ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

# БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕШЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С УЗЛАМИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРАТНОСТИ В КЛАССЕ $H_2$

1°. Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ и $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — произвольные последовательности комплексных чисел и $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа $\alpha_k$ на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$, можно ставить следующую общую задачу:

Выявить критерии для $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{\gamma_j\}_1^\infty$, обеспечивающие *существование* функций $f(z)$ из класса $H_\delta$ $(0 < \delta < +\infty)$ Харди, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

*и построить аппарат для представления* решений задач такого рода.

В том специальном случае, когда $\{\alpha_j\}_1^\infty$ суть различные друг от друга точки круга $|z| < 1$, и таким образом, $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_j) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

с простыми узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

Критерии *существования решения* задачи (2) в классе $H^\infty$ ограниченных в круге $|z| < 1$ функций, либо в классах $H_\delta (0 < \delta < +\infty)$, были установлены в ряде работ (см. [1], а также [2], где приведены подробные литературные указания по этому поводу).

В частности, ответ на вопрос о существовании решения задачи (2) в классах $H_\delta$ $(1 \leqslant \delta < +\infty)$ впервые получил полное решение в оригинальной работе Шапиро и Шилдса [3].

В случае, когда различные точки в последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ появляются *двукратно*, либо *с одинаковой кратностью*, в классе $H_2$ задача была рассмотрена в работах [4], [5] и [6], но вновь лишь в постановке существования ее решения.

Отметим однако, что все эти работы, посвященные задаче (1), значительно опираются друг на друга. В частности, работа Чальмерса [6], в которой хотя и далеко не в наилучшей формулировке дан полный ответ на вопрос о *существовании решения* интерполяционной задачи (1) в классе $H_2$, существенно опирается на известные общие результаты Н. К Бари [7] о биортогональных системах и о базисах в гильбертовых пространствах, а также на двусторонние оценки Шура собственных чисел для произведений эрмитово-положительных матриц.

2°. В настоящей статье предлагается новый, по существу чисто аналитический, метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (1) в классе $H_2$, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для построения решений этой задачи.

Этот метод основан на построении специальных систем аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$, подчиненной вначале лишь условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{3}$$

Система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ является лишь несколько модифицированным для наших целей вариантом построенной в нашей работе [8] системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

В § 1 статьи в леммах 1.1—1.3 приводится построение указанной системы и устанавливается важное интерполяционное свойство сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,\Omega_j^*(z)\quad(n\geqslant 1). \tag{4}$$

Далее (леммы 1.4—1.5), в предположении, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — из класса $\Delta$, т. е.

$$\inf_{k\geqslant 1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta>0 \tag{5}$$

или (в леммах 1.6—1.8), когда $\{\alpha_j\}_1^\infty$ из более узкого класса — $\Delta_p\subset\Delta$ с ограниченной кратностью $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{s_j\}=p<+\infty$, мы устанавливаем ряд важных для дальнейшего изложения оценок, связанных с функциями $\Omega_k^*(z)$ $(k\geqslant 1)$ или их скалярными произведениями на окружности $|z|=1$.

В § 2 излагаются основные результаты статьи.

Здесь, во-первых, устанавливается теорема 1, согласно которой условия

$$\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p\ \text{ и }\ \sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}|\gamma_j|^2<+\infty \tag{6}$$

достаточны для существования решения $f(z)\in H_2$ задачи (1). Эти же условия достаточны также для эффективного построения этого решения в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\,\Omega_j^*(z) \tag{7}$$

по нашей биортогональной системе, поскольку

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (1\leqslant j<\infty). \tag{8}$$

В теореме 2, существенно опираясь на то, что разложение вида (7)—(8) представляет решение задачи типа (1) в классе $H_2$, мы для однократных узлов $\{z_j\}_1^\infty\in\Delta$ устанавливаем сходимость рядов

$$\sum_{r=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)^{2r-1}\,|f^{(r-1)}(z_j)|^2 \quad (r=1,2,\cdots) \tag{9}$$

для любой функции $f(z)\in H_2$.

Отметив далее, что при условии

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty$$

система $\{r_j(z)\}_1^\infty$ не замкнута в $H_2$, мы вводим линейные подпространства $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$ пространства $H_2$ и устанавливаем важные для дальнейшего изложения факты: теорему 3 о том, что $H_2=\lambda_2\{\alpha_j\}\oplus\oplus N_2\{\alpha_j\}$ и теорему 4 о единственности функций $\Phi(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ по значениям величин $\Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)$ $(1\leqslant j<+\infty)$.

Наконец, наряду со счетномерным гильбертовым пространством $l^2$ мы рассматриваем оператор $T_2$ на $H_2$, положив

$$T_2(f)=\{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty,\ f(z)\in H_2.$$

В заключительной теореме 5, доказательство которой в значительной мере уже содержалось в теоремах 1 и 2, существенно опираясь также на теоремы 3 и 4, мы устанавливаем, что условие $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$ необходимо и достаточно для совпадения двух пространств $l^2$ и $T_2[H_2]$.

## § 1. Предварительные леммы

1.1 (a) В данном пункте мы будем предполагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная пока лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1.1}$$

Впредь для любого фиксированного значения $k$ $(1\leqslant k<+\infty)$, через $s_k\geqslant 1$ будем обозначать кратность появления числа $\alpha_k$ на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$, а через $p_k$ — кратность его появления во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. В силу условия (1.1) всегда будем иметь

$$1\leqslant s_k\leqslant p_k<+\infty \quad (1\leqslant k<+\infty). \tag{1.2}$$

Обозначим, далее, через $\{z_j\}_1^\infty$ подпоследовательность всех отличных друг от друга чисел нашей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Тогда, ввиду принятых нами обозначений и условия (1.1)

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\,p_j=\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1.1'}$$

Рассмотрим функции Бляшке, ассоциированные с последовательностями $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{z_j\}_1^\infty$

$$B(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j},\quad b(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_j z}\frac{|z_j|}{z_j}, \tag{1.3}$$

условившись в них полагать $\dfrac{|a|}{a}=-1$ при $a=0$.

