ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

Г. У. МАТЕВОСЯН

ОБ ОДНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ И О НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В настоящей работе обсуждается задача об исследовании *однозначных* мероморфных функций в многосвязных областях в духе теории, созданной Р. Неванлинной [1, 2] в случае плоскости и круга.

Этому вопросу посвящена довольно обширная литература. Отметим прежде всего монографию Л. Сарио и К. Носиро [3], содержащую обзор работ, посвященных распространению теории Неванлинны на случай римановых поверхностей. Однако характеристики мероморфных функций, которые введены в [3], в случае многосвязных областей должным образом не выявляют, на наш взгляд, намеченный еще со времен „большой теоремы Пикара“ принцип „отделения особенностей“. Кроме того, можно ожидать, что общие результаты этой книги, установленные в основном для локально мероморфных функций, в различных конкретных случаях областей должны быть уточнены. Так, например, из сформулированных в [3] результатов не следует, что однозначная мероморфная в круговом кольце функция ограниченного вида представима в виде отношения двух ограниченных и однозначных аналитических функций.

В случае кругового кольца другим путем пошли В. А. Зморович, С. А. Касьянюк и М. Е. Дундученко [4—7]. Применяя введенное в статье [8] А. Вилья ядро и выбирая в качестве образца случай круга, были построены аналоги формулы Шварца, Пуассона-Иенсена, произведений Бляшке и т. д., которые должны были служить аппаратом для исследования мероморфных функций в случае кругового кольца. Однако эти аналоги имеют довольно громоздкий вид и их систематическое использование наталкивается на значительные технические трудности.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к исследованию вопросов теории мероморфных функций в многосвязных областях, позволяющий свести это исследование к уже досконально изученному случаю плоскости или круга. Этот подход основывается на одном простом факте, в котором отчетливо проявляется вышеупомянутый принцип „отделения особенностей“. Именно, заметив, что любую n-связную область D можно представить в виде пересечения *n односвязных* областей D_j, мы доказываем, что любая мероморфная в области D функция допускает представление в виде *произведения* n функций f_j, где f_j голоморфна в D_j.

Формулировка и доказательство этого результата содержится в параграфе 1 статьи (теорема 1.2).

В параграфе 2 показывается, как с помощью этой факторизационной теоремы можно в случае кругового кольца получить ряд таких результатов, как первая и вторая основные теоремы, описание и новое параметрическое представление функций ограниченного вида, теорему единственности типа теоремы Карлемана и т. д. Конечно, в приложениях можно было рассматривать и более общие области, скажем, n-связные круговые области. Но мы нарочно ограничились случаем наиболее простой неодносвязной области, чтобы по возможности ясно показать *сведение* задачи к односвязному случаю.

§ 1. O-разложение мероморфных функций

Обозначения. Пусть C — конечная комплексная плоскость, а $\overline{C}$ — расширенная комплексная плоскость. Для области $\Omega \subset \overline{C}$ через $M(\Omega)$ обозначим множество всех мероморфных в Ω функций. Если $f \in M(\Omega)$ и $a \in \overline{C}$, то обозначим

$$Z_f(a) = \{a \in \Omega: f = a\}.$$

Определения: 1. Пусть $\Omega \subset \overline{C}$ — конечносвязная область и E_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ — компоненты связности компакта $\overline{C} \setminus \Omega$. Тогда область $\Omega_j = \overline{C} \setminus E_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$; назовем компонентой односвязного разложения (O-разложения), а представление $\Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_j$ — O-разложением области Ω.

2. Если для функции $f \in M(\Omega)$ существуют функции $f_j \in M(\Omega_j)$ такие, что

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z), \tag{1.1}$$

то мы скажем, что функция f допускает O-разложение, а представление (1.1) назовем O-разложением функции f. При этом функции f_j называются компонентами O-разложения функции f.

Теорема 1.1. (единственности O-разложения). *Если мероморфная в n-связной области Ω функция f допускает O-разложения*

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z),$$
$$f(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z) \cdots \varphi_n(z), \quad z \in \Omega,$$

где f_j, $\varphi_j \in M(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, то существуют рациональные функции R_j такие, что

$$\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} = R_j(z), \quad z \in \Omega_j.$$

В самом деле, имеем, что $\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} \in M(\Omega_j)$. С другой стороны, представление

$$\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\varphi_k(z)}{f_k(z)}, \; z \in \Omega$$

показывает, что функцию $\frac{f_j}{\varphi_j}$ можно считать мероморфной в области

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \Omega_k \supset \overline{C} \setminus \Omega_j.$$

Таким образом, функция $\frac{f_j}{\varphi_j}$ мероморфна в $\overline{C}$ и, следовательно, рациональна.

Следующая центральная в настоящем параграфе теорема утверждает, что любая мероморфная в конечносвязной области функция допускает O-разложение, подчиненное еще некоторым дополнительным условиям. Для простоты ограничимся случаем конечных областей.

Теорема 1.2. (существования O-разложения). *Пусть $\Omega \subset C$ — конечносвязная область, $\Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_j$ — O-разложение области Ω. Для произвольной функции $f \in M(\Omega)$ существуют функции $f_j \in M(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, такие, что*

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z), \; z \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$Z_{f_j}(a) \subset Z_f(a) \cup \{\infty\} \quad \text{для} \quad a = 0, \infty \quad \text{и} \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2}$$

$$Z_{f_j}(a) \cap Z_{f_k}(a) \subset \{\infty\} \quad \text{при} \quad j \neq k; \; a = 0, \infty. \tag{1.3}$$

Доказательство. Так как $\infty \overline{\in} \Omega$, то мы можем считать, что $\infty \overline{\in} \Omega_n$ и $\infty \in \Omega_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Выберем n-связную область $D \subset C$, удовлетворяющую условиям:

а) Область D ограничена замкнутыми гладкими путями $(\gamma_j)_1^n$ попарно без общих точек, причем пути $(\gamma_j)_1^{n-1}$ лежат в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_n$ и система $(\gamma_j)_1^n$ определяет положительную ориентацию границы области D.

б) При $1 \leqslant j \leqslant n-1$ континуум $\overline{C} \setminus \Omega_j$ лежит в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_j$, а остальные континуумы $\overline{C} \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n$ — в неограниченной компоненте. В случае $j = n$, наоборот, континуум $\overline{C} \setminus \Omega_n$ лежит в неограниченной, а континуумы $\overline{C} \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ — в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_n$.

