

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Э. А. МИРЗАХАНЫН
ПОСТРОЕНИЕ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теория степени отображения в гильбертовом пространстве была первоначально развита Лере и Шаудером [1]. Свое дальнейшее развитие и приложения она нашла в работах Браудера [2], М. А. Красносельского [3], Р. Л. Фрум-Кеткова [4] и других авторов.

В заметке [5] были кратко изложены результаты, позволяющие распространить идеи Лере и Шаудера на класс K_0 отображений гильбертова пространства, введенный в [6], [7]. Здесь дается подробное изложение результатов заметки [5].

Предложение 1. Пусть $f: M \rightarrow H$ — отображение класса K_0 и $X \subset M$ — компактное множество. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такое, содержащееся в M открытое множество $U \supset X$ и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$, и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|, \quad (1)$$

где $\lambda_f(x)$ — терминальная производная отображения f .

Доказательство. Так как функция $\lambda_f(x)$ непрерывна, то для любой точки $x_0 \in X$ существует такая окрестность $V(x_0) \subset M$ точки x_0 , что $\|\lambda_f(x) - \lambda_f(x_0)\| \leq \varepsilon/2$ при $x \in V(x_0)$. Далее для любой точки $x_0 \in X$ существует такое конечномерное подпространство $L(x_0) \subset H$, такая окрестность $W(x_0) \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta(x_0) > 0$, что если $x, y \in W(x_0)$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством $L(x_0)$ не меньше $\pi/2 - \delta(x_0)$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|.$$

Для каждой точки $x_0 \in X$ выберем такое положительное число $r(x_0)$, что $2r(x_0)$ -окрестность точки x_0 содержится в множестве $V(x_0) \cap W(x_0)$, и обозначим $r(x_0)$ -окрестность точки x_0 через $U(x_0)$.

Множества $U(x_0)$ ($x_0 \in X$) образуют открытое покрытие компактного множества X . Следовательно, существует такое конечное множество точек $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$, что $X \subset \bar{U}$, где

$$\bar{U} = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_s).$$

Положим

$$\delta = \min \left(\delta(x_1), \delta(x_s), \dots, \delta(x_s), \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда, если (при некотором $k = 1, 2, \dots, s$) мы имеем $x, y \in W(x_k)$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством $L(x_k)$ не меньше $\pi/2 - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - f(x_k)(x - y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|. \quad (2)$$

Обозначим через $\tilde{r}$ наименьшее из чисел $r(x_1), r(x_2), \dots, r(x_s)$. Далее, через r обозначим такое положительное число, что $9r < \tilde{r}$ и при этом r -окрестность U множества X содержится в $\tilde{U}$. Так как множество X компактно, то существует такое конечномерное подпространство L , что множество X содержится в r -окрестности подпространства L . При этом можно предполагать, что подпространство L содержит все подпространства $L(x_1), \dots, L(x_s)$. Мы покажем, что L , U и δ являются искомыми.

Пусть $x, y \in U$, причем $x \neq y$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$. Пусть, далее, $x - y = z + w$, где $z \in L$, $w \perp L$. Тогда

$$\|w\| > \|x - y\| \cos \delta \geq \|x - y\| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \|x - y\|. \quad (3)$$

Обозначим через π ортогональное проектирование пространства H на ортогональное дополнение подпространства L .

Так как $x, y \in U$, и потому каждая из точек x, y лежит в r -окрестности множества X и, значит, в $2r$ -окрестности подпространства L , то $\|\pi(x)\| \leq 2r$, $\|\pi(y)\| \leq 2r$. Следовательно

$$\|w\| = \|\pi(x - y)\| = \|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|\pi(x)\| + \|\pi(y)\| \leq 4r,$$

и потому (в силу (3))

$$\|x - y\| \leq 2\|w\| \leq 8r. \quad (4)$$

Так как $x \in U$, то найдется такая точка $x' \in X$, что $\|x - x'\| < r$.

Далее, так как $X \subset \tilde{U}$, то найдется такое число $k (= 1, 2, \dots, s)$, что $x' \in U(x_k)$, т. е. $\|x' - x_k\| < r(x_k)$. Вспоминая, что

$$9r < \tilde{r} = \min(r(x_1), r(x_2), \dots, r(x_s)) \leq r(x_k),$$

находим (см. (4)):

$$\|x - x_k\| \leq \|x - x'\| + \|x' - x_k\| < r + r(x_k) < 9r + r(x_k) < 2r(x_k),$$

$$\|y - x_k\| \leq \|y - x\| + \|x - x'\| + \|x' - x_k\| < 8r + r + r(x_k) < 2r(x_k).$$

Таким образом, обе точки x, y лежат в $2r(x_k)$ -окрестности точки x_k , и потому $x, y \in V(x_k) \cap W(x_k)$. Отсюда вытекает (поскольку угол между вектором $x - y$ и подпространством $L \supset L(x_k)$ не меньше $\pi/2 - \delta$), что выполнено неравенство (2). Кроме того, так как $x \in V(x_k)$, то

$$|\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Следовательно, в силу (2) и (5)

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x - y)\| \leq \|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_k)(x - y)\| + \\ + \|(\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k))(x - y)\| < \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|,$$

т. е. справедливо неравенство (1). Таким образом, предложение 1 доказано.