Определим далее функцию

$$B_*(z)=B(z)\,b(z), \tag{1.4}$$

заметив, что она может быть представлена еще в виде следующего очевидно, сходящегося в круге $D^+=\{z;\,|z|<1\}$ произведения

$$B_*(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_j z}\frac{|z_j|}{z}\right)^{q_j+1}, \tag{1.4'}$$

где $q_j\geqslant 1$, очевидно, также конечная кратность появления числа $z_j$ в последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

(б) Из самого определения (1.4)—(1.4') функции $B_*(z)$ вытекает, что в каждой точке $z=\alpha_k$ круга $D^+$ она имеет нуль кратности $p_k+1$. Поэтому для любого $k\geqslant 1$, положив

$$\overset{*}{\omega}_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{p_k+1}}{B_*(z)}, \tag{1.5}$$

можем утверждать, что эта функция регулярна и отлична от нуля в окрестности точки $z=\alpha_k$. Таким образом, если обозначить

$$\overset{*}{a}_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{d^\nu\,\overset{*}{\omega}_k(z)}{dz^\nu}\right\}_{z=\alpha_k}\quad(0\leqslant\nu<+\infty), \tag{1.6}$$

то в достаточно малой окрестности точки $z=\alpha_k$ функция $\overset{*}{\omega}_k(z)$ будет допускать разложение

$$\overset{*}{\omega}_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\overset{*}{a}_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\quad |z-\alpha_k|<\eta. \tag{1.7}$$

Введем, наконец, в рассмотрение полиномы

$$\overset{*}{q}_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\overset{*}{a}_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu\quad(1\leqslant k<+\infty), \tag{1.8}$$

а также последовательность $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ регулярных и ограниченных в круге $D^+$ функций, положив*

$$\Omega_k^*(z) \equiv \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}\, q_k^*(z)}{(s_k-1)!\, \omega_k^*(z)} \equiv$$

$$\equiv \frac{B_*(z)\, q_k^*(z)}{(s_k-1)!\, (z-\alpha_k)^{p_k-s_k+2}} \ (1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.9}$$

Лемма 1.1. *Функции системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами*

$$\left[\frac{d^r\, \Omega_k^*(z)}{dz^r}\right]_{z=\alpha_\nu} = \begin{cases} 0, \text{ при } \alpha_\nu \neq \alpha_k;\ 0 \leqslant r \leqslant p_\nu \\ 1, \text{ при } \alpha_\nu = \alpha_k;\ r = s_k - 1 \\ 0, \text{ при } \alpha_\nu = \alpha_k;\ r \neq s_k - 1,\ 0 \leqslant r \leqslant p_k - 1 = p_\nu - 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Доказательство. Из разложения (1.7) функции $\omega_k^*(z)$, принимая во внимание определения (1.8) и (1.9) полинома $q_k^*(z)$ и функции $\Omega_k^*(z)$, получим для последней следующее представление:

$$\Omega_k^*(z) = \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} -$$

$$-\frac{B_*(z)}{z-\alpha_k}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k| < \eta, \tag{1.11}$$

где

$$b_\nu(\alpha_k) = a_\varkappa^*(\alpha_k),\ \varkappa = p_k - s_k + 1 + \nu,$$

причем, очевидно, что здесь множитель $(z-\alpha_k)^{-1} B_*(z)$ в точке $z = \alpha_k$ имеет нуль кратности $p_k$.

Следовательно, вторая и третья из формул (1.10) леммы непосредственно следуют из разложения (1.11) функции $\Omega_k^*(z)$. Что касается первой из формул (1.10), то она вытекает из самого определения (1.9) функции $\Omega_k^*(z)$, так как в каждой точке $z = \alpha_\nu \neq \alpha_k$ она совместно с функцией $B_*(z)$ имеет нуль кратности $p_\nu + 1$.

(в) Наряду с системой $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ с нашей последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ будем ассоциировать также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \ (1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.12}$$

Лемма 1.2. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \text{ и } \{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$$

---

* Все определенные здесь функции снабжены нами знаком ( *), поскольку они являются лишь несколько модифицированными (для наших целей) вариантами функций, впервые введенными нами в работе [8].

*биортогональны на единичной окружности в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} r_\nu(\zeta)\,\overline{\Omega_k^*(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\,\overline{r_\nu(\zeta)}\;|d\zeta| = \begin{cases}1, & k=\nu\\ 0, & k\neq\nu\end{cases}\quad (k;\ \nu=1, 2, \cdots). \tag{1.13}$$

Доказательство. Поскольку функция $\Omega_k^*(z)$ регулярна и ограничена в круге $D^+$, то она представима интегралом Коши через свои граничные значения

$$\Omega_k^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\Omega_k^*(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\,z}\,|d\zeta|,\ z\in D^+. \tag{1.14}$$

Заметив теперь, что

$$\frac{d^{s_\nu-1}}{dz^{s_\nu-1}}\left\{\frac{1}{1-\overline{\zeta}\,z}\right\}_{z=\alpha_\nu}=\overline{\left\{\frac{(s_\nu-1)!\,\zeta^{s_\nu-1}}{(1-\overline{z}\zeta)^{s_\nu}}\right\}_{z=\alpha_\nu}}=\overline{r_\nu(\zeta)}, \tag{1.15}$$

$(s_\nu-1)$-кратным дифференцированием интеграла (1.14) по параметру $z$ мы получим

$$\left[\frac{d^{s_\nu-1}\,\Omega_k^*(z)}{dz^{s_\nu-1}}\right]_{z=\alpha_\nu}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\,\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta|\quad (k;\ \nu=1, 2, \cdots). \tag{1.16}$$

Если $\nu=k$, то $\alpha_\nu=\alpha_k$, $s_\nu=s_k$, и в силу второй из формул (1.10) леммы 1.1 мы получим, что в этом случае интеграл (1.16) равен единице.

Если же $\nu\neq k$, то либо $\alpha_\nu=\alpha_k$, но тогда, очевидно, $s_\nu\neq s_k$, либо же $\alpha_\nu\neq\alpha_k$. В обоих этих случаях интегралы (1.16) равны нулю, в силу первой и третьей из формул (1.10).

Лемма 1.3. *Пусть* $\{\gamma_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<+\infty)$ — *произвольные комплексные числа. Тогда регулярная и ограниченная в круге* $|z|<1$ *функция*

$$S_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\Omega_k^*(z) \tag{1.17}$$

*удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:*

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=\gamma_\nu\,(1\leqslant\nu\leqslant m). \tag{1.18}$$

Доказательство. Функция $R_m(z)$ в круге $D^+$ представима интегралом Коши через свои граничные значения

$$S_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{S_m(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\,z}\,|d\zeta|,\ z\in D^+.$$

Отсюда, в силу (1.15), (1.17) и формул (1.13) биортогональности, получим

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} S_m(\zeta)\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta|=\gamma_\nu \quad (1\leqslant\nu\leqslant m).$$

1.2 (a) Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ будем относить к классу $\Delta$, если при некотором $\delta$ $(0<\delta<1)$ она обладает свойством

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta. \tag{1.19}$$

Отметим сначала же, что если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — из класса $\Delta$, то, в частности, она удовлетворяет также условию Бляшке (1.1), обеспечивающему существование определенных выше функций $B(z)$, $b(z)$ и $B_*(z)$.

Отметим также, что если все числа из $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$ отличны друг от друга, то условие (1.19) принимает вид

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta$$

и известно под названием свойства *равномерной разделимости* последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

Выше мы условились под $\{z_j\}_1^\infty$ понимать последовательность всех отличных друг от друга чисел из $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Поэтому свойство $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$—(1.19) можно записать также в виде

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^{q_j}\right\}\geqslant\delta, \tag{1.19'}$$

где $q_j$ $(1\leqslant q_j<+\infty)$ — кратность появления числа $z_j$ во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, причем, очевидно, что

$$\sup_{j\geqslant 1}\{p_j\}=\sup_{j\geqslant 1}\{q_j\}.$$

Заметим теперь, что если $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$, то из (1.19)—(1.19′) следует, что для $\{z_j\}_1^\infty$ мы будем иметь

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\right\}\geqslant\delta_*, \tag{1.20}$$

притом для значения $\delta_*=\delta$.