в) Функция f не имеет нулей и полюсов в D (случай $f = \text{const}$ не интересен):

$$Z_f(a) \cap \overline{D} = \varnothing, \; a = 0, \infty.$$

Определим теперь односвязные области $(D_j)_1^n$ следующим образом: при $1 \leqslant j \leqslant n-1$ область D_j — это неограниченная компонента связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_j$, а при $j=n$ — ограниченная. Очевидно, D_j — это компоненты O-разложения области D: $D = \bigcap_{j=1}^{n} D_j$. Кроме того, из свойств а), б) следует, что $D_j \subset \Omega_j$ при $j=1, 2, \cdots, n$ (следовательно $D \subset \Omega$) и что множества $(\Omega_j \setminus D_j)_1^n$ попарно не пересекаются. Определим теперь некоторые мероморфные в областях Ω_j функции ψ_j.

По формуле Коши, учитывая условие в), имеем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z) \quad \text{для} \quad z \in D, \tag{1.4}$$

где

$$\psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{при} \quad z \in D_j. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) определяет ψ_j пока в области D_j, как аналитическую там функцию. Однако из этого факта следует, что функция

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \psi_k(z)$$

голоморфна в области

$$\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} D_k \supset \overline{C} \setminus D_j.$$

Далее, из формулы (1.4) имеем соотношение

$$\psi_j(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \psi_k(z), \ z \in D, \tag{1.6}$$

которое показывает, что функция ψ_j допускает продолжение из D_j по крайней мере в область Ω_j как мероморфная функция.

Итак, мы можем считать, что $\psi_j \in M(\Omega_j)$ и что ψ_j имеет полюса в тех и только в тех точках области $\Omega_j \setminus D_j$, где функция f имеет нуль или полюс. Главная часть функции ψ_j в этих точках совпадает с главной частью функции $\frac{f'}{f}$. Теперь мы хотим построить функции $f_j \in M(\Omega_j)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = \psi_j(z) \quad \text{при} \quad z \in \Omega_j, \ j=1, 2, \cdots, n. \tag{1.7}$$

С этой целью возьмем точку $z_0 \in D$ и рассмотрим совокупность целых чисел (представляющих собой индекс точки $z=0$ относительно пути $f \circ \gamma_j$):

$$m_j(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta,\ j=1,2,\cdots,n.$$

Пусть сначала $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Выберем конечные точки $\zeta_j \in \overline{C} \setminus \Omega_j$. В силу формулы (1.5) функция

$$\psi_j(z) - \frac{m_j(\infty)}{z-\zeta_j}$$

голоморфна в замкнутой области D_j и в бесконечности имеет нуль по крайней мере второго порядка. Для этой функции справедлива теорема Коши, поэтому она имеет однозначную первообразную

$$\varphi_j(z) = \int\limits_{z_0}^{z}\left[\psi_j(\zeta) - \frac{m_j(\infty)}{\zeta-\zeta_j}\right]d\zeta,$$

аналитическую в D_j, включая точку $z=\infty$. В случае $j=n$ область D_n ограничена и функция ψ_n имеет в $\overline{D_n}$ однозначную первообразную $\varphi_n(z)$, $\varphi_n(z_0)=0$.

Положим для $z \in \overline{D}_j$

$$f_j(z) = \begin{cases} (z-\zeta_j)^{m_j(\infty)} \exp\{\varphi_j(z)\} & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ \exp\{\varphi_n(z)\} & \text{при } \quad j=n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Фактически эта формула определяет $f_j(z)$ не только в $\overline{D}_j$, но и в некоторой достаточно малой окрестности G_j множества D_j. Из (1.8) видно, что функция f_j не имеет нулей или полюсов в G_j, исключая, быть может, точку $z=\infty$ (в случае $1 \leqslant j \leqslant n-1$), где она имеет полюс при $m_j(\infty) > 0$ и нуль при $m_j(\infty) < 0$. Равенство (1.7) очевидным образом выполняется для $z \in G_j$. Определим функции f_j в остальных точках области Ω_j. Функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ голоморфна в области D и там, в силу формулы (1.6), выполняются равенства

$$\psi_j(z) - \frac{f'(z)}{f(z)} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \psi_k(z). \tag{1.9}$$

Однако выше мы заметили, что правая часть этого равенства представляет собой голоморфную в замкнутой области $\overline{C} \setminus D_j$ функцию. Таким образом, функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ допускает аналитическое продолжение из области D в односвязную область $\overline{C} \setminus D_j$. Выделим опять случай $1 \leqslant j \leqslant n-1$. В этом случае область $\overline{C} \setminus D_j$ не только односвязна, но и ограничена, поэтому функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ имеет там однозначную первообразную. Выберем конечные точки $z_j \in G_j \cap (\Omega_j \setminus D_j)$ и положим

$$F_j(z) = c_j f(z) \exp\left\{\int\limits_{z_j}^{z}\left[\psi_j(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right] d\zeta\right\},$$

для $z \in \Omega_j \setminus D_j \subset \overline{C} \setminus D_j$, где $c_j = \dfrac{f_j(z_j)}{f(z_j)}$.

Из определения функций F_j следует, что

$$\frac{F_j'(z)}{F_j(z)} = \psi_j(z) = \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} \quad \text{при} \quad z \in G_j \cap (\Omega_j \setminus \overline{D}_j),$$

откуда, в силу выбора c_j следует, что

$$\frac{F_j(z)}{f_j(z)} = \text{const} = \frac{F_j(z_j)}{f_j(z_j)} \quad \text{при} \ z \in G_j \cap (\Omega_j / \overline{D}_j).$$

Это означает, что функция F_j представляет собой „мероморфное" продолжение функции f_j из области D_j в область Ω_j. Отметим, что нули и полюса функции F_j совпадают с нулями и полюсами функции f, лежащими в области $\Omega_j \setminus D_j$.