Перейдем теперь к определению степени отображения. Прежде всего введем следующее обозначение. Пусть $L \subset H$ — конечномерное подпространство, $a \in L$ и h — положительное число. Через $E_{a,h}(L)$ будем обозначать шар радиуса h с центром a , ортогональный подпространству L . Иначе говоря, $E_{a,h}(L)$ есть множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $x - a \perp L$ и $\|x - a\| \leq h$.

Предложение 2. Пусть $f: M \rightarrow H$ — отображение класса K_0 и $X \subset M$ — компактное множество, переходящее при отображении f в одну точку $f(X) = b \in H$. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое конечномерное подпространство L , содержащее точку b , такая окрестность $V \subset M$ компакта X и такое положительное число h , что для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$ и любой точки $a \in \bar{V} \cap L^*$ множество $f(E_{a,h}(L^*))$ пересекается с L^* ровно в одной точке.

Доказательство. Так как функция $\lambda_f(x)$ непрерывна и отлична от нуля на компакте X , то существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\lambda_f(x)| > 4\varepsilon$ на X . Следовательно, неравенство $|\lambda_f(x)| > 2\varepsilon$ определяет открытое множество $G \subset M$, содержащее X .

Выберем L , U и δ как указано в предложении 1. Пусть, далее, $h > 0$ — такое число, что $2h$ -окрестность множества X содержится в $G \cap U$. Через V обозначим ε -окрестность множества X , где число ε меньше чем h и настолько мало, что $\|f(x) - b\| < h\varepsilon$ для любой точки $x \in \bar{V}$ (напомним, что множество X компактно и $f(X) = b$). Мы можем при этом предполагать (заменяя, если нужно, L большим подпространством), что $b \in L$ и, кроме того, множество X находится в $\varepsilon/4$ -окрестности подпространства L .

Пусть $L^* \supset L$. Докажем, что для любой точки $a \in \bar{V} \cap L^*$ пересечение $L^* \cap f(E_{a,h}(L^*))$ состоит не больше, чем из одной точки. Допустим противное, т. е. предположим, что найдется точка $a \in \bar{V} \cap L^*$, для которой это пересечение содержит более одной точки. Иными словами, существуют такие точки $x, y \in H$, что выполнены соотношения

$$x - a \perp L^*, y - a \perp L^*, \|x - a\| \leq h, \|y - a\| \leq h, \quad (6)$$

$$f(x) \in L^*, f(y) \in L^*,$$

причем $x \neq y$. Так как $a \in \bar{V}$, то a лежит в h -окрестности множества X , и потому, в силу (6) обе точки x, y лежат в $2h$ -окрестности множества X , т. е. $x, y \in G \cap U \subset U$. Далее, в силу (6), $x - y \perp L^*$, так что $x - y \perp L$, и потому справедливо соотношение (1).

Из (6) следует, что $f(x) - f(y) \in L^*$, и потому имеем $(x - y)(f(x) - f(y)) = 0$ (так как $x - y \perp L^*$). Следовательно

$$\begin{aligned} |\lambda_f(x)| \cdot \|x - y\|^2 &= |\lambda_f(x)(x - y)(x - y)| = |(x - y)(f(x) - f(y) - \\ &- \lambda_f(x)(x - y))| \leq \|x - y\| \cdot \|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x - y)\| \leq \\ &\leq \|x - y\| \cdot \varepsilon \|x - y\| = \varepsilon \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $|\lambda_f(x)| \leq \varepsilon$. Но тогда (поскольку $x \in G$) $2\varepsilon < |\lambda_f(x)| \leq \varepsilon$, что противоречиво. Полученное противоречие и доказывает, что пересечение $L^* \cap f(E_{a, h}(L^*))$ содержит не более одной точки.

Остается доказать, что это пересечение непусто (для любой точки $a \in \bar{V} \cap L^*$). Пусть

$$b - f(a) = x' + z', \quad (7)$$

где $x' \perp L^*$, $z' \in L^*$. Мы имеем: $\|x'\| \leq \|b - f(a)\| < h\varepsilon$.

Положим

$$q_1 = \frac{x'}{\lambda_f(a)},$$

тогда

$$\|q_1\| = \frac{\|x'\|}{|\lambda_f(a)|} < \frac{\|x'\|}{2\varepsilon} < \frac{h\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{h}{2}.$$

Кроме того, $q_1 \perp L^*$, и потому $a + q_1 \in E_{a, h}(L^*)$. Далее

$$\begin{aligned} \|f(a + q_1) - f(a) - x'\| &= \|f(a + q_1) - f(a) - \lambda_f(a) \times \\ &\times ((a + q_1) - a)\| \leq \varepsilon \|(a + q_1) - a\| = \varepsilon \|q_1\| < \frac{\varepsilon h}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, положив $f(a) + x' = b_1$, мы получим

$$\|f(a + q_1) - b_1\| < \frac{\varepsilon h}{2},$$

причем, в силу (7), $b_1 = b - z' \in L^*$. Отсюда следует, что точка $f(a + q_1)$ отстоит от плоскости L^* менее чем на $\varepsilon h/2$.