Это означает, что *если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то подавно* $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Но если предполагать, что

$$p = \sup_{j \geq 1} |p_j| = \sup_{j \geq 1} |q_j| < +\infty, \tag{1.21}$$

то справедливо и обратное утверждение.

В самом деле, тогда справедливы неравенства

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \right|^{q_j} > \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| \right)^p \quad (k=1, 2, \cdots),$$

откуда и следует, что свойство (1.20) равномерной разделенности $\{z_j\}_1^\infty$ повлечет за собой свойство (1.19)—(1.19′), т. е. свойство $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Поскольку равномерно разделимые последовательности $\{z_j\}_1^\infty$, как известно, существуют, то предыдущие замечания подтверждают, что по крайней мере при условии (1.21) класс $\Delta$ не пуст. Но более того, пользуясь известным примером равномерно разделенной последовательности (см. [1], стр. 289—290), легко можно убедиться в том, что класс $\Delta$ не пуст и в случае, когда $\sup_{j \geq 1} \{p_j\} = +\infty$.

Наконец, ради удобства дальнейшего изложения, приведем следующее определение: *последовательность комплексных чисел* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$ *отнесем к классу* $\Delta_p$, *если*

$$\sup_{j \geq 1} |p_j| = p < +\infty.$$

Следующая лемма является непосредственным перенесением известной леммы [3] на случай произвольных последовательностей $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Лемма 1.4. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то справедливы неравенства*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{(1 - |\alpha_j|^2)(1 - |\alpha_k|^2)}{|1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A_0(\delta) = 2 \log \frac{1}{\delta} \tag{1.22}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - |\alpha_j|^2)(1 - |\alpha_k|^2)}{|1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A_k(\delta) = p_k + 2 \log \frac{1}{\delta} \tag{1.23}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Доказательство. Обозначая

$$\varkappa_{jk} = \frac{(1 - |\alpha_j|^2)(1 - |\alpha_k|^2)}{|1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \quad (j;\ k=1, 2, \cdots),$$

заметим, что

$$\left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right|^2 = 1 - \varkappa_{jk} \quad (j;\ k = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда, и ввиду условия $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, следуют неравенства

$$\delta^2 \leqslant \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \left|\frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k}\right|^2 = \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} (1 - \varkappa_{jk}) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{- \sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \varkappa_{jk}\right\} \ (k = 1, 2, \cdots),$$

т. е. неравенства (1.22) леммы.

Далее, поскольку при данном $k \geqslant 1$ кратность появления числа $\alpha_k$ во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ равна $p_k < +\infty$ и при $\alpha_j = \alpha_k$, $\varkappa_{jk} = 1$, то

$$\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \varkappa_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{jk} - p_k \ (k = 1, 2, \cdots).$$

Поэтому неравенства (1.23) непосредственно следуют из (1.22).

Следствие. *Если $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta_p$, то справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - |\alpha_j|^2)(1 - |\alpha_k|^2)}{|1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A(\delta;\ p) = p + 2\log\frac{1}{\delta} \tag{1.23'}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

(б) Введем в рассмотрение последовательность функций

$$\Delta_k(z) = \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{1 - \bar{\alpha}_j z}{\alpha_j - z} \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} \ (1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.24}$$

заметив, что если пользоваться принятыми нами выше обозначениями, то они допускают также представление

$$\Delta_k(z) = \left[\frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right]^{p_k} B^{-1}(z) \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.24'}$$

Лемма 1.5. *Если $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, то справедливы неравенства*

$$(1 - |\alpha_k|^2)^s \, |\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)| \leqslant C_s(\delta), \tag{1.25}$$

$$(0 \leqslant s < +\infty,\ 1 \leqslant k < +\infty),$$

*где $C_s(\delta)$ — некоторые постоянные, не зависящие от $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Поскольку $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, то из самого определения (1.24) функций $\Delta_k(z)$ следуют неравенства

$$1 < |\Delta_k(\alpha_k)| \leqslant \delta^{-1} \ (1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.26}$$

т. е. неравенства (1.25) леммы для значения $s = 0$ и $C_0(\delta) = \delta^{-1}$.

Установим теперь справедливость неравенств (1.25) леммы для $s = 1$.

С этой целью заметим сначала, что взяв логарифмическую производную функции $\Delta_k(z)$, мы приходим к тождеству

$$\Delta_k'(z)=\Delta_k(z)\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left\{-\frac{\bar\alpha_j}{1-\bar\alpha_j z}+\frac{1}{\alpha_j-z}\right\}=$$

$$=\Delta_k(z)\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{(\alpha_j-z)(1-\bar\alpha_j z)}. \tag{1.27}$$

Отсюда, ввиду (1.26) получим неравенство

$$|\Delta_k'(\alpha_k)|\leqslant\delta^{-1}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{|\alpha_j-\alpha_k|\,|1-\bar\alpha_j\alpha_k|}.$$

Но из условия $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$ — (1.19), в частности, вытекают неравенства

$$\left|\frac{1-\bar\alpha_j\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}\right|\leqslant\delta^{-1}\quad(\alpha_j\neq\alpha_k), \tag{1.28}$$

пользуясь которыми будем иметь

$$|\Delta_k'(\alpha_k)|\leqslant\delta^{-2}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{|1-\bar\alpha_j\alpha_k|^2}.$$

Воспользовавшись далее неравенствами (1.22) леммы 1.4, получим

$$(1-|\alpha_k|^2)\,|\Delta_k'(\alpha_k)|<\delta^{-2}A_0(\delta)\quad(1\leqslant k<+\infty),$$

т. е. неравенства (1.25) леммы справедливы также для $s=1$, если положить $C_1(\delta)=\delta^{-2}A_0(\delta)$.

Проведем теперь рассуждение полной индукции.

Предположим, что неравенства (1.25) леммы справедливы для значений $0\leqslant s\leqslant\nu$

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)|\leqslant C_s(\delta)\quad(0\leqslant s\leqslant\nu;\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.25'}$$

установим их справедливость для значения $s=\nu+1$.