Для завершения доказательства теоремы остается доопределить функцию f_n. С этой целью предварительно заметим, что в силу условия в) и по теореме Коши имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad \text{при} \quad z \in C \setminus \overline{D}.$$

Умножая обе части этого равенства на z и затем устремляя z к бесконечности, получим $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j(\infty) = 0$. Отсюда с учетом формул (1.5) и (1.9) имеем

$$\lim_{z \to \infty} z \left[\psi_n(z) - \frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -\lim_{z \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} z\psi_k(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(\infty) = -m_n(\infty).$$

Выберем некоторую точку $\zeta_n \in D_n$. Функция

$$\psi_n(z) - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{m_n(\infty)}{z - \zeta_n}$$

голоморфна в односвязной (но неограниченной) области $\overline{C} \setminus \overline{D}_n$ и в бесконечности имеет нуль по крайней мере второго порядка. Поэтому она имеет однозначную первообразную в $\overline{C} \setminus D_n$ и, следовательно, в $\Omega_n \setminus \overline{D}_n$. Возьмем точку $z_n \in G_n \cap (\Omega_n \setminus D_n)$ и положим

$$F_n(z) = c_n f(z)(z-\zeta_n)^{-m_n(\infty)} \exp\left\{\int_{z_0}^{z}\left[\psi_n(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} + \frac{m_n(\infty)}{\zeta-\zeta_n}\right]d\zeta\right\},$$

$$\text{для } z \in \Omega_n \setminus D_n, \quad \text{где } c_n = \frac{f_n(z_n)}{f(z_n)}(z_n-\zeta_n)^{m_n(\infty)}.$$

Как и выше, доказываем, что F_n представляет собой продолжение функции f_n из области D_n в область Ω_n, удовлетворяющее уравнению (1.7) при $j=n$.

Итак, мы построили функции $f_j \in M(\Omega_j)$, удовлетворяющие уравнениям (1.7), нули и полюса которых подчинены условиям (1.2). Выполнение условий (1.3) следует из того, что конечные нули и полюса функции f_j, лежащие в области $\Omega_j \setminus D_j$, по построению не пересекаются. Выполнение основного утверждения (1.1) тоже легко обеспечивается. В самом деле, положим

$$F(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z), \quad z \in \Omega.$$

В силу условий (1.7) и формулы (1.4) имеем

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{для} \quad z \in D,$$

откуда $\dfrac{F(z)}{f(z)} \equiv \mathrm{const}$ при $z \in D$ и, следовательно, всюду в Ω. Умножая, в случае необходимости, один из множителей f_j на подходящую константу, получим $F_j(z) \equiv f_j(z)$ при $z \in \Omega$. Теорема 1.2 доказана.

Отметим, что доказательство теоремы несколько усложнилось благодаря тому обстоятельству, что логарифм функции, аналитической и не имеющей нулей в некоторой многосвязной области, вообще говоря, *не является* однозначной функцией в этой области.

§ 2. Некоторые приложения теоремы 1.2 к исследованию распределения значений мероморфных в кольце функций

Теорема 1.2 параграфа 1 о факторизации мероморфных в конечносвязных областях функций в сопоставлении с известными фактами классической теории Р. Неванлинны дает возможность провести детальное исследование распределения значений этих функций. Ради простоты формулировок мы ограничимся случаем кругового кольца.

Пусть $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. *Рассмотрим кольцо*

$$S = S(R_1, R_2) = \{z \in C\colon R_1 < |z| < R_2\},$$

и пусть f — *мероморфная в* S *функция* — $f \in M(S)$. *Возьмем произвольные числа* $r \in (R_1, R_2)$ *и* $a \in C$. *Положим*

$$m(r, a, f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\dfrac{1}{f(re^{i\theta}) - a}\right| d\theta \text{ при } a \in C, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \text{ при } a = \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Фиксируя некоторое число $r_0 \in (R_1, R_2)$, положим также

$$N(r, a, f) = \left|\int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a, f)}{t}\, dt\right| = \int_{[r_0, r]} \frac{n(t, a, f)}{t}\, dt, \tag{2.2}$$

где $n(t, a, f)$ — число корней уравнения $f(z) = a$ (число полюсов при $a = \infty$) с учетом кратности, лежащих в замыкании кольца $S(r_0, t)$, если $r_0 \leqslant t$, и в „полузамкнутом" кольце $\{z \in C\colon t \leqslant z < r_0\}$, если $t < r_0$.

Величину

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f) \tag{2.3}$$

назовем характеристикой мероморфной функции f.

Отметим, что при таком определении характеристика $T(r, f)$ зависит также от выбора числа r_0 и определяется с точностью до аддитивного члена порядка $O(\log r)$. Однако из дальнейшего будет видно, что выбор числа r_0 не существенен и окончательные результаты не зависят от r_0.

Теперь установим связь между характеристикой функции f и характеристиками компонентов O-разложений этой функции. В дальнейшем мы постоянно будем употреблять следующие

Обозначения. Для произвольного числа $R > 0$ положим

$$D_R = \{z \in C\colon |z| < R\},\quad V_R = \{z \in \overline{C}\colon |z| > R\},$$
$$\gamma_R = \{z \in C\colon |z| = R\}.$$

Будем также считать, что γ_R ориентирована против часовой стрелки.

Напомним, что для функций φ, мероморфных в D_R (V_R) величины $m(r, a, \varphi)$ и $T(r, \varphi)$ определяются как выше, с помощью формул (2.1) и (2.3). Функция же $N(r, a, \varphi)$ определяется следующим образом: если $\varphi \in M(D_R)$, то

$$N(r, a, \varphi) = \int_0^r \frac{n(t, a, \varphi) - n(0, a, \varphi)}{t}\, dt + n(0, a, \varphi)\log r,\ 0 < r < R,$$

где $n(t, a, \varphi)$ — число a-точек функции φ в замкнутом круге $\overline{D}_t$ с учетом кратности, если же $\varphi \in M(V_R)$, то

$$N(r, a, \varphi) = \int_r^{\infty} \frac{n(t, a, \varphi) - n(\infty, a, \varphi)}{t}\, dt + n(\infty, a, \varphi)\log r,\ R < r < \infty,$$

где $n(t, a, \varphi)$ — число a-точек функции φ с учетом кратности в бесконечной замкнутой области $\overline{V}_t$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть* $f \in M(S(R_1, R_2))$ *и* $f = f_1 f_2$ — 0*-разложение функции* f; $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. *Тогда*

$$T(r, f) = \begin{cases} T(r, f_1) + O(|\log r|) & \text{при} \quad r \to R_1, \\ T(r, f_2) + O(|\log r|) & \text{при} \quad r \to R_2. \end{cases}$$

Существование O-разложения было доказано в теореме 1.2 параграфа 1. Доказательство леммы непосредственно следует из определений рассматриваемых характеристик.