Пусть уже построены такие векторы $q_1, q_2, \dots, q_k \in H$, что выполнены соотношения

$$\|q_k\| < \frac{h}{2^k}, \|q_1 + q_2 + \dots + q_k\| < h \left(1 - \frac{1}{2^k}\right), q_1 + q_2 + \dots + q_k \perp L^*, \quad (8)$$

$$\|f(a + q_1 + q_2 + \dots + q_k) - b_k\| < \frac{\varepsilon h}{2^k}, \text{ где } b_k \in L^*. \quad (9)$$

Из (8) следует, что $\| (a + q_1 + q_2 + \dots + q_k) - a \| < h$, и потому $a + q_1 + \dots + q_k \in E_{a, h}(L^*)$. Пусть

$$-f(a + q_1 + q_2 + \dots + q_k) + b_k = x_k + z_k, \quad (10)$$

где $x_k \perp L^*$, $z_k \in L^*$. Тогда (в силу (9))

$$\|x_k\| \leq \|f(a + q_1 + q_2 + \dots + q_k) - b_k\| < \frac{\varepsilon h}{2^k}. \quad (11)$$

Положим

$$q_{k+1} = \frac{x_k}{\lambda_f(a + q_1 + \dots + q_k)}. \quad (12)$$

Так как $a \in \bar{V}$, то точка a находится в h -окрестности множества X и потому точка $a + q_1 + \dots + q_k$ находится в $2h$ -окрестности множества X (см. (8)). Следовательно, $a + q_1 + \dots + q_k \in G$, т. е.

$$|\lambda_f(a + q_1 + \dots + q_k)| > 2\varepsilon.$$

Отсюда находим

$$\|q_{k+1}\| = \frac{\|x_k\|}{|\lambda_f(a + q_1 + q_2 + \dots + q_k)|} < \frac{\|x_k\|}{2\varepsilon} < \frac{\varepsilon h}{2^k} \cdot \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{h}{2^{k+1}} \quad (13)$$

(см. (11)). Таким образом

$$\begin{aligned} \|q_1 + \dots + q_k + q_{k+1}\| &\leq \|q_1 + \dots + q_k\| + \|q_{k+1}\| < h \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \\ &+ \frac{h}{2^{k+1}} = h \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, $q_{k+1} \perp L^*$ (так как $x_k \perp L^*$), и потому $q_1 + \dots + q_k + q_{k+1} \perp L^*$ (см. (8)). Мы видим, что при замене k на $k+1$ соотношение (8) остается справедливым. Далее, так как весь шар $E_{a, h}(L^*)$ находится в $2h$ -окрестности множества X (и, значит, в U), то

$$\begin{aligned} \|f(a + q_1 + \dots + q_k + q_{k+1}) - f(a + q_1 + \dots + q_k) - \\ - \lambda_f(a + q_1 + \dots + q_k) \cdot q_{k+1}\| \leq \varepsilon \|q_{k+1}\|, \end{aligned}$$

т. е. (см. (12), (13))

$$\|f(a + q_1 + \dots + q_{k+1}) - f(a + q_1 + \dots + q_k) - x_k\| < \frac{\varepsilon h}{2^{k+1}}.$$

В силу (10) это соотношение можно переписать в виде

$$\|f(a + q_1 + \dots + q_{k+1}) - (b_k - z_k)\| < \frac{\varepsilon h}{2^{k+1}}.$$

Так как $b_k \in L^*$ (см. (9)) и $z_k \in L^*$, то $b_k - z_k \in L^*$. Таким образом, положив $b_{k+1} = b_k - z_k$, мы найдем, что соотношения (9) остаются справедливыми при замене k на $k+1$.

Проведенная индукция показывает, что можно выбрать такие последовательности $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$, которые при всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют соотношениям (8), (9).

Соотношение (8) показывает, что ряд $q_1 + q_2 + \dots + q_r + \dots$ сходится. Обозначим через q сумму этого ряда. Тогда, согласно (8), $q \leq h$ и $q \perp L^*$. Следовательно, $a + q \in E_{a, h}(L^*)$, и потому $f(a + q) \in f(E_{a, h}(L^*))$. В силу непрерывности

$$f(a + q) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a + q_1 + \dots + q_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

(см. (9)), и потому $f(a + q) \in L^*$ (так как $b_k \in L^*$ при всех k , см. (9)). Итак, $f(a + q)$ принадлежит пересечению $L^* \cap f(E_{a, h}(L^*))$, т. е. это пересечение непусто. Тем самым предложение 2 полностью доказано.