С этой целью заметим, что произведя $\nu$-кратное дифференцирование первого из тождеств (1.27), будем иметь

$$\Delta_k^{(\nu+1)}(z)=-\sum_{r=0}^{\nu}C_\nu^r\,\Delta_k^{(\nu-r)}(z)\,\psi_{k,r}(z), \tag{1.29}$$

где

$$\psi_{k,r}(z)=\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left\{\frac{\bar\alpha_j^{\,r+1}}{(1-\bar\alpha_j z)^{r+1}}+\frac{(-1)^r}{(z-\alpha_j)^{r+1}}\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{\omega_{r,j}(z)}{(1-\bar\alpha_j z)^{r+1}(z-\alpha_j)^{r+1}} \tag{1.30}$$

и

$$\omega_{r,j}(z)=\bar\alpha_j^{\,r+1}(z-\alpha_j)^{r+1}+(-1)^r(1-\bar\alpha_j z)^{r+1}. \tag{1.30'}$$

Но легко видеть, что $\omega_{r,j}(z)$ на самом деле является полиномом степени $r$, и поэтому она представима в виде суммы

$$\omega_{r,j}(z)=\sum_{\mu=0}^{r}\frac{\omega_{r,j}^{(\mu)}(\alpha_j)}{\mu!}(z-\alpha_j)^{\mu}\quad(0\leqslant r\leqslant\nu),\tag{1.31}$$

где

$$\omega_{r,j}^{(\mu)}(\alpha_j)=(-1)^{r-\mu}\frac{(r+1)!}{(r+1-\mu)!}\bar{\alpha}_j^{\mu}(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}\tag{1.32}$$

$$(0\leqslant\mu\leqslant r\leqslant\nu).$$

Из (1.30), (1.31) и (1.32), пользуясь также оценкой (1.28), получим

$$|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{r+1}|\alpha_k-\alpha_j|^{r+1-\mu}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}\,\delta^{\mu-r-1}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{2r+2-\mu}}.$$

Заметив далее, что при $0\leqslant\mu\leqslant r$

$$|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{2r-\mu}\geqslant 2^{-r}(1-|\alpha_k|^2)^r(1-|\alpha_j|)^{r-\mu},$$

$$(1-|\alpha_j|^2)^{r-\mu}\leqslant 2^{r-\mu}(1-|\alpha_j|)^{r-\mu},$$

мы приходим к неравенству

$$(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{-1}(4\delta^{-1})^r\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}(2^{-1}\delta)^{\mu}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^2}.$$

Следовательно, в силу неравенств (1.22) леммы 1.4 справедливы оценки

$$(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant D_r(\delta)\quad(1\leqslant k<+\infty),$$

где $D_r(\delta)$ — некоторые постоянные, не зависящие от $k\geqslant 1$.

Наконец, из (1.29) имеем при $1\leqslant k<+\infty$

$$(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+1}|\Delta_k^{(\nu+1)}(\alpha_k)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{\nu}C_\nu^r\{(1-|\alpha_k|^2)^{\nu-r}|\Delta_k^{(\nu-r)}(\alpha_k)|\}\{(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\},$$

откуда, в силу нашего предположения (1.25′), и предыдущей оценки заключаем, что неравенства (1.25) справедливы и для значения $s=\nu+1$. Таким образом, лемма полностью доказана.

(в) Докажем теперь еще две леммы в предположении, что

$$\sup_{j\geqslant 1}\{p_j\}=p<+\infty.$$

**Лемма 1.6.** *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, *то для коэффициентов разложения* (1.7)

$$\omega_k^*(z) = \frac{(z-\alpha_k)^{p_k+1}}{B_*(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^*(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu, \ |z-\alpha_k| < \eta$$

*справедливы неравенства*

$$|a_\nu^*(\alpha_k)| \leqslant a(\delta;\ p)(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-\nu} \tag{1.33}$$

$$(0 \leqslant \nu \leqslant p_k+1,\ 1 \leqslant k < +\infty),$$

*где* $a(\delta;\ p)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* $\nu$ *и* $k$.

Доказательство. Наряду с функциями $\Delta_k(z)$ $(1 \leqslant k < +\infty)$, которые были определены нами по (1.24), введем в рассмотрение также функции

$$\psi_k(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ z_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{1-\bar z_j z}{z_j - z}\,\frac{z_j}{|z_j|} \ (1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.34}$$

где, как уже отмечалось, $\{z_j\}_1^\infty$ — все отличные друг от друга числа из $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Поскольку очевидно, что $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$ и при данном $k \geqslant 1$, $\alpha_k = z_{j_k}$, то согласно лемме 1.5 справедливы неравенства

$$(1-|z_{j_k}|^2)^s\,|\psi_k^{(s)}(z_{j_k})| \leqslant C_s(\delta)\ (0 \leqslant s < +\infty,\ 1 \leqslant k < +\infty)$$

или, что то же самое, неравенства

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\psi_k^{(s)}(\alpha_k)| \leqslant C_s(\delta)\ (0 \leqslant s < +\infty,\ 1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.35}$$

где $C_s(\delta)$ не зависят от $k$.

Следовательно, положив

$$\Phi_k(z) = \Delta_k(z)\,\psi_k(z)\ (1 \leqslant k < +\infty),$$

из тождеств

$$\Phi_k^{(s)}(z) = \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu\,\psi_k^{(\nu)}(z)\,\Delta_k^{(s-\nu)}(z)\ (s=0, 1, 2, \cdots)$$

на основании оценок (1.25) и (1.35) заключаем, что справедливы также неравенства

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\Phi_k^{(s)}(\alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \cdot C_\nu(\delta)\,C_{s-\nu}(\delta) = E_s(\delta)\ (0 \leqslant s < +\infty,\ 1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.36}$$

Далее, принимая во внимание определения (1.24) и (1.34) функций $\Delta_k(z)$ и $\psi_k(z)$, а также определения (1.3) и (1.4) функций $B(z)$, $b(z)$ и $B_*(z)$, приходим к тождеству

$$\left|\frac{1-\bar\alpha_k z}{\alpha_k - z}\,\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right|^{p_k+1} \Phi_k(z) = B_*^{-1}(z),$$

откуда в силу (1.5) вытекает, что

$$\omega_k^*(z) = \left(\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right)^{p_k+1} (1-\bar{\alpha}_k z)^{p_k+1}\, \Phi_k(z)$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Отсюда следует, что для любого $\nu$ $(0 \leqslant \nu < +\infty)$

$$\omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k) =$$

$$= \left(\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right)^{p_k+1} \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \frac{(p_k+1)!}{(p_k+1-s)!} (-\bar{\alpha}_k)^s (1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-s}\, \Phi_k^{(\nu-s)}(\alpha_k),$$

и так как $\sup\limits_{k\geqslant 1} |p_k| = p < +\infty$, то в силу (1.36) мы приходим к оценкам

$$(1-|\alpha_k|^2)^{\nu-p_k-1}\, |\omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \frac{(p+1)!}{(p+1-s)!} E_{\nu-s}(\delta) = a(\delta;\, p)$$

$$(0 \leqslant \nu \leqslant p_k+1,\ 1 \leqslant k < +\infty).$$

Наконец, поскольку

$$a_\nu^*(\alpha_k) = \frac{1}{\nu!}\, \omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k),$$

то неравенства (1.33) леммы установлены.

Введем в рассмотрение интегралы

$$U_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \Omega_n^*(\zeta)\, \overline{\Omega_m^*(\zeta)}\, \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1.37}$$

$$(n;\ m = 1, 2, \cdots),$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 1.7. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, *то справедливы оценки*

$$|U_{nm}| \leqslant C(\delta,\ p) \cdot \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{s_n+1/2}\, (1-|\alpha_m|^2)^{s_m+1/2}}{|1-\bar{\alpha}_m \alpha_n|^2} \tag{1.38}$$

$$(n;\ m = 1, 2, \cdots),$$

*где* $C(\delta,\ p)$ — *постоянная, не зависящая от* $n$ *и* $m$.

