ в S^0.

Итак

$$\vdash_{S^0} \urcorner \overline{V_{\tau}}\ (\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ \bar{k},\ \bar{l}). \qquad (**)$$

С другой стороны, для рассматриваемых l и m имеем

$$\tau\,(l,\ m) = 0\&\forall x_5\,(x_5 < m \supset \urcorner\,(\tau\,(l,\ x_5) = 0)),$$

и c_{τ} является гёделевым номером формулы со свободными переменными X_1 и X_3, и k является геделевым номером вывода длины, не превышающей m, формулы, получающейся из формулы с номером c_{τ}, в результате подстановки $\overline{\rho\,(c_{\tau},\ l)}$ вместо X_1 и $\bar{l}$ вместо X_3.

Следовательно, имеет место $V_{\tau}(\rho\,(c_{\tau},\ l),\ k,\ l)$, значит,

$$\vdash_{S^0} \overline{V_{\tau}}(\overline{\rho\,(c_{\tau},\ l)},\ \bar{k},\ \bar{l}).$$

Поскольку термам $\overline{\rho\,(c_{\tau},\ l)}$ и $\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l})$ в интерпретации системы S^0 соответствуют одни и те же числа, то

$$\vdash_{S^0} \overline{\rho\,(c_{\tau},\ l)} = \bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),$$

а следовательно, по теореме о замене (см. [5]. русск. перевод, стр. 167)

$$\vdash_{S^0} \overline{V_{\tau}}\ (\bar{\rho}\,(\bar{c}_{\tau},\ \bar{l}),\ \bar{k},\ \bar{l}),$$

что вместе с (**) противоречит предположению о непротиворечивости S^0, значит наше допущение было неверным.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $\vdash_{S^0} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3\, F_{\tau}$.

Поскольку утверждение леммы 1 может быть формально записано в виде формулы

$$\mathrm{Consis} \supset \forall X_3 \forall X_4 \forall X_2\,(\bar{\tau}\,(X_3,\ X_4) = 0\&\forall X_5\,(X_5 < X_4 \supset \urcorner\,(\bar{\tau}\,(X_3,\ X_5) = 0)) \supset$$
$$\supset \urcorner\, \overline{T}\,(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)),$$

то посредством формализации метаматематического доказательства леммы 1 получим

$$\vdash_{S^0} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3 \forall X_4 \forall X_2 (\bar{\tau}\,(X_3,\ X_4) = 0\&\forall X_5\,(X_5 < X_4 \supset \urcorner\,(\bar{\tau}(X_3,\ X_5) =$$
$$= 0)) \supset \urcorner\, \overline{T}\,(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)),$$

и в силу эквивалентности $\forall X_3 F_{\bar{\tau}}$ и

$$\forall X_3 \forall X_4 \forall X_2 (\bar{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4) \supset \neg (\bar{\tau}(X_3, X_5) = 0)) \supset$$

$$\supset \neg \overline{T}(X_1, X_2, X_3, X_4))$$

имеем $\vdash_{S^*} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3 F_{\bar{\tau}}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Для всякой обще-рекурсивной функции φ существует обще-рекурсивная функция ψ такая, что*

$$\forall a \forall b \left(b \neq 0 \supset \exists n_0 \forall n \left(n > n_0 \supset \psi\left(\left|\frac{n-a}{b}\right|\right) > \varphi(n)\right)\right).$$

Доказательство. Достаточно положить

$$\psi(m) = \max_{\substack{d \neq 0 \\ c+d \leqslant m}} \left(\max_{p \leqslant d-1} \varphi(c + dm + p)\right) + 1.$$

Действительно, для фиксированных a и $b \neq 0$ положим $n_0 = b(a+b)+a$. Если $n > n_0$, то $n - a > b(a+b)$. Тогда для $m = \left[\frac{n-a}{b}\right]$ и $p = n - a - b\left[\frac{n-a}{b}\right]$ имеем: $n = a + bm + p$ и тогда, ввиду $a + b \leqslant m$ и $p < b$, $\psi\left(\left[\frac{n-a}{b}\right]\right) = \psi(m) \geqslant \varphi(a + bm + p) + 1 > \varphi(n)$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы.

Зафиксируем произвольную обще-рекурсивную функцию φ. Наша задача заключается в нахождении такого n_0, чтобы для всех $n > n$ выполнялось неравенство

$$Ш^{10}(n) > \varphi(n).$$

Для функции φ построим функцию ψ, удовлетворяющую условиям леммы 3.

Известно, что для каждой обще-рекурсивной функции, в частности для ψ, имеет место следующее представление [7]:

$$\psi(x) = \mu_z(\tau_\psi(x, z) = 0) \dot{-} \mu_z(\tau'_\psi(x, z) = 0),$$

где $\tau_\psi(x, z)$ (соответственно $\tau'_\psi(x, z)$) такая примитивно рекурсивная функция, которая удовлетворяет следующему условию: для каждого x существует z такое, что $\tau_\psi(x, z) = 0$ (соответственно $\tau'_\psi(x, z) = 0$).