Сформулированное предложение позволяет (для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$) построить отображение $\varphi: \bar{V} \cap L^* \rightarrow L^*$, положив

$$\varphi(a) = L^* \cap f(E_{a, h}(L^*)) \text{ при } a \in \bar{V} \cap L^*. \quad (14)$$

Это отображение φ (заданное, если выбраны f, X, L, V, h , указанные в предложении 2) и лежит в основе определения степени отображения.

Предложение 3. Пусть $f: M \rightarrow N$ — отображение класса K_0 и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $i_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое конечномерное подпространство L , содержащее точку b , такая окрестность $V \subset M$ компакта X и такое положительное число h , что (при $L^* \supset L$) граница открытого в L^* множества $V \cap L^*$ переходит при отображении φ (см. (14)) в множество, не содержащее точки b .

Доказательство. Сохраним обозначения, введенные при доказательстве предложения 2. Пусть $L^* \supset L$ и $a \in \bar{V} \cap L^*$ — такая точка, что $\varphi(a) = b$, т. е. $f(E_{a, h}(L^*)) \cap L^* = b$. Тогда $b \in f(E_{a, h}(L^*))$, т. е. $E_{a, h}(L^*) \cap X \neq \emptyset$ (поскольку $X = f^{-1}(b)$). Пусть $x \in E_{a, h}(L^*) \cap X$. Тогда $x - a \perp L^*$ (по определению шара $E_{a, h}(L^*)$), и потому $\|x - a\|$ есть расстояние от точки x до подпространства L^* . Но множество X содержится в ε -окрестности подпространства L^* (так как $L^* \supset L$). Следовательно, расстояние от точки x до подпространства L^* меньше ε , т. е. $\|x - a\| < \varepsilon$. Так как $x \in X$, то это означает, что точка a удалена от X менее, чем на ε . В то же время все точки границы множества $V \cap L^*$ удалены от множества X не менее чем на σ (так как V есть σ -окрестность множества X), и потому точка a не принадлежит границе множества $V \cap L^*$. Но это и означает, что на границе множества $V \cap L^*$ нет точек, переходящих в b при отображении φ . Предложение 3 доказано.

Ясно, что при выполнении условий предложения 3 определена степень отображения $\varphi: (V \cap L^*) \rightarrow L^*$ в точке b . Ясно также, что эта степень отображения не зависит от ориентации пространства L^* (если

мы условимся ориентировать L^* и $V \cap L^*$ одинаково). Оказывается (и в этом заключается наше следующее предложение), что L , V и h можно выбрать таким образом, чтобы для всех $L^* \supset L$ степень отображения $\varphi: (V \cap L^*) \rightarrow L^*$ была одной и той же. Более того, эта степень отображения не зависит от случайного выбора элементов L , V и h , участвующих в построении, а всецело определяется отображением f и точкой b . Иными словами, справедливо следующее

Предложение 4. Пусть $f: M \rightarrow H$ — отображение класса K_0 и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $x = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое число $c = c(f, b)$ (называемое степенью отображения $f: M \rightarrow H$ в точке b), которое обладает следующим свойством: если L , V и h выбраны так, что степень отображения φ (см. (14)) одна и та же для всех конечномерных подпространств $L^* \supset L$, то эта степень отображения равна $c(f, b)$.

Доказательство. Выберем L , V и h , как это сделано при доказательстве предложения 3, и пусть L^* и L_1^* — конечномерные подпространства, удовлетворяющие условию $L_1^* \supset L^* \supset L$. Подпространству L^* соответствует отображение φ (см. (14)), подпространству L_1^* — аналогичное отображение $\varphi_1: \bar{V} \cap L_1^* \rightarrow L_1^*$. Мы прежде всего покажем, что степени отображений φ и φ_1 в точке b совпадают. Достаточно установить это для случая, когда $\dim L_1^* = \dim L^* + 1$.

Пусть $a, a' \in \bar{V} \cap L_1^*$, причем $a - a' \perp L^*$. Положим $u = \varphi_1(a)$, $v = \varphi_1(a')$. Тогда $u = f(x)$, $v = f(y)$, где $x \in E_{a, n}(L_1^*)$, $y \in E_{a', n}(L_1^*)$. Мы имеем: $x - a \perp L_1^*$, $y - a' \perp L_1^*$, и потому $x - a \perp L^*$, $y - a' \perp L^*$, откуда следует, что вектор

$$x - y = (x - a) + (a - a') - (y - a')$$

ортогонален подпространству L^* . Так как каждая из точек x, y находится в h -окрестности множества $\bar{V}$, т. е. в $2h$ -окрестности множества X (см. доказательство предложения 2), то $x, y \in U \cap G$ и потому справедливо соотношение (1), т. е.

$$\|u - v - \lambda_f(x)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Из этого следует (в силу соотношения $\lambda_f(x) \neq 0$), что угол между векторами $\varphi_1(a) - \varphi_1(a') = u - v$ и $x - y$ не превосходит

$$\arcsin \frac{\varepsilon}{|\lambda_f(x)|} < \arcsin \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{6}.$$

Так как обе точки $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(a')$ лежат в подпространстве L_1^* (см. (14)), а вектор $a - a'$ является проекцией вектора $x - y$ на это подпространство, то угол между векторами

$$\varphi_1(a) - \varphi_1(a') \text{ и } a - a' \tag{15}$$

подавно меньше $\frac{\pi}{6}$. Итак, если $a, a' \in \bar{V} \cap L_1^*$, причем $a - a' \perp L^*$, то

угол между векторами (15) меньше $\frac{\pi}{6}$.