Заметим, что величина $O(|\log r|)$ ограничена при $r \to R_1$, если $R_1 > 0$, и при $r \to R_2$, если $R_2 < \infty$. Лемма не только устанавливает связь между характеристиками функций f, f_1 и f_2, но и показывает, что характеристика $T(r, f)$ при $r \to R_1$ или $r \to R_2$ отличается от монотонной функции на величину $O(|\log r|)$. В этом направлении можно получить более точные соотношения типа известного тождества А. Картана [2]. *А именно, для произвольной функции* $f \in M(S(R_1, R_2))$ *имеет место тождество* $(r \in (R_1, R_2))$:

$$T(r, f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + c_f \log \frac{r}{r_0} + m(r_0, \infty, f), \tag{2.4}$$

где c_f *— определенная вещественная постоянная.*

Для доказательства формулы (2.4) нам нужны некоторые обозначения. Возьмем произвольное $\theta \in [0, 2\pi]$ и обозначим через E_θ не более чем счетное подмножество интервала (R_1, R_2), состоящее из модулей полюсов или $e^{i\theta}$-точек функции f. Кроме того, выберем число $\delta_\theta \in (0, R_1 - r_0)$ так, чтобы в кольце $S(r_0 - \delta_\theta, r_0)$ функция f не имела полюсов или $e^{i\theta}$-точек, т. е. $E_\theta \cap (r_0 - \delta_\theta, r_0) = \varnothing$.

Докажем формулу (2.4) сначала для $r \in (r_0, R_2)$, отметив, что при $r = r_0$ она очевидна. Для любого $t \in (r_0, R_2) \setminus E_\theta$ по теореме о логарифмическом вычете (для области $S(r_0 - \delta, t)$) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_t} \frac{d}{d\zeta} \log (f(\zeta) - e^{i\theta})\, d\zeta = n(r, e^{i\theta}, f) - n(r, \infty, f) + k(\theta), \tag{2.5}$$

где $k(\theta)$ — целое число, определяемое формулой

$$k(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0 - \delta}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - e^{i\theta}}\, d\zeta. \tag{2.6}$$

Здесь $0 < \delta < \delta_\theta$, так что $k(\theta)$ не зависит от δ. Интеграл в левой части формулы (2.5) можно заменить через

$$\frac{t}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}\log\left[f(te^{i\varphi})-e^{i\theta}\right]d\varphi.$$

Отсюда, выделяя вещественную часть интеграла, разделив обе части формулы (2.5) на t и интегрируя по t в пределах от r_0 до r, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|\,d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r_0e^{i\varphi})-e^{i\theta}|\,d\varphi=$$

$$=N(r,e^{i\theta},f)-N(r,\infty,f)+k(\theta)\log\frac{r}{r_0}. \tag{2.7}$$

Заметим теперь, что $k(\theta)$ интегрируема на $[0,2\pi]$, так как все остальные члены в (2.7) интегрируемы по θ. Интегрируя формулу (2.7) по θ, учитывая хорошо известное равенство [2]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w-e^{i\theta}|\,d\theta=\log^+|w|,$$

и полагая

$$c_f=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(\theta)\,d\theta,$$

получим требуемое тождество (2.4). Случай $r\in(R_1, r_0)$ рассматривается вполне аналогично, нужно лишь число δ, фигурирующее в определении целого числа $k(\theta)$, подчинить условию $0<\delta<\min[r_0-t, \delta_\theta]$ и теорему о логарифмическом вычете применить к области $S(t, r_0-\delta)$.

Тождество (2.4) принимает очень простой вид, если выполняется условие

$$|f(\zeta)|<1 \text{ при } \zeta\in\gamma_{r_0}. \tag{2.8}$$

В этом случае $m(r_0, \infty, f)=0$. Кроме того, для $k(\theta)$ справедлива формула (2.6) с $\delta=0$, так что интегрируя (2.6) по θ, получаем, что $c_f=0$.

Тождество (2.4) при условии (2.8) принимает вид

$$T(r,f)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta},f)\,d\theta. \tag{2.9}$$

Если вместо (2.8) функция f удовлетворяет условию

$$1<|f(\zeta)|<\infty \text{ при } \zeta\in\gamma_{r_0},$$

то постоянная c_f является целым числом и для нее можно указать явную формулу.

В самом деле, тогда для $k(\theta)$ опять справедлива формула (2.6) с $\delta=0$, откуда интегрированием по θ находим

$$c_f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_0}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta.$$

В общем же случае трудно указать явную формулу для c_f, использующую значения функции f только на окружности γ_{r_0}. Сделаем несколько замечаний по поводу полученного тождества (2.4).

Во-первых, (2.4) можно переписать в виде

$$T(r,f) = \left| \int\limits_{r_0}^{r} \frac{l(t)}{t}\, dt \right| + c_f \log \frac{r}{r_0} + m(r_0, \infty, f), \qquad (2.4')$$

где

$$l(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} n(t, e^{i\vartheta}, f)\, d\vartheta.$$

Первое слагаемое монотонно убывает на $(R_1, r_0]$, монотонно возрастает на $[r_0, R_2)$ (этими свойствами обладает и функция $l(t)$) и представляет собой логарифмически выпуклую функцию на (R_1, R_2)). Характеристика $T(r, f)$ с точностью до ограниченного слагаемого представляет собой такую же величину, если предположить, что функция f не имеет полюсов на γ_{r_0}. Это следует из (2.4′) и (2.9), хотя в (2.4′) слагаемое $c_f \log \frac{r}{r_0}$ при $R_1 = 0$ или $R_2 = \infty$ может оказаться неограниченным при $c_f \neq 0$. В самом деле, существует достаточно малая постоянная $k \in (0,1)$ такая, что функция kf удовлетворяет условию (2.8) и для нее выполняется (2.9). Тогда наше утверждение следует из неравенства

$$|T(r, f) - T(r, kf)| \leqslant \log \frac{1}{k}, \quad r \in (R_1, R_2).$$

Отметим также, что формула (2.4′) позволяет дать геометрическую интерпретацию характеристики $T(r, f)$ аналогично случаю круга. При более тщательном анализе тождества (2.4′) можно установить, что характеристика $T(r, f)$ имеет, вообще говоря, более правильное поведение, чем это мы только что получили, даже если функция f имеет полюса на γ_{r_0}. Нетрудно доказать, например, что если $T(r, f)$ не ограничена на $[r_0, R_2]$ при $R_2 < \infty$, или если бесконечность не является устранимой особой точкой или полюсом для f, то тогда $T(r, f)$ строго монотонно возрастает в некоторой окрестности точка R_2. Аналогичное утверждение верно и для точки R_1.

Теперь сформулируем и докажем две основные теоремы теории мероморфных функций в случае кругового кольца.

Теорема 2.1. (Первая основная теорема для кольца). *Пусть* $f \in M(S(R_1, R_2))$, $f \neq \text{const}$ *и* $a \in C$. *Тогда* $T(r, f) = m(r, a, f) + N(r, a, f) + O(|\log r|)$ *при* $r \to R_1$ *и* $r \to R_2$.