Доказательство. Пользуясь определением (1.8)—(1.9) системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ и обозначив при $r;\ s = 0, 1, 2, \cdots$

$$I_{nm}(r;\ s) = \frac{1}{(s_n-1)!\,(s_m-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^s}{(\zeta-\alpha_n)^{r+1}(1-\bar{\alpha}_m\zeta)^{s+1}}\, d\zeta, \tag{1.39}$$

для интегралов $U_{nm}$ мы получим следующее представление:

$$U_{nm}=\sum_{\nu_1=0}^{p_n-s_n}\sum_{\nu_2=0}^{p_m-s_m} a^{*}_{\nu_1}(\alpha_n)\,\overline{a^{*}_{\nu_2}(\alpha_m)}\, I_{nm}(p_n-s_n-\nu_1+1;\ p_m-s_m-\nu_2+1). \tag{1.40}$$

Заметим теперь, что вообще

$$I_{nm}(r,\ s)=\overline{I_{nm}(s,\ r)},$$

а при $0\leqslant r\leqslant s$

$$I_{nm}(r;\ s)=$$

$$=\frac{(1-\bar{\alpha}_m\alpha_n)^{-r-s-1}}{(s_n-1)!\ (s_m-1)!}\sum_{j=0}^{r}\frac{(s+r-j)!}{j!\ (r-j)!\ (s-j)!}\alpha_n^{s-j}\,\bar{\alpha}_m^{r-j}\,(1-\bar{\alpha}_m\alpha_n)^j.$$

Поэтому справедливы оценки вида

$$|I_{nm}(r;\ s)|\leqslant\frac{A(r,\ s)}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{r+s+1}}\quad(m,\ n=1,\ 2,\cdots), \tag{1.41}$$

где $A(r,\ s)$ зависят только от $r\,(0\leqslant r<+\infty)$ и $s\,(0\leqslant s<+\infty)$. Но поскольку $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{p_k\}=p<+\infty$, то очевидно, что

$$\sup_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant p_k-s_k\\ k\geqslant 1}}\{p_k-s_k-\nu+1\}=p$$

и, следовательно, из (1.41) вытекают также неравенства вида

$$|I_{nm}(p_n-s_n-\nu_1+1;\ p_m-s_m-\nu_2+1)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_p}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}}\quad(n;\ m=1,\ 2,\cdots;\ 0\leqslant\nu_1\leqslant p_n-s_n;\ 0\leqslant\nu_2\leqslant p_m-s_m), \tag{1.42}$$

где

$$\varkappa=p_n+p_m-s_n-s_m-\nu_1-\nu_2+3, \tag{1.42'}$$

а $A_p$ — некоторая постоянная, не зависящая от $n$, $m$, $\nu_1$ и $\nu_2$.

Далее, пользуясь оценками (1.33) леммы 1.6, из (1.40) и (1.42)—(1.42′) приходим к неравенствам

$$|U_{nm}|<A_p\,a^2(\delta;\ p)\sum_{\nu_1=0}^{p_n-s_n}\sum_{\nu_2=0}^{p_m-s_m}\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{p_n+1-\nu_1}(1-|\alpha_m|^2)^{p_m+1-\nu_2}}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}}. \tag{1.43}$$

Однако, ввиду (1,42′)

$$|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}\geqslant|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^2\,(1-|\alpha_n|)^{p_n-s_n+1/2-\nu_1}\,(1-|\alpha_m|)^{p_m-s_m+1/2-\nu_2}$$

и легко видеть также, что

$$(1-|\alpha_n|^2)^{p_n+1-\nu_1}\leqslant 2^{p_n+1}(1-|\alpha_n|)^{p_n+1-\nu_1}$$

$$(1-|\alpha_m|^2)^{p_m+1-\nu_2}\leqslant 2^{p_m+1}(1-|\alpha_m|)^{p_m+1-\nu_2}.$$

Поэтому, заметив, что $\sup_{k\geq 1}|p_k| = p < +\infty$, из (1.43) мы получим

$$|U_{nm}| \leqslant C(\delta, p)\frac{(1-|\alpha_n|)^{s_n+1/2}(1-|\alpha_m|)^{s_m+1/2}}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^2},$$

$$(n;\ m=1, 2, \cdots),$$

где $C(\delta, p) = p^2 2^{4(p+1)} A_p a^2(\delta; p)$. Отсюда и следуют неравенства (1.38) леммы.

Лемма 1.8. *Если $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, то справедливы неравенства*

$$|\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k)| \leqslant \frac{C_p(\delta)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-s_k+1}} \tag{1.44}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty),$$

*где $C_p(\delta)$ — постоянная, не зависящая от $k$.*

Доказательство. Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k) = \frac{p_k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\Omega_k^*(\zeta)}{(\zeta-\alpha_k)^{p_k+1}}\,d\zeta$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Пользуясь представлением (1.8)—(1.9) функции $\Omega_k^*(z)$, отсюда получим

$$|\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k)| \leqslant \frac{p_k!}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|a_\nu^*(\alpha_k)|\, J_{k,\nu}, \tag{1.45}$$

где

$$J_{k,\nu} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\alpha_k|^{p_k-s_k-\nu+2}|1-\bar{\alpha}_k\zeta|^{p_k+1}}.$$

Заметим теперь, что согласно неравенствам (1.33) леммы 1.6 имеем

$$|a_\nu^*(\alpha_k)| \leqslant a(\delta;\ p)\ (1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-\nu}\quad (0 \leqslant \nu \leqslant p_k - s_k)$$

и легко видеть также, что

$$J_{k,\nu} \leqslant (1-|\alpha_k|)^{-2p_k+s_k+\nu-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar{\alpha}_k\zeta|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2p_k-s_k-\nu+1}(1-|\alpha_k|^2)^{-2p_k+s_k+\nu-2}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty,\ 0 \leqslant \nu \leqslant p_k - s_k).$$

Поскольку $\sup_{k\geq 1}|p_k| = p < +\infty$, то из этих неравенств и (1.45), при подходящем выборе постоянной $C_p(\delta)$, следует утверждение (1.44) леммы.

(г) Напомним, что по определению, аналитическая в единичном круге $D^+$ функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1.46}$$

принадлежит классу $H_2$ Харди, если

$$\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi\right\}^{1/2}\equiv\|f\|<+\infty.$$

При этом предел

$$f(e^{i\varphi})=\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\varphi})$$

существует почти для всех $\varphi\in[0, 2\pi]$ и имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\|f\|^2<+\infty. \tag{1.47}$$

Докажем следующую лемму о порядке роста производных функций из $H_2$.