Пусть теперь e — единичный вектор подпространства L_1^* , ортогональный подпространству L^* . Далее, пусть c — произвольная точка подпространства L^* и l_c — прямая, проходящая через точку c и параллельная вектору e . Для произвольной точки $a \in l_c$ положим $\xi = e(a - c)$ и будем рассматривать ξ как координату точки a на прямой l_c . Если $a, a' \in \bar{V} \cap L_1^*$ и $a - a' \perp L^*$, то обе точки a, a' лежат на одной прямой l_c ; координаты точек a, a' на этой прямой обозначим через ξ, ξ' . Будем считать для определенности, что $\xi > \xi'$, т. е.

$$e(a - a') = e(a - c) - e(a' - c) = \xi - \xi' > 0.$$

Тогда вектор $a - a'$ будет иметь то же направление, что и вектор e . Так как угол между векторами (15) меньше $\pi/6$, то угол между векторами $\varphi_1(a) - \varphi_1(a')$ и e меньше $\pi/6$, и потому $e(\varphi_1(a) - \varphi_1(a')) > 0$.

Иными словами, при монотонном возрастании координаты ξ точки $a \in l_c \cap \bar{V}$ скалярное произведение $e\varphi_1(a)$ (т. е. взятое со знаком расстояние от точки $\varphi_1(a)$ до подпространства L^*) также возрастает монотонно. В частности, отсюда следует, что множество $l_c \cap \bar{V}$ гомеоморфно отображается в L_1^* при помощи отображения φ_1 .

Пусть теперь $c \in \bar{V} \cap L^*$. Так как $\varphi(c) \in f(E_{c,h}(L^*))$, то существует (единственная точка $\psi(c) \in E_{c,h}(L^*)$), для которой $f(\psi(c)) = \varphi(c)$. Легко видеть, что точка $\psi(c)$ непрерывно зависит от c (см. доказательство предложения 2). Проекцию точки $\psi(c)$ на плоскость L_1^* обозначим через $\omega(c)$. Тогда $\omega(c) \in L_1^*$ и $\omega(c) - c \perp L^*$, т. е. $\omega(c) \in l_c$. Координату точки $\omega(c)$ на прямой l_c обозначим через $\mu(c)$.

Далее, через V_1 обозначим $\sigma/2$ -окрестность множества X , а через Θ — множество всех точек $c \in V_1 \cap L^*$, для которых выполнено неравенство $|\mu(c)| < \sigma/4$. Так как функция $\mu(c)$ непрерывна, то множество Θ открыто в подпространстве L^* .

Если $c \in (V \cap L^*) \setminus (V_1 \cap L^*)$, то точка c удалена от множества X не менее чем на $\sigma/2$. Следовательно, точка c удалена от множества X^* более чем на $\sigma/4$, где X^* — ортогональная проекция множества X на подпространство L^* (напомним, что X находится в $\sigma/4$ -окрестности подпространства $L \subset L^*$). Отсюда вытекает, что любая точка шара $E_{c,h}(L^*)$ удалена от множества X^* более чем на $\sigma/4$, и потому шар $E_{c,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X . В частности, $\psi(c) \notin X = f^{-1}(b)$, т. е. $\varphi(c) = f(\psi(c)) \neq b$. Итак, образ множества $(V \cap L^*) \setminus (V_1 \cap L^*)$ при отображении φ не содержит точки b .

Далее, если $c \in (V_1 \cap L^*) \setminus \Theta$, то $|\mu(c)| \geq \sigma/4$, т. е. $\|\omega(c) - c\| \geq \sigma/4$. Следовательно, $\|c - \psi(c)\| \geq \|c - \omega(c)\| \geq \sigma/4$, т. е. точка $\psi(c)$ удалена от подпространства L^* не менее чем на $\sigma/4$. Любая же точка множе-

ства X удалена от подпространства L^* менее чем на $\varepsilon/4$. Поэтому $\psi(c) \in X$, т. е. и в этом случае $\varphi(c) = f(\psi(c)) = b$. Итак, образ множества $(V_1 \cap L^*) \setminus \Theta_1$ при отображении φ также не содержит точки b , а потому образ множества

$$(V \cap L^*) \setminus \Theta = ((V \cap L^*) \setminus (V_1 \cap L^*)) \cup ((V_1 \cap L^*) \setminus \Theta)$$

при отображении φ не содержит точки b . Следовательно, степени отображений

$$\varphi: V \cap L^* \rightarrow L^* \text{ и } \varphi: \Theta \rightarrow L^* \quad (16)$$

в точке b совпадают.