Доказательство. Так как

$$m(r, \infty, f) = m(r, \infty, f-a) + \psi(r),$$

где $\psi(r)$ — ограниченная величина при $R_1 < r < R_2$, то имеем также

$$T(r, f) = T(r, f-a) + \psi(r).$$

Отсюда ясно, что достаточно доказать теорему при $a = 0$. В силу теоремы 1.2 параграфа 1, функция f допускает O-разложение (1.1) с компонентами $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. Очевидно, что функции $\frac{1}{f_1} \in M(V_{R_1})$ и $\frac{1}{f_2} \in M(D_{R_2})$ будут компонентами O-разложения функции $\frac{1}{f} \in M(S(R_1, R_2))$. В силу сформулированной выше леммы имеем

$$T(r, f) = T(r, f_1) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1,$$

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1.$$

Согласно первой основной теореме Неванлинны

$$T(r, f_1) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \text{огр. величина}.$$

Из этих трех равенств получаем

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + O(|\log r|) =$$

$$= m(r, 0, f) + N(r, 0, f) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1.$$

В случае $r \to R_2$ рассуждаем аналогичным образом. Теорема 2.1 доказана.

Для произвольного $\lambda \geqslant 1$ определим на (R_1, R_2) функцию μ_λ формулой

$$\mu_\lambda(r) = \begin{cases} |R_1 - r|^{-\lambda} & \text{при } R_1 < r \leqslant r_0 \\ |R_2 - r|^{-\lambda} & \text{при } r_0 < r < R_2 \text{ и } R_2 < \infty \\ r^\lambda & \text{при } r_0 < r < \infty \text{ и } R_2 = \infty \end{cases} \qquad (2.10)$$

и положим $\mu_1(r) = \mu(r)$.

Теорема 2.2. (Вторая основная теорема для кольца). *Если $f \in M(S(R_1, R_2))$ и $a_1, a_2, \cdots, a_q$ — различные точки из $\overline{C}$, то*

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu, f) < 2T(r, f) - N_1(r, f) + Q(r, f), \qquad (2.11)$$

где

$$N_1(r, f) = N(r, 0, f) + 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f'),$$

величина $Q(r, f)$ для любого $\lambda \geqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$Q(r, f) \leqslant \text{const} \log [\mu(r)\ T(r, f)] \ \text{\textit{при}} \ r \in (R_1, R_2) \setminus E_\lambda,$$

где E_λ *— некоторое множество, для которого*

$$\int_{E_\lambda} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2.2, отметим что аналогично случаю круга, величина $N_1(r, f)$ измеряет число кратных точек функции f. Точнее, $N_1(r, f)$ представляется в виде

$$N_1(r, f) = \int_{[r_0, r]} \frac{n_1(t, f)}{t}\, dt,$$

где $n_1(t, f)$ указывает число кратных точек функции f, лежащих в замкнутом кольце $\overline{S(r_0, t)}$ при $r_0 \leqslant t$ и в $\overline{S(t, r_0)}$ при $t < r_0$, причем каждая k-кратная точка считается $k-1$ раз.

Приступая к доказательству теоремы, будем считать без ограничения общности, что числа $a_1, a_2, \cdots, a_{q-1}$ конечны и $a_q = \infty$.

Аналогично случаю круга, повторяя рассуждения Р. Неванлинны [2] и применяя сформулированную выше первую основную теорему, получим неравенство (2.11) со следующей предварительной оценкой величины $Q(r, f)$:

$$Q(r, f) \leqslant m\left(r, \infty, \frac{f'}{f}\right) + \sum_{\nu=1}^{q-1} m\left(r, \infty, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(|\log r|)$$

для всех $r \in (R_1, R_2)$.

Очевидно, теорема будет доказана, если мы покажем, что для любого $a \in C$ выполняется оценка

$$m\left(r, \infty, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant \text{const} \log [\mu(r)\ T(r, f)] \ \text{при} \ r \in [R_1, R_2] \setminus E_\lambda(a),$$

где $E_\lambda(a)$ — некоторое множество, для которого

$$\int_{E_\lambda(a)} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Как и при доказательстве первой основной теоремы, можно ограничиться случаем $a=0$, так как

$$T(r, f-a) = T(r, f) + \text{огр. величина}.$$

Пусть $f = f_1 f_2$ — 0-разложение (1.1) функции f, где $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. Тогда

$$m\left(r, \infty, \frac{f'}{f}\right) = m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}\right) \leqslant$$

$$< m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right) + m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right) + \log 2.$$

Пусть сначала $r \in (r_0, R_2)$. Тогда величина $m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right)$ ограничена, величина $m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right)$ оценивается по теореме Р. Неванлинны [2] о логарифмической производной:

$$m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right) = O\left(\log\left[\mu(r)\, T(r, f_2)\right]\right), \quad r \in (r_0, R_2) \setminus E_\lambda',$$

где множество E_λ' такое, что

$$\int_{E_\lambda'} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Аналогично, при $r \in (R_1, r_0]$ величина $m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f_1}\right)$ имеет оценку

$$m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right) = O\left(\log\left[\mu(r)\, T(r, f_1)\right]\right) \text{ при } r \in [R_1, r_0) \setminus E_\lambda'',$$

причем

$$\int_{E_\lambda''} \mu(r)\, dr < \infty.$$

Теперь наше утверждение непосредственно следует из приведенных трех оценок и сформулированной выше леммы, если обозначить $E_\lambda(0) = E_\lambda' \cup E_\lambda''$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Учитывая первую основную теорему, неравенство (2.11) второй основной теоремы можно записать в другом виде:

$$(q-2)\, T(r, f) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu, f) - N_1(r) + Q(r, f). \tag{2.12}$$

Определение. Пусть положительная функция $\sigma(r)$ определена в промежутке (R_1, R_2) и в некоторой окрестности точки R_2 отличается от монотонно возрастающей функции на ограниченную величину. Тогда верхний предел

$$\overline{\lim_{r \to R_2}} \frac{\log \sigma(r)}{\log \mu(r)} = \lambda_{\text{п}}$$

называется правым порядком функции σ. Напомним, что μ—введенная в (2.10) функция. Понятие левого порядка $\lambda_{\text{л}}$ функции σ определяется вполне аналогично:

$$\overline{\lim_{r\to R_1}} \frac{\log \sigma(r)}{\log \mu(r)} = \lambda_л.$$

Условимся считать мероморфную в кольце S функцию f того же левого (правого) порядка, что и ее характеристика $T(r, f)$. Левый порядок функции f обозначим через $\lambda_л(f)$, а правый порядок — через $\lambda_п(f)$.