Лемма 1.9*. *Если $f(z)\in H_2$, то при любом целом $r\geqslant 0$*

$$\lim_{|z|\to 1-0}\{(1-|z|^2)^{r+1/2}\,|f^{(r)}(z)|\}=0. \tag{1.48}$$

Доказательство. Из (1.47) следует, что для любого $\varepsilon>0$ и $r\geqslant 0$ можно указать такое целое $N=N(\varepsilon;\ r)\geqslant 1+r$, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|^2<\varepsilon^2. \tag{1.49}$$

С другой стороны, $r$-кратным дифференцированием ряда (1.46) (если $r\geqslant 1$) мы получим разложение

$$f^{(r)}(z)=\sum_{k=r}^{\infty} a_k\,\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-r)}\,z^{k-r},\ z\in D^+.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца и (1.49) приходим к оценке

$$|f^{(r)}(z)|\leqslant\left|\sum_{k=r}^{N} a_k\,\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-r)}\,z^{k-r}\right|+$$

$$+\varepsilon\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma^2(1+k)}\,|z|^{2k}\right\}^{1/2},\ z\in D^+. \tag{1.50}$$

Воспользовавшись далее формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,e^{-x}\,e^{\frac{\theta_x}{12x}}\quad(x>0,\ 0<\theta_x<1)$$

---

* Частный случай этой леммы для класса $H_2$, когда $r=0$, отмечался ранее (см. [2], стр. 86).

нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+2r+k)} < e^{3+2r} \quad (r \geqslant 0).$$

Кроме того, легко проверить, что

$$\Gamma^2(1+r) \leqslant \Gamma(1+2r),$$

и потому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma^2(1+k)} |z|^{2k} < e^{3+2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2r+k)}{\Gamma(1+k)} |z|^{2k} =$$
$$= e^{3+2r}\,\Gamma(1+r)(1-|z|^2)^{-1-2r} \quad (|z|<1). \tag{1.51}$$

Наконец, из (1.50) и (1.51), в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует справедливость (1.48).

## § 2. Основные теоремы

2.1 (а) Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность, и, как всегда, пусть для любого $k \geqslant 1$ $s_k \geqslant 1$ означает кратность появления числа $\alpha_k$ на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$ нашей последовательности.

Полагая, что $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — любая другая последовательность комплексных чисел, нашей ближайшей задачей будет получение условий, *достаточных* для существования, а также для эффективного построения функций $f(z) \in H_2$, подчиненных интерполяционным данным вида

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \quad (1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.1}$$

В связи с этим отметим, что если $\sup\limits_{j\geqslant 1} \{s_j\} < +\infty$ и $|\alpha_j| \to 1$, то из леммы 1.9 непосредственно будет следовать, что для разрешимости задачи (2.1) по *крайней мере необходимо* выполнение условия

$$\lim_{j\to+\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\,|\gamma_j| = 0. \tag{2.2}$$

Для формулировки и доказательства соответствующей теоремы, кроме принятых нами в § 1 обозначений и определений, введем еще и следующие.

Пусть $l^2$ — счетномерное гильбертово пространство, элементами которого, как известно, являются всевозможные последовательности комплексных чисел $w \equiv \{w_j\}_1^\infty$ с нормой

$$\|w\| = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |w_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{2.3}$$

Наряду с этим введем также пространство $l^2\{\alpha_j\}$, элементами которого являются произвольные последовательности комплексных чисел $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$, для которых

$$\|\gamma_\alpha\| \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} \, |\gamma_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{2.4}$$

Таким образом, если последовательности $w = \{w_j\}_1^\infty$ и $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ таковы, что

$$w_j = (1-|\alpha_j|^2)^{s_j - 1/2} \; \gamma_j \; (1 \leqslant j < +\infty), \tag{2.5}$$

то утверждения $w \in l^2$ и $\gamma \in l^2 \{\alpha_j\}$ просто равносильны.

(б) Следующая теорема, к доказательству которой мы приступаем, содержит достаточное условие разрешимости поставленной выше задачи (2.1) при наложении на последовательность $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ более сильного чем (2.2) ограничения — $\gamma \in l^2 \{\alpha_j\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ *— произвольный элемент из* $l^2 \{\alpha_j\}$. *Тогда условие*

$$\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p \tag{2.6}$$

*достаточно для справедливости следующих утверждений:*

2°. *Существует функция* $f_0(z) \in H_2$, *являющаяся решением интерполяционной задачи* (2.1), *для которой*

$$\|f_0\| \leqslant C \, \|\gamma_\alpha\|, \tag{2.7}$$

*где* $C$ *— постоянная, зависящая лишь от чисел* $p$ *и* $\delta$, *участвующих в определении класса* $\Delta_p$.

2°. *Функция* $f_0(z)$ *представима в качестве суммы ряда*

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \, \Omega_j^*(z), \tag{2.8}$$

*сходящегося равномерно внутри круга* $D^+$ *и в метрике* $H_2$ *на его границе.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (2.8)

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \, \Omega_j^*(z) \;\; (1 \leqslant n < +\infty), \tag{2.9}$$

заметив, что согласно лемме 1.3 она удовлетворяет интерполяционным условиям

$$S_n^{(s_\nu - 1)}(a_\nu) = \gamma_\nu \;\; (1 \leqslant \nu \leqslant n). \tag{2.1'}$$

Если положить еще $S_0(z) \equiv 0$, то из (2.9) будем иметь

$$d(n; q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_{n+q}(e^{i\vartheta}) - S_n(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta =$$

$$= \sum_{j,k=n+1}^{n+q} U_{jk} \, \gamma_j \overline{\gamma}_k \;\; (0 \leqslant n < +\infty, \; 1 \leqslant q < +\infty), \tag{2.10}$$

где

$$U_{jk}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Omega_j^*(e^{i\vartheta})\overline{\Omega_k^*(e^{i\vartheta})}\,d\vartheta$$

$$(1\leqslant j,\ k<+\infty)$$

и, очевидно, что $U_{kj}=\overline{U}_{jk}$.

Следующее известное утверждение легко вытекает из неравенства Шварца.

*Если матрица комплексных чисел* $\{a_{jk}\}$ $(1\leqslant j,\ k\leqslant N)$ *такова, что* $a_{kj}=\overline{a}_{jk}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{N}|a_{jk}|\leqslant M\ (1\leqslant k\leqslant N),$$

*то для произвольных комплексных чисел* $\{x_j\}_1^N$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{j,\ k=1}^{N}a_{jk}\,x_j\,\overline{x}_k\right|\leqslant M\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2. \qquad (2.11)$$

Обозначая

$$x_j=(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\gamma_j\ (1\leqslant j<+\infty),$$

$$a_{jk}=(1-|\alpha_j|^2)^{1/2-s_j}\,(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}\,U_{jk},$$

$$(1\leqslant j,\ k<+\infty),$$

формулу (2.10) можем записать в виде

$$d\,(n;\ q)=\sum_{j,\ k=n+1}^{n+q}a_{jk}\,x_j\,\overline{x}_k\,. \qquad (2.10')$$

Далее, так как согласно условию (2.6) теоремы $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$, то принимая во внимание лемму 1.7 и следствие леммы 1.4 будем иметь

$$\sum_{j=n+1}^{n+q}|a_{jk}|\leqslant C\,(\delta,\ p)\sum_{j=n+1}^{n+q}\frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\overline{\alpha}_j\,\alpha_k|^2}\leqslant$$

$$\leqslant M\,(\delta,\ p)\,(1\leqslant k,\ q<+\infty,\ 0\leqslant n<+\infty),$$

где $M\,(\delta,\ p)=C\,(\delta,\ p)\left(p+2\log\frac{1}{\delta}\right)$.