Для точки $c \in \Theta$ обозначим через I_c интервал прямой l_c , состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют условию $|\xi| < \varepsilon/2$. Так как при $c \in \Theta$ справедливо неравенство $|\mu(c)| < \varepsilon/4$, то $\omega(c) \in I_c$. Заметим, что $I_c \subset V$ (при $c \in \Theta$). Действительно, при $c \in \Theta$ точка c находится в $\varepsilon/2$ -окрестности множества X , а так как для любой точки $a \in I_c$ мы имеем $\|a - c\| < \frac{\varepsilon}{2}$, то любая точка $a \in I_c$ находится (при $c \in \Theta$) в ε -окрестности множества X , т. е. $a \in V$.

Множество $W = \bigcup_{c \in \Theta} I_c$ открыто в пространстве L_1^* , причем $W \subset V$. Поэтому отображение φ_1 определено, в частности, на множестве W . Пусть $a \in (V \cap L_1^*) \setminus W$. Докажем, что шар $E_{a, h}(L_1^*)$ не пересекается с множеством X . Допустим, напротив, что существует точка $x \in E_{a, h}(L_1^*) \cap X$. Тогда a является проекцией точки x на подпространство L_1^* . Обозначим через c проекцию точки x на подпространство L^* . Так как $x \in X$, то расстояние точки x от подпространства L^* меньше $\varepsilon/4$, т. е. $\|x - c\| < \varepsilon/4$. Следовательно, $c \in V_1$, т. е. $c \in V_1 \cap L^*$. Далее

$$\|a - c\| \leq \|x - c\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

и потому $a \in I_c$. Кроме того, так как $x \in X$, то $f(x) = b \in L^*$, и поэтому, в силу включения $x \in E_{c, h}(L^*)$, мы имеем: $x = \psi(c)$. Неравенство $\|x - c\| < \varepsilon/4$ показывает теперь, что $c \in \Theta$. Но тогда $I_c \subset W$, т. е. $a \in W$ что однако противоречит выбору точки a . Полученное противоречие показывает, что при $a \in (V \cap L_1^*) \setminus W$ шар $E_{a, h}(L_1^*)$ не пересекается с множеством X , т. е. $\varphi_1(a) \neq b$.

Итак, образ множества $(V \cap L_1^*) \setminus W$ при отображении φ_1 не содержит точки b . Поэтому граница (относительно L_1^*) множества W переходит при отображении φ_1 в множество, не содержащее точки b , и степени отображений

$$\varphi_1: (V \cap L_1^*) \rightarrow L_1^* \text{ и } \varphi_1: W \rightarrow L_1^* \quad (17)$$

в точке b совпадают.

Теперь для доказательства того, что степени отображений

$$\varphi: (V \cap L^*) \rightarrow L^* \text{ и } \varphi_1: (V \cap L_1^*) \rightarrow L_1^*$$

в точке b совпадают, достаточно (в силу (16), (17)) доказать, что совпадают (в точке b) степени отображений

$$\varphi: \Theta \rightarrow L^* \text{ и } \varphi_1: W \rightarrow L_1^*. \quad (18)$$

Докажем это. Каждую точку $a \in W$ можно записать в виде (c, ξ) , где $c \in \Theta$, а ξ — координата точки a на прямой l_c ; при этом число ξ пробегает (независимо от $c \in \Theta$) интервал $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$.

Обозначим теперь через $g_c^{(0)}$ отображение интервала $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя, определенное соотношением

$$g_c^{(0)}(\xi) = \begin{cases} \mu(c) + \xi \cdot \frac{\sigma - 2\mu(c)}{\sigma} & \text{при } 0 \leq \xi < \frac{\sigma}{2}, \\ \mu(c) + \xi \cdot \frac{\sigma + 2\mu(c)}{\sigma} & \text{при } -\frac{\sigma}{2} < \xi \leq 0. \end{cases}$$

Отображение $g_c^{(0)}$ монотонно (т. е. гомеоморфно отображает интервал $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя), и при этом $g_c^{(0)}(0) = \mu(c)$. Положим теперь

$$g_c^{(t)}(\xi) = t\xi + (1-t)g_c^{(0)}(\xi), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отображение $g_c^{(t)}$ интервала $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя также монотонно, причем $g_c^{(1)}$ есть тождественное отображение. Далее, так как функция $\mu(c)$ непрерывна, то $g_c^{(t)}(\xi)$ непрерывно по совокупности переменных c, ξ, t .

Таким образом, положив

$$G^{(t)}(c, \xi) = (c, g_c^{(t)}(\xi)),$$

мы получаем гомеоморфное отображение $G^{(t)}$ множества W на себя, причем $G^{(1)}$ — тождественное отображение. Так как при гомотопии $G^{(t)}: W \rightarrow W$ граница множества W остается неподвижной, то степени отображений

$$\varphi_1: W \rightarrow L_1^* \text{ и } \varphi_1 \circ G^{(0)}: W \rightarrow L_1^* \quad (19)$$

в точке b совпадают.