В качестве дополнения второй основной теоремы можно утверждать, что остаточный член $Q(r, f)$ в неравенстве (2.11) (или (2.12)) имеет оценку

$$Q(r, f) = O(\log \mu(r)) \tag{2.13}$$

всюду на $[r_0, R_2)$, если только функция f имеет конечный правый порядок, положительный при $R_2 < \infty$.

Это утверждение (как и аналогичное утверждение для интервала (R_1, r_0) в терминах левого порядка) доказывается как в случае круга и плоскости [2] с использованием первой и второй основных теорем *Для кольца выполняется также аналог теоремы Пикара—Бореля.* Для мероморфной в кольце функции f величина $N(r, a, f)$ имеет более низкий, чем f правый (левый) порядок, самое большее для *двух* значений $a \in \overline{C}$, если только f имеет положительный и конечный правый (левый) порядок. Доказательство легко следует из (2.12) и (213).

Определение. Для функции $f \in M(S(R_1, R_2))$ величины

$$\delta_л(a, f) = \underline{\lim}_{r\to R_1,\, r>R_1} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\delta_п(a, f) = \underline{\lim}_{r\to R_2,\, r<R_2} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}$$

назовем соответственно правым и левым дефектом функции в точке a.

В качестве следствия из второй основной теоремы имеем утверждение. *Пусть* $f \in M(S(R_1, R_2))$ *и*

$$\lim_{r\to R_j} \frac{T(r, f)}{\log \mu(r)} = \infty \; (j=1, 2).$$

Тогда $\delta_л$ *и* $\delta_п$ *равны нулю для каждого значения* $a \in \overline{C}$, *исключая, самое большее, счетное множество значений* a, *сумма дефектов которых не превышает* 2:

$$\sum_{a\in\overline{C}} \delta_л(a) \leqslant 2, \sum_{a\in\overline{C}} \delta_п(a) \leqslant 2.$$

Легко видеть, что полученный результат нельзя улучшить в классе всех функций $M(S(0, \infty))$. В качестве примера возьмем функцию $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Тогда

$$m(r, \infty, f) = \frac{1}{\pi}\left(r + \frac{1}{r}\right),\quad N(r, a, f) = 0 \text{ при } a = 0, \infty,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) = \frac{1}{\pi}\left(r + \frac{1}{r}\right).$$

Следовательно

$$\delta_л(a) = \delta_п(a) = 1 \quad \text{при } a \neq 0, \infty$$

и

$$\delta_л(0) + \delta_л(\infty) = \delta_п(0) + \delta_п(\infty) = 2.$$

Определение. Мы скажем, что функция $f \in M(S(R_1, R_2))$ имеет ограниченный вид, если $\sup\limits_{R_1<r<R_2} T(r, f) < \infty$. Класс функций ограниченного вида в кольце $S(R_1, R_2)$ обозначим через $N(S) = N(S(R_1, R_2))$.

При исследовании функций ограниченного вида достаточно ограничиться случаем, когда $0 < R_1 < R_2 < \infty$, так как при $R_1 = 0$ ($R_2 = \infty$) точка 0 (соответственно ∞) будет устранимой особой точкой или полюсом, так что вопрос сводится к уже изученному случаю односвязной области—к случаю круга или дополнения круга.

В самом деле, если, скажем, $R_1 = 0$ и $f \in N(S(0, R_2))$, то тогда из первой основной теоремы для любого $a \in C$ имеем:

$$N(r, a, f) = O(\log r) \text{ при } r \to 0,$$

откуда следует, что в окрестности нуля функция f имеет лишь конечное число a-точек, что возможно лишь тогда, когда нуль является устранимой особой точкой или полюсом.

Теорема 2.3. *Пусть* $0 < R_1 < R_2 < \infty$ *и* $f \in M(S(R_1, R_2))$. *Следующие условия эквивалентны*:

1. $f \in N(S(R_1, R_2))$;

2. *Имеет место представление*

$$f(z) = \varphi_1\left(\frac{R_1}{z}\right)\varphi_2\left(\frac{z}{R_2}\right) \text{ для } z \in S(R_1, R_2),$$

где φ_1 *и* φ_2 *— функции ограниченного вида в единичном круге*;

3. *Функция* f *допускает представление*

$$f = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 *и* F_2 *— ограниченные аналитические функции в* $S(R_1, R_2)$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1 следует условие 2. Пусть f_1 и f_2 — компоненты O-разложения функции f, так что

$$f(z) = f_1(z) f_2(z),\quad z \in S(R_1, R_2), \tag{2.14}$$

где $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$.

Так как $0 < R_1 < R_2 < \infty$, из сформулированной выше леммы следует, что $T(r, f)$ ограничена тогда и только тогда, когда одновременно ограничены характеристики $T(r, f_1)$ и $T(r, f_2)$. Это равносильно утверждению 2, если обозначить

$$\varphi_1(w) = f_1\left(\frac{R_2}{w}\right), \quad \varphi_2(w) = f_2(R_1 w) \quad \text{при} \quad |w| < 1. \qquad (2.15)$$

То что из условия 2 следует условие 3 является непосредственным следствием классической теоремы Р. Неванлинны [2] о том, что функция ограниченного вида в единичном круге (в данном случае функции φ_1 и φ_2) допускает представление в виде отношения двух ограниченных аналитических функций. Наконец, из условия 3 следует условие 1, так как в силу первой основной теоремы голоморфности и ограниченности функций F_1 и F_2 имеем

$$T(r, f) \leqslant T(r, F_1) + T\left(r, \frac{1}{F_1}\right) \leqslant T(r, F_1) + T(r, F_2) + O(1) =$$

$$= m(r, \infty, F_1) + m(r, \infty, F_2) + O(1) = O(1).$$

Теорема доказана.

Замечание. Из эквивалентности утверждений 1 и 2 вытекает, что функция ограниченного вида в кольце имеет радиальные (и даже угловые) предельные значения почти всюду на границе кольца (в смысле угловой лебеговской меры), так как этим свойством обладают функции ограниченного вида в круге.

Далее эквивалентность утверждений 1 и 2 дает нам возможность выписать некоторое параметрическое представление для функций ограниченного вида в кольце.