Поэтому, применив оценку (2.11) к сумме (2.10′), мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_{n+q}(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant M(\delta, p) \sum_{j=n+1}^{n+q} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} |\gamma_j|^2 \qquad (2.12)$$

для всех $0 \leqslant n < +\infty$ и $1 \leqslant q < +\infty$.

Но согласно условию $\{\gamma_j\}_1^\infty \in l^2\{\alpha_j\}$ теоремы ряд (2.4) сходящийся. Следовательно, из (2.12), во-первых, следует, что последовательность функций $\{S_n(e^{i\theta})\}_1^\infty$ сходится в себе по метрике $L_2(0,2\pi)$, и следовательно, имеет предельную функцию $S(e^{i\theta}) \in L_2(0,2\pi)$.

Более того, если в неравенстве (2.12) при фиксированном $n$ ($0 \leqslant n < +\infty$) перейти к пределу при $q \to +\infty$, то мы придем к следующим оценкам для разности $S(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})$ и $S(e^{i\theta})$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant M(\delta, p) \sum_{j=n+1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} |\gamma_j|^2 \qquad (2.13)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant M(\delta, p)\, \|\gamma_\alpha\|^2. \qquad (2.14)$$

Но функции $S_n(z)$ $(n \geqslant 1)$ регулярны и ограничены в круге $|z| < 1$, и поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} S_n(z), & \text{при } z \in D^+ \\ 0, & \text{при } z \overline{\in} \overline{D}^+. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Отсюда и из (2.13) переходом к пределу при $n \to +\infty$ мы заключаем следующее:

Ряд

$$f_0(z) = \lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j\, \Omega_j^*(z)$$

равномерно сходится в круге $D^+$ и его сумма в силу (2.1′) удовлетворяет интерполяционным условиям (2.1), т. е.

$$f_0^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu) = \gamma_\nu \quad (1 \leqslant \nu < +\infty).$$

Функция $f_0(z)$ представима интегралом Коши, поскольку после предельного перехода при $n \to +\infty$ наши формулы (2.15) принимают вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f_0(z), & \text{при } z \in D^+ \\ 0, & \text{при } z \overline{\in} \overline{D}^+. \end{cases} \qquad (2.15')$$

Это значит, что почти всюду на $|\zeta| = 1$ существуют граничные значения

$$f_0(\zeta) = \lim_{\rho\to1-0} f_0(\rho\zeta),$$

равные $S(\zeta)$.

Наконец, так как таким образом, $f_0(e^{i\vartheta}) = S(e^{i\vartheta}) \in L_2(0, +\infty)$, то очевидно, имеем также $f_0(z) \in H_2$. Поэтому, и в силу (2.14) справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_0(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta = \|f_0\|^2 \leqslant M(\delta, p)\,\|\gamma_2\|.$$

Итак, оба утверждения теоремы совместно и полностью доказаны.

В заключение отметим, что результат, эквивалентный лишь утверждению 1° этой теоремы существенно иным методом, не позволяющим, однако, построения решения $f_0(z) \in H_2$ интерполяционной задачи с кратными узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, был установлен ранее (см. [6], теорему 3.2).

(в) В работе Шапиро и Шилдса ([3], [1], [2]), посвященной полному решению интерполяционной задачи в классах $H_\delta\ (1 \leqslant \delta < +\infty)$, но с простыми узлами $\{z_j\}_1^\infty$, т. е. задачи

$$f(z_j) = \gamma_j \quad (1 \leqslant j < +\infty), \quad f(z) \in H_\delta,$$

в частности, был установлен следующий результат, формулировку которого мы приведем здесь, поскольку он существенно понадобится нам ниже.

*Если последовательность* $\{z_j\}_1^\infty\ (0 \leqslant |z_j| < 1)$ *отличных друг от друга чисел равномерно разделена, т. е., если* $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то для любой функции* $f(z) \in H_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)\,|f(z_j)|^2 \leqslant C_1 \|f\|^2, \tag{2.16}$$

*где* $C_1$ *не зависит от* $f$.

Существенно опираясь на этот результат и на теорему 1, докажем сначала следующую общую теорему.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{z_j\}_1^\infty$ *различных точек круга* $|z| < 1$ *равномерно разделена, т. е.* $\{z_j\} \in \Delta$. *Тогда для любой функции* $f(z) \in H_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)^{2r-1}\,|f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant C_r \|f\|^2 \tag{2.17}$$

$$(1 \leqslant r < +\infty),$$

*где* $C_r$ *не зависит от* $f$.

Доказательство. Согласно (2.16) утверждение (2.17) верно для $r = 1$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно провести рассуждение полной индукции. С этой целью, предполагая справедливость неравенств вида

$$L_r[f] \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)^{2r-1} |f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant C_r \|f\|^2 \tag{2.18}$$

$$(1 \leqslant r \leqslant p),$$

докажем, что для суммы ряда $L_r[f]$ аналогичное неравенство справедливо также для значения $r=p+1$.

С этой целью построим новую последовательность чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, положив

$$\alpha_{p(j-1)+r}=z_j \quad (1\leqslant j<+\infty,\ 1\leqslant r\leqslant p), \tag{2.19}$$

заметив, что, очевидно

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)=p\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)<+\infty.$$

Легко видеть, что для определенной таким образом последовательности $\{\varepsilon_j\}_1^\infty$ будем иметь

$$p_j=p\ (1\leqslant j<+\infty) \text{ и } s_{p(j-1)+r}=s_r=r \quad (1\leqslant r\leqslant p,\ 1\leqslant j<+\infty). \tag{2.20}$$

Кроме того, поскольку $\{z_j\}_1^\infty\in\Delta$, то имеем также

$$\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^p\geqslant\delta^p \ (k=1,2,\cdots),$$

т. е. $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$.

Покажем теперь, что совокупность условий (2.18) эквивалентна одному условию

$$L[f]\equiv\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}\,|f^{(s_j-1)}(\alpha_j)|^2\leqslant C_p^*\|f\|^2, \tag{2.18'}$$

где $C_p^*$ не зависит от $f$.