Заметим теперь, что отображение $\varphi_1 \circ G^{(0)}$ переводит точку $c = (c, 0) \in \Theta$ в точку

$$\begin{aligned} \varphi_1(G^{(0)}(c, 0)) &= \varphi_1(c, g_c^{(0)}(0)) = \varphi_1(0, \mu(c)) = \varphi_1(\omega(c)) = \\ &= f(E_{\omega(c), h}(L_1^*)) \cap L_1^* = f(\psi(c)) = \varphi(c) \end{aligned}$$

(поскольку $f(\psi(c)) \in L^* \subset L_1^*$ и, кроме того, $\psi(c) - \omega(c) \perp L_1^*$, т. е. $\psi(c) \in E_{\omega(c), h}(L_1^*)$). Таким образом, на множестве $\Theta \subset W$ отображение $\varphi_1 \circ G^{(0)}$ совпадает с φ , так что $\varphi_1 \circ G^{(0)}(\Theta) \subset L^*$.

Далее, при $\xi > 0$ мы имеем (в силу монотонности отображения $g_c^{(0)}$) $g_c^{(0)}(\xi) > g_c^{(0)}(0)$, т. е. $g_c^{(0)}(\xi) > \mu(c)$. Иначе говоря, при $\xi > 0$ координата точки $G^{(0)}(c, \xi)$ на прямой l_c больше координаты точки $G^{(0)}(c, 0)$, и потому

$$e(\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi)) - \varphi_1(G^{(0)}(c, 0))) > 0,$$

т. е.

$$e(\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi)) - \varphi(c)) > 0. \quad (20)$$

Иными словами, если мы условимся считать, что вектор e определяет направление „вверх“ в подпространстве L_1^* , то, когда точка $a = (c, \xi)$ расположена в W выше подпространства L^* (т. е. при $\xi > 0$), точка $\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше L^* (в силу соотношения (20) и включения $\varphi(c) \in L^*$). Аналогично, если точка $a = (c, \xi)$ расположена в W ниже L^* (т. е. $\xi < 0$), то и точка $\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi))$ расположена ниже L^* .

Из этого следует, что степени отображений

$$\varphi_1 \circ G^{(0)}: W \rightarrow L_1^* \text{ и } \varphi: \Theta \rightarrow L^*$$

в точке b совпадают, и потому, в силу (19), совпадают в точке b и степени отображений (18).

Тем самым полностью доказано, что при $L_1^* \supset L^* \supset L$ степени отображений $\varphi: V \cap L^* \rightarrow L^*$ и $\varphi_1: V \cap L_1^* \rightarrow L_1^*$ в точке b совпадают. Однако это доказано лишь для случая, когда L , V и h выбраны вполне определенным образом (а именно, так как это было сделано при доказательстве предложения 2).

Пусть теперь L' , V' и h' выбраны иначе, но так, что при $L^* \supset L'$ определено отображение $\varphi': V' \cap L^* \rightarrow L^*$ (ср. (14)), причем определена степень этого отображения в точке b и эта степень не зависит от выбора подпространства $L^* \supset L'$. Для завершения доказательства предложения 4 остается установить, что при $L^* \supset L$ и $L^* \supset L'$ степени отображений

$$\varphi: V \cap L^* \rightarrow L^* \text{ и } \varphi': V' \cap L^* \rightarrow L^* \quad (21)$$

в точке b совпадают.

Выберем положительное число h_1 , меньшее каждого из чисел h , h' . Тогда

$$E_{a, h_1}(L^*) \subset E_{a, h}(L^*), \quad E_{a, h_1}(L^*) \subset E_{a, h'}(L^*) \quad (a \in L^*).$$

Далее, построим такую окрестность $V_1 \subset V \cap V'$ множества X и такое конечномерное подпространство $L_1 \supset L \cup L'$, что для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L_1$ и любой точки $a \in V_1 \cap L^*$ пересечение $f(E_{a, h_1}(L^*)) \cap L^*$ состоит ровно из одной точки (см. предложение 2). Тогда при $L^* \supset L_1$ определено отображение $\varphi_1: V \cap L^* \rightarrow L^*$ (ср. (14)). Согласно предложению 3, подпространство L_1 можно выбрать так, что при $L^* \supset L_1$ определена степень этого отображения в точке b . Мы можем при этом считать, что V_1 есть r -окрестность множества X

(где r — некоторое положительное число) и что множество X содержится в r -окрестности подпространства L_1 .