В самом деле, функции φ_1 и φ_2, как функции ограниченного вида в единичном круге, допускают [2] следующее параметрическое представление (при $|w| < 1$)

$$\varphi_1(w) = \left(\frac{R_1}{w}\right)^m e^{i\lambda_1} \frac{B_{11}(w)}{B_{12}(w)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\, d\mu_1(\theta)\right\}, \qquad (2.16)$$

$$\varphi_2(w) = e^{i\lambda_2} \frac{B_{21}(w)}{B_{22}(w)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\, d\mu_2(\theta)\right\}, \qquad (2.17)$$

где B_{kj} при $k, j = 1, 2$ — произведения Бляшке, μ_k — вещественные функции ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, λ_k — вещественные числа, а m — целое число. Число m появляется в силу утверждений (1.2) и (1.3) основной теоремы 1.2 параграфа 1, так как компонента f_1 O-разложения функции f может иметь нуль или полюс в бесконечности.

Таким образом, с учетом теоремы 2.3 и формул (2.16) и (2.17) имеет место следующая

Теорема 2.4. *Мероморфная в кольце $S(R_1, R_2)$ функция f, $f \not\equiv 0$ имеет ограниченный вид в том и только в том случае, если она допускает представление*

$$f(z)=z^m e^{i\lambda} \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ze^{i\theta}+R_1}{ze^{i\theta}-R_1}\, d\mu_1(\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R_2 e^{i\theta}+z}{R_2 e^{i\theta}-z}\, d\mu_2(\theta)\right\}, \tag{2.18}$$

где m — целое число, λ — вещественная постоянная, μ_1 и μ_2 — вещественные функции ограниченной вариации на $[0,2\pi]$,

$$\pi_k(z)=B_{k,1}\left(\frac{R_1}{z}\right) B_{k,2}\left(\frac{z}{R_2}\right) \text{ для } k=1, 2,$$

а B_{k1} и B_{k2} — произведения Бляшке. При этом можно считать, что все четыре произведения $B_{k1}\left(\frac{R_1}{z}\right)$ и $B_{k2}\left(\frac{z}{R_2}\right)$, $k=1, 2$ попарно не имеют общих нулей и их нули лежат в кольце $S(R_1, R_2)$.

Займемся теперь вопросом явного нахождения функций μ_1 и μ_2 через функцию f. С этой целью заметим сначала, что для фиксированной функции $f\in N(S(R_1, R_2))$ произведения π_1 и π_2 и число m (а следовательно и представление (2.18)) определяются не однозначным образом. Это связано с тем обстоятельством, что, скажем, любой корень функции можно по своему усмотрению включить или в произведение $B_{11}\left(\frac{R_1}{z}\right)$, или в $B_{12}\left(\frac{z}{R_2}\right)$.

Для достижения однозначности представления выберем некоторое число $r_0\in(R_1, R_2)$ и договоримся составить произведение $B_{11}\left(\frac{R_1}{z}\right)$ $\left(\text{соответственно } B_{21}\left(\frac{R_1}{z}\right)\right)$ для тех нулей (полюсов) функции f, которые лежат в кольце $S(R_1, r_0)$ (ср. с определением функции $n(t, a, f)$). Для дальнейшего будет также удобно выбрать r_0 так, чтобы функция f не имела нулей и полюсов на окружности $\gamma=\gamma_{r_0}$:

$$\gamma=\{z\in C\colon\ |z|=r_0\}.$$

Будем также считать, что γ ориентирована против часовой стрелки.

Теперь число m определяется однозначным образом, а функция $\mu_k(\theta)$, грубо говоря,—с точностью до линейной функции вида $c_k\theta+b_k$, где $c_1=-c_2$, причем число $c_1=-c_2$ можно выбрать произвольно.

Исходя из представления (2.18), определим с точностью до множителя вида $e^{i\lambda}$ функции φ_1 и φ_2 формулами (2.16) и (2.17), а через них, согласно (2.15), —функции f_1 и f_2, которые будут компонентами O-разложения функции f. При этом функция $f_2\in M(D_{R_1})$ не имеет нулей и полюсов в замкнутом круге $\overline{D}_{r_0}$, а $\frac{f_1(z)}{z^m}\in M(V_{R_1})$—вне круга

D_{r_0} (включая точку $z=\infty$). Тогда из (2.14) по теореме Коши о вычетах имеем

$$m=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

В дальнейшем для простоты мы будем считать, что $m=0$. Общий случай сводится к этому случаю, если заменить $f(z)$ на $\frac{f(z)}{z^m}$. Из условия $m=0$ следует, что ветви функции $\log f_1$ представляют собой однозначную голоморфную функцию в замкнутой области $\overline{V}_{r_0}$. То же самое верно и для функции $\log f_2$ в области D_{r_0}. Из (2.14) получаем тогда для $z\overline{\in}\gamma$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{z+\zeta}{\zeta-z}\log f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f_1(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f_2(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}=J_1(z)+J_2(z).$$

Отсюда, рассматривая отдельно случай $|z|<r_0$ и $|z|>r_0$ по теореме Коши о вычетах находим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}=\begin{cases}2\log f_2(z)+c_0 & \text{при } |z|<r_0,\\ -2\log f_1(z)+c_0 & \text{при } |z|>r_0,\end{cases}\tag{2.19}$$

где

$$c_0=\log\frac{f_1(\infty)}{f_2(0)}.$$

В представлениях (2.16) и (2.17) производные функций $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$, почти для всех $\theta\in[0,2\pi]$ определяются, как известно, равенствами (с учетом, что $m=0$):

$$\mu_1'(\theta)=\log|\varphi_1(e^{i\theta})|=\log|f_1(R_1 e^{-i\theta})|,$$
$$\mu_2'(\theta)=\log|\varphi_2(e^{i\theta})|=\log|f_2(R_2 e^{i\theta})|.$$

Отсюда с учетом формулы (2.19) окончательно находим:

$$\mu_1'(\theta)=\log|f(R_1 e^{-i\theta})|-\log|f_2(R_1 e^{-i\theta})|=\log|f(R_1 e^{-i\theta})|-$$
$$-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma}\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta+R_1 e^{-i\theta}}{\zeta-R_1 e^{-i\theta}}\log f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-c,$$

$$\mu_2'(\theta)=\log|f(R_2 e^{i\theta})|+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma}\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta+R_2 e^{i\theta}}{\zeta-R_2 e^{i\theta}}\log f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}+c.$$

Эти соотношения выполняются почти для всех $\theta\in[0,2\pi]$. При этом c — некоторая вещественная постоянная:

$$c = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\, c_0 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{f_2(0)}{f_1(\infty)}\right|,$$