Обозначим $\mu_z(\tau_\psi(x, z) = 0)$ через $\tilde{\psi}(x)$. Ясно, что

$$\forall x (\tilde{\psi}(x) \geqslant \psi(x)). \qquad (***)$$

Возьмем функцию τ_ψ и построим формулу F_{τ_ψ}. Утверждение леммы 2 для этой формулы заключается в следующем:

$$\vdash_{S^0} \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi},$$

а следовательно

$$\vdash_{S^1} \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}.$$

Для произвольного t вывод формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$ в S^1 можно построить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \text{Consis} \end{array}\right\} \text{вывод формулы Consis}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi} \end{array}\right\} \text{вывод формулы } \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}$$

$$\forall X_3 F_{\tau_\psi}$$

$$\forall X_3 F_{\tau_\psi} \supset [F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$$

$$[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}.$$

Оценим длину этого вывода для фиксированного t. Заметим, что длина терма $\bar{t}$ равна $3t+1$. Пусть длины выводов формул Consis и $\text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}$ равны соответственно l и l_ψ. Длина формулы $\forall X_3 F_{\tau_\psi}$ также равна некоторой константе; обозначим ее через l'_ψ. Пусть переменная X_3 входит в формулу F_{τ_ψ} в l''_ψ местах, тогда длина формулы $\forall X_3 F_{\tau_\psi} \supset [F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$ равна $l'_\psi + 1 + l'_\psi - 1 - 6 + l''_\psi (3t + 1 - 6)$*, где $l'_\psi - 7 + l''_\psi (3t-5)$ есть длина формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$. Таким образом, длина указанного вывода равна

$$l + l_\psi + l'_\psi + l'_\psi + 1 + 2\,(l'_\psi - 7 + l''_\psi \cdot 3t - 5 l''_\psi) = c'_\psi t + c''_\psi,$$

где $c'_\psi = 6\, l''_\psi$ и $c''_\psi = l + l_\psi + 4 l'_\psi - 10\, l''_\psi - 13$.

Возьмем в качестве n_0 число

$$c'_\psi\,(c'_\psi + c''_\psi) + c''_\psi.$$

Тогда для всякого фиксированного $n > n_0 \geqslant c'_\psi + c''_\psi$ найдется такое максимальное t, что $c'_\psi \cdot t + c''_\psi \leqslant n$. Действительно, этим требованиям удовлетворяет $t = \left[\dfrac{n - c''_\psi}{c'_\psi}\right]$. Для него имеем: длина вывода формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$ в S^1 не превышает n.

Нетрудно убедиться в том, что формула $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$ выводима также и в системе S^0. Действительно, $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar{t}}$ есть

---

* Длина переменной X_3 равна 6.

$$\forall X_2 \urcorner \exists X_4 ((\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \urcorner (\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, X_5) = 0))) \& \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, X_4)).$$

Эта формула эквивалентна формуле

$$\forall X_4 \forall X_2 (\urcorner (\overline{\tau_\psi}(\bar{t}, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \urcorner (\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, X_5) = 0)) \vee \urcorner \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, X_4)).$$

Так как для t существует единственное z_1 такое, что выполняется условие

$$\tau_\psi (t, z_1) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < z_1 \supset \urcorner (\tau_\psi(t, x_5) = 0)),$$

то в S^0 формально доказуема формула

$$\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, \bar{z}_1) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < \bar{z}_1 \supset \urcorner (\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, X_5) = 0)),$$

и для каждого $x_4 \neq z_1$ доказуема формула

$$\urcorner (\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, \bar{x}_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < \bar{x}_4 \supset \urcorner (\overline{\tau_\psi} (\bar{t}, X_5) = 0)));$$

эту формулу будем в дальнейшем обозначать через B.

Для каждого x_4 доказуемо в S^0 $\bar{x}_4 = \bar{z}_1 \vee \urcorner (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$.

Взяв в качестве посылки $\urcorner (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$, можно доказать B, затем доказать дизъюнкцию

$$B \vee \urcorner \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, \bar{x}_4)$$

и ввести квантор общности по X_2.

Для $x_4 = z_1$ можно выписать все выводы длины, не превышающей z_1. Пусть их гёделевы чомера суть $g_1, g_2, \cdots, g_p$. Максимальное из этих чисел обозначим через g. Можно доказать для каждого x_2, что если x_2 является гёделевым номером вывода длины, не превышающей z_1, то $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$.

Для каждого x_2 в S^0 доказуемо $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g} \vee \bar{x}_2 > \bar{g}$. Возьмем в качестве посылок $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$. Из этих посылок можно вывести противоречие (как при доказательстве леммы 1), и следовательно, вывести любую формулу, в частности

$$B \vee \urcorner \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_4).$$

Если же взять в качестве посылок $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\bar{x}_2 > \bar{g}$, то можно формально доказать $\urcorner \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_1)$, и введя дизъюнкцию, доказать $B \vee \urcorner \overline{T} (\bar{\rho} (\overline{c_{\neg\psi}}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_4)$. В силу доказуемости $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g} \vee \bar{x}_2 > \bar{g}$ можно удалить посылки $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$ и $\bar{x}_2 > \bar{g}$, ввести квантор общности по X_2: и далее, в силу доказуемости $\bar{x}_4 = \bar{z}_1 \vee \urcorner (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$, удалить посылки $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\urcorner (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$ и ввести квантор общности по X_4. Итак, формула $[F_{\neg\psi}]_{\bar{t}}^{X_1}$ выводима в S^0.