Мы докажем, что при $L^* \supset L_1$ степени отображений

$$\varphi_1: (V_1 \cap L^*) \rightarrow L^* \text{ и } \varphi: (V \cap L^*) \rightarrow L^* \quad (22)$$

в точке b совпадают и, точно так же, степени отображений

$$\varphi_1: (V_1 \cap L^*) \rightarrow L^* \text{ и } \varphi': (V' \cap L^*) \rightarrow L^* \quad (23)$$

в точке b совпадают. Этим и будет доказано совпадение степеней отображений (21).

Итак, пусть $L^* \supset L_1$. Пусть, далее, $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$. Покажем, что шар $E_{a,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X . Допустим, напротив, что существует точка $x \in E_{a,h}(L^*) \cap X$. Тогда расстояние $\|x - a\|$ точки x от подпространства L^* меньше r (так как $x \in X$). Следовательно, точка a находится в r -окрестности множества X , и потому $a \in V_1$, что однако противоречит выбору точки a . Таким образом, при $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$ шар $E_{a,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X . Это означает, что $b \notin f(E_{a,h}(L^*))$. Поэтому при $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$ мы имеем $\varphi(a) \neq b$. Иными словами, образ множества $(V \setminus V_1) \cap L^*$ при отображении φ не содержит точки b . Отсюда следует, что степени отображений

$$\varphi: (V \cap L^*) \rightarrow L^* \text{ и } \varphi_1: (V_1 \cap L^*) \rightarrow L^* \quad (24)$$

в точке b совпадают.

Теперь для доказательства того, что степени отображений (22) совпадают, достаточно установить, что совпадают степени отображений

$$\varphi: (V_1 \cap L^*) \rightarrow L^* \text{ и } \varphi_1: (V_1 \cap L^*) \rightarrow L^*. \quad (25)$$

Мы покажем, что отображения (25) просто *совпадают* между собой. В самом деле, пусть $a \in V_1 \cap L^*$. Тогда

$$\varphi_1(a) = f(E_{a,h}(L^*)) \cap L^* \subset f(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*.$$

Но последнее пересечение содержит ровно *одну* точку, а именно точку $\varphi(a)$. Следовательно, $\varphi_1(a) = \varphi(a)$ (при $a \in V_1 \cap L^*$), т. е. отображения (25) совпадают.

Этим доказано совпадение степеней отображений (22). Аналогично доказывается совпадение степеней отображений (23). Таким образом, предложение 4 полностью доказано.

Этим и завершается построение степени отображения. Именно, если $f: M \rightarrow H$ — такое отображение класса K_0 , что прообраз $f^{-1}(b)$ любой точки $b \in f(M)$ компактен, то определена степень отображения $s(f, b)$. Если при этом множество M связно, то можно доказать, что степень отображения $s(f, b)$ одинакова для всех точек $b \in f(M)$. В случае же, когда множество $f^{-1}(b)$ компактно не для всех $b \in f(M)$, степень отображения определена лишь в тех точках $b \in f(M)$, для которых

прообраз $f^{-1}(b)$ компактен. Если при этом $N \subset f(M)$ — множество всех точек $b \in f(M)$, для которых прообраз $f^{-1}(b)$ компактен, то на каждой компоненте множества N степень отображения $c(f, b)$ постоянна. Далее, если f_0 и f_1 — гомотопные (в классе K_0) отображения класса K_0 , заданные на множестве M , и f_t , $0 \leq t \leq 1$ — соединяющая их гомотопия и если при этом для всех $t \in [0, 1]$ выполнено включение $b \in f_t(M)$ и прообраз $f_t^{-1}(b)$ компактен, то $c(f_0, b) = c(f_1, b)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова

АН СССР,

Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 17.VII.1973

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻԻ, Է. Ա. ՄԻՐՋԱՆԻԱՆՅԱՆ. Արտապատկերման աստիճանի կառուցումը հիլբերտյան տարածությունում (ամփոփում)

Հարվածում կառուցվում է արտապատկերման տոպոլոգիական աստիճանը K_0 դասին ([6], [7]) պատկանող ու լրացուցիչ պայմանների բավարարող արտապատկերումների համար: Գաղափարական տեսակետից այդ կառուցումը մոտ է Լերե-Շաուդերի ([1]) կլասիկականին, բայց ունի իր տարբերությունները և առանձնահատկություններ:

V. G. BOLTJANSKIĬ, E. A. MIRSAKHANIĀN. *Construction of the power of a mapping in a Hilbert space (summary)*

The paper constructs topological powers of mappings from the K_0 class ([6], [7]), under some additional conditions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ж. Лере и Ю. Шаудер. УМН, 1. вып. 3—4, 1946.
2. F. E. Browder. On a generalization of the Shauder fixed point theorem, Duke Math. Journal, 26, 1959, 291—304.
3. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
4. Р. А. Фрум-Кетков. Об отображениях в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 192, № 6, 1970, 1231—1234.
5. В. Г. Болтянский и Э. А. Мирзаханян. Степень отображения в гильбертовом пространстве, ДАН Арм.ССР, 51, № 4, 1970, 193—195.
6. В. Г. Болтянский. Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 51, № 3, 1970, 129—131.
7. В. Г. Болтянский. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 107—120.