которая полностью определится, если фиксировать значение $|f_1(\infty)|$ или $|f_2(0)|$, так как устремляя z к бесконечности в формуле (2.19) и выделяя вещественную часть, получим

$$\log|f_1(\infty)\, f_2(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r_0 e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Можно указать также ряд других соотношений между функциями f, μ_1 и μ_2. Например, используя гармоничность функций $\log|f_1|$ и $\log|f_2|$ и формулу Пуассона, нетрудно получить формулу (при $|z| < r_0$):

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\log|f(\zeta)|\frac{d\zeta}{\zeta} = \log|f_2(z)| + \log\left|f_1\left(\frac{r_0^2}{z}\right)\right|.$$

Переходя здесь к полярным координатам и полагая $z = R_1 e^{i\theta}$, в случае $r_0 = \sqrt{R_1 R_2}$, получим для почти всех $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\mu_1'(\theta) + \mu_2'(\theta) = \log|f(R_1 e^{-i\theta})\, f(R_2 e^{i\theta})| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\, e^{i\varphi} + e^{i\theta}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\, e^{i\varphi} - e^{i\theta}}\right)\log|f(\sqrt{R_1 R_2}\, e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Эта формула сохраняет силу также и в том случае, когда функция f имеет нули или полюса на окружности γ (при $r_0 = \sqrt{R_1 R_2}$).

Следующая теорема является аналогом известной теоремы единственности Карлемана на случай кругового кольца. Выше мы отметили, что функция $f \in N(S(R_1, R_2))$ при $0 < R_1 < R_2 < \infty$ имеет угловые предельные значения почти всюду на границе кольца $S(R_1, R_2)$ в смысле линейной лебеговской меры. Эти граничные значения мы обозначим через $f(R_1 e^{i\theta})$ и $f(R_2 e^{i\theta})$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Теорема 2.5. *Пусть f—мероморфная функция ограниченного вида в кольце $S(R_1, R_2)$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и*

$$\int_0^{2\pi}\log|f(R_1 e^{i\theta})\, f(R_2 e^{i\theta})|\, d\theta = -\infty. \tag{2.20}$$

Тогда $f \equiv 0$.

Доказательство. В силу утверждения 3 теоремы 2.3 функция f допускает представление

$$f = \frac{F_1}{F_2}, \tag{2.21}$$

где F_1 и F_2 — ограниченные аналитические функции в кольце $S(R_1, R_2)$. Можно считать, что $|F_2| < 1$. Очевидно также, что формула (2.21) сохраняется и для граничных значений этих функций. Из неравенства

$$|f(R_1 e^{i\theta}) f(R_2 e^{i\theta})| \geqslant |F_1(R_1 e^{i\theta}) F_1(R_2 e^{i\theta})|, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

следует, что достаточно доказать теорему при предположении, что функция f голоморфна и ограничена в $S(R_1, R_2)$. Тогда в силу теоремы 1.2 и утверждений (1.1), (1.2) и (1.3) этой теоремы, функция f допускает представление

$$f(z) = z^{-m} f_1(z) f_2(z), \quad z \in S(R_1, R_2), \tag{2.22}$$

где функция f_1 голоморфна и ограничена в круге D_{R_2}, функция f_2 голоморфна и ограничена вне замыкания круга D_{R_1}, а $m \geqslant 0$ — целое число. Теперь из предположения $f \not\equiv 0$ следует, что $f_1 \not\equiv 0$ и $f_2 \not\equiv 0$, откуда в силу теоремы единственности Карлемана (для круга и внешности круга), имеем

$$\int_0^{2\pi} \log|f_j(re^{i\theta})|\, d\theta > -\infty \quad \text{для} \quad j = 1, 2 \quad \text{и при} \quad r \in [R_1, R_2].$$

Это условие вместе с (2.22) противоречит условию (2.20) теоремы. Теорема, таким образом, доказана.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 18.III.1974

Հ. Հ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ. Բազմակապ տիրույթներում մերոմորֆ ֆունկցիաների մի ֆակտորիզացիայի և նրա որոշ կիրառությունների մասին (*ամփոփում*)

Հաշվի առնելով, որ կամայական n — կապանի D տիրույթ հանդիսանում է միակապ D_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ տիրույթների հատում, ապացուցվում է, որ D տիրույթում մերոմորֆ ցանկացած f ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} f_j(z), \quad z \in D$$

տեսքով, որտեղ f_j ֆունկցիան մերոմորֆ է D_j տիրույթում և բավարարում է որոշ լրացուցիչ պայմանների։

Այս արդյունքը ձևակերպված և ապացուցված է հոդվածի առաջին պարագրաֆում։

Երկրորդ պարագրաֆում ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի է նշված ֆակտորիզացիոն թեորեմայի օգնությամբ շրջանային օղակի համար ստանալ մի շարք այնպիսի արդյունքներ, ինչպիսին են մերոմորֆ ֆունկցիայի արժեքների բաշխման առաջին և երկրորդ հիմնական թեորեմները, սահմանափակ տիպի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումը, Կարլեմանի միակության թեորեմայի անալոգը և այլն։

H. H. MATHEVOSSIAN. *On a factorisation of meromorphic function in multiply connected domain and some of its applications* (summary)

Every n-connected domain D is an intersection of connected domain D_j $(j=1, 2, \cdots, n)$. This fact enables us to present every meromorphic function in D in the form

of $f(z)=\prod_{j=1}^{n} f_j(z)$ with f_j meromorphic in D_j. This enables to give method (section 2), by which in ringshaped domain we are able to recieve results like first and second fundamental theorems, the parametrical representation of function of bounded type, the analogues of Karleman's uniqueness theorem etc.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna.* La thioreme Picard-Borel et la theorie des functions meromorphes, Paris, 1929.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. *L. Sarlo, K. Noshiro.* Value distribution theory, Princeton (N. Y.) Van Nostrand' 1966.
4. *В. А. Зморович.* О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце, Мат. сборник, 32 (74), 1953, 633—652.
5. *В. А. Зморович.* О структурных формулах теории специальных классов аналитических функций и некоторых их приложениях, Изв. Киевск. политехн. ин-та, т. XV, 1954, 126—148.
6. *В. А. Зморович.* О некоторых классах аналитических функций в круговом кольце, Мат. сборник, 40 (82), 1956, 225—238.
7. *С. А. Касьянюк.* О функциях классов A и H_δ в круговом кольце, Мат. сборник, 42 (84): 3, 1957, 301—326.
8. *H Villat.* Le probleme de Dirichlet dans une aire annulaire, Rend. Circolo Matem. di Palermo, XXXIII, 1912, 134—174.