Теперь, в силу непротиворечивости S^0 и утверждения леммы 1, длина вывода этой формулы в S^0 превышает по величине то минимальное z, для которого имеет место

$$\tau_\psi(t, z) = 0,$$

т. е. длина вывода превышает $\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c_\psi^{*}}{c'_\psi}\right]\right)$.

Итак, для нашего фиксированного n построена формула (именно $[F_{\tau_\psi}]^{x_1}_{\bar{t}}$) такая, что длина ее вывода в S^1 не превышает n, а в S^0 больше, чем $\bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c_\psi^{*}}{c'_\psi}\right]\right)$, следовательно, по определению псевдофункции Шеннона $Ш^{10}$, имеем

$$Ш^{10}(n) > \bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c_\psi^{*}}{c'_\psi}\right]\right),$$

и в силу (***)

$$Ш^{10}(n) > \psi\left(\left[\frac{n - c_\psi^{*}}{c'_\psi}\right]\right).$$

Но поскольку $n > n_0$, то в силу утверждения леммы 3 имеем

$$\psi\left(\left[\frac{n - c_\psi^{*}}{c'_\psi}\right]\right) > \varphi(n),$$

а значит

$$Ш^{10}(n) > \varphi(n).$$

Теорема доказана.

Замечание. Н. В. Петри любезно указал автору на работу [12], в которой сравниваются по длине выводов две системы, одна из которых получается из другой добавлением такой аксиомы, объединение отрицания которой с первоначальной системой даёт неразрешимую теорию. Показывается, что функция Шеннона, аналогичная рассматриваемой в настоящей работе, не мажорируется никакой обще-рекурсивной функцией.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность И. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор благодарен также Г. Б. Маранджяну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8.X.1973

Ա. Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ. Ֆորմալ թվաբանության ընդլայնումներում բանաձևերի արտածման երկարության մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում համեմատվում են ըստ բանաձևերի արտածումների երկարության երկու ֆորմալ համակարգեր, որոնցից մեկում ապացուցվում է մյուսի անհակասելիությունը։ Բանաձևի

արտածման նվազագույն երկարությունը ընդլայնված և սկզբնական համակարգերում համեմատելու համար սահմանվում է Շեննոնի պսևդոֆունկցիա (համեմատումը կատարվում է միայն այն բանաձևերի համար, որոնք երկու համակարգերում էլ արտածելի են)։ Ապացուցվում է, որ Շեննոնի նշված պսևդոֆունկցիան բոլոր բավականաչափ մեծ բնական թվերի համար գերազանցում է կամայական նախօրոք տրված ընդհանուր-ռեկուրսիվ ֆունկցիային։

A. A. CHOUBARIAN. *On the length of formal deductions in the extensions of formal arithmetic* (summary)

In this paper two systems S^0 and S^1 are considered as extensions of formal arithmetic, S^0 being a subsystems of S^1 and the consistency of S^0 is provable in S^1.

The Shannons pseudo-function is defined in order to compare the minimal lengths of formal deductions of the same formulas in S^0 and S^1. It is proved (the main result of the paper) that this pseudo-function is greater than every general recursive function starting with some natural number.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Gödel*. Über die Länge von Beweisen, Ergebnisse eines math. Koll. Heft 7, 1936, 23—24.
2. *G. Krejsel, Hao Wang*. Some applikations of formalised consistency proofs, Fund. math., 42, № 1, 1955.
3. *A. Mostowski*. Senteces undecidable in formalised arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel, North-Holland, Amsterdam, 1952, 112—115.
4. *M. A. Arbib*. Speed-up theorems and incompleteness theorems, „Automata theory". N. J.-L., Acad. Press., 1966, 6—24.
5. *S. C. Kleene*. Introduction to metamathematics, 1952. (Русский перевод: С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИИЛ, 1957).
6. *E. Mendelson*. Introduction to Mathematical Logic. (Русский перевод: Э. Мендельсон, Введение в математическую логику. Изд. „Наука", 1971).
7. *Th. Skolem*. Remarks on recursive functions and relations.
8. *M. O. Rabin*. Speed of computation of functions and classification of recursive sets, Bull. Rec. Counc. of Israel, 8F, 1959, 69—70.
9. *Н. А. Шанин*. О конструктивном понимании математических суждений, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, LII, 1968, 226—311.
10. *И. Д. Заславский*. О псевдофункциях Шеннона, Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 65—76.
11. *М. Г. Гельфонд*. О конструктивных псевдофункциях, Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 20—28.
12. *A. Ehrenfeucht, J. Mycielski*. Abbreviating proofs by adding new axioms, BAMS, № 3, V. 77, 1971, 366—367.