В самом деле, из (2.19), (2.20) и (2.18) мы имеем

$$L[f]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p}(1-|\alpha_{p(j-1)+r}|^2)^{2s_{p(j-1)+r}-1}\,|f^{(s_{p(j-1)+r}-1)}(\alpha_{p(j-1)+r})|^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p}(1-|z_j|^2)^{2r-1}|f^{(r-1)}(z_j)|^2=\sum_{r=1}^{p}L_r^*(f)<+\infty.$$

Но ввиду $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$ и (2.18′), согласно теореме 1 следует существование функции $F(z)\in H_2$, подчиненной интерполяционным условиям

$$F^{(s_k-1)}(\alpha_k)=f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ (1\leqslant k<+\infty), \tag{2.21}$$

а также неравенству вида

$$\|F\|^2\leqslant C\|f\|^2 \tag{2.21'}$$

и представимой в виде суммы ряда

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ \Omega_k^*(z), \tag{2.22}$$

сходящегося равномерно в круге $D^+$ и в среднем на его границе $|z|=1$.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$\omega(z)=f(z)-F(z), \tag{2.23}$$

заметив, что $\omega(z) \in H_2$, и кроме того, что в силу (2.21), (2.18′) и (2.21′) она удовлетворяет условиям

$$\omega^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0 \ (1\leqslant k<+\infty), \quad \|\omega\|\leqslant C^*\|f\|. \tag{2.24}$$

С другой стороны, заметим далее, что по построению (2.19) последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, для любого $k>1$ точки $z=\alpha_k$ появляются в ней с одинаковой кратностью $p_k=p$ $(k\geqslant 1)$. Поэтому, ассоциированная с $\{\alpha_j\}_1^\infty$ функция Бляшке $B(z)$ в рассматриваемом случае допускает представление

$$B(z)=\left\{\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}^p \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \tag{2.25}$$

и, таким образом, удовлетворяет условиям

$$B^{(r-1)}(\alpha_k)=0 \ (1\leqslant r\leqslant p,\ 1\leqslant k<+\infty),$$
$$B^{(p)}(\alpha_k)\neq 0 \ (1\leqslant k<+\infty). \tag{2.26}$$

Но в силу (2.20) легко видеть, что условия (2.26) могут быть записаны также в виде

$$B^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0 \ (1\leqslant k<+\infty), \quad B^{(p)}(\alpha_k)\neq 0 \quad (1\leqslant k<+\infty). \tag{2.26′}$$

Из (2.24) и (2.26′) вытекает, что функция

$$g(z)=\omega(z)/B(z), \quad \|g\|=\|\omega\|\leqslant C^*\|f\| \tag{2.24″}$$

регулярна в круге $D^+$, и поскольку $\omega(z)\in H_2$, то имеем также $g(z)\in H_2$. Из (2.23) следует далее, что наша функция $f(z)\in H_2$ допускает представление вида

$$f(z)=F(z)+B(z)\,g(z), \quad z\in D^+, \tag{2.27}$$

где $g(z)\in H_2$.

Отметим теперь, что по интегральной формуле Коши

$$B^{(p)}(\alpha_j)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{B(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)^{p+1}}\,d\zeta \quad (1\leqslant j<+\infty).$$

Отсюда, в силу (2.25) и формулы Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar{\alpha}_j\zeta|^2}=(1-|\alpha_j|^2)^{-1},$$

мы получим оценку

$$|B^{(p)}(\alpha_j)|\leqslant\frac{p!}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar{\alpha}_j\zeta|^p\,|\zeta-\alpha_j|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{p!}{(1-|\alpha_j|)^{p-1}}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar{\alpha}_j\zeta|^2}\leqslant\frac{2^{p-1}\,p!}{(1-|\alpha_j|^2)^p} \quad (1\leqslant j<+\infty). \tag{2.28}$$

Далее из условий (2.26′), очевидно, следует. что

$$\omega^{(p)}(\alpha_j)=B^{(p)}(\alpha_j)\,g(\alpha_j)\quad(1\leqslant j<+\infty),$$

откуда и из (2.28) вытекает неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2p+1}|\omega^{(p)}(\alpha_j)|^2\leqslant 2^{p-1}\,p!\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)\,|g(\alpha_j)|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\,p\cdot p!\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\,|g(z_j)|^2\leqslant 2^{p-1}\,p\cdot p!\;C_1\|g\|^2\leqslant C_p^{**}\|f\|^2, \tag{2.29}$$

если учесть, что по построению (2.19), последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ есть $p$-кратное расширение $\{z_j\}_1^\infty$, а также неравенства (2.16) и (2.24″).

Заметим далее, что в силу первого из свойств (1.10) функций $\Omega_k^*(z)$, установленного в лемме 1.1, если при данном $j\geqslant 1, \alpha_j\neq\alpha_k$, то для функции $\Omega_k^*(z)$ точка $z=\alpha_j$ является нулем кратности $p_j=p+1$, иначе говоря

$$\Omega_k^{*(p)}(\alpha_j)=0,\ \text{при}\ \alpha_k\neq\alpha_j \tag{2.30}$$

$$(1\leqslant k,\ j<+\infty).$$

Поэтому, пользуясь свойством (2.30), $p$-кратным дифференцированием разложения (2.22) получим

$$F^{(p)}(\alpha_j)=\sum_{\{\alpha_k\}=\alpha_j}f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k^{*(p)}(\alpha_j) \tag{2.31}$$

$$(1\leqslant j<+\infty),$$

причем, очевидно, что сумма, стоящая справа, содержит точно $p$ слагаемых. Но ввиду способа (2.19) построения $\{\alpha_j\}_1^\infty$, легко видеть, что при данном $j\geqslant 1$ для совокупности чисел $\{\alpha_k\}=\alpha_j$ мы имеем $p(j-1)+1\leqslant k\leqslant pj$. Отсюда следует, что формулу (2.31) можно записать также в виде

$$F^{(p)}(\alpha_j)=\sum_{k=p(j-1)+1}^{pj}f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k^{*(p)}(\alpha_k) \tag{2.31′}$$

$$(1\leqslant j<+\infty).$$

С другой стороны, поскольку в рассматриваемом нами случае $p_k=p$ $(k\geqslant 1)$, то согласно оценке (1.44) леммы 1.8 будем иметь

$$|\Omega_k^{*(p)}(\alpha_k)|\leqslant\frac{C_p(\delta)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p-s_k+1}}$$

$$(1\leqslant k<+\infty),$$

где $C_p(\delta)$ не зависит от $k$.

Отсюда и из (2.31′) следуют неравенства

$$|F^{(p)}(\alpha_j)| \leqslant C_p(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{s_k-p-1} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|$$

$$(1 \leqslant j < +\infty)$$

или, так как $\alpha_k = \alpha_j$ при $p(j-1)+1 \leqslant k \leqslant pj$, то и неравенства

$$(1-|\alpha_j|^2)^{p+1/2} |F^{(p)}(\alpha_j)| \leqslant$$

$$\leqslant C_p(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/2} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)| \tag{2.32}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

Применением неравенства Шварца и (2.32) получим далее

$$(1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} |F^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p^*(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2,$$

$$(1 \leqslant j < +\infty),$$

где $C_p^*(\delta) = p\ C_p(\delta)$. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} |F^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p^*(\delta) \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2 \leqslant C_p^*(\delta)\, C_p^* \|f\|^2 \tag{2.33}$$

ввиду (2.18′).

Наконец, обращаясь к представлению (2.17) функции $f(z)$, в силу (2.29) и (2.33) мы заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|^2)^{2p+1} |f^{(p)}(z_j)|^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} |f^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant C_p \|f\|^2,$$

так как, очевидно, что

$$|f^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant 2\,\{|F^{(p)}(\alpha_j)|^2 + |\omega^{(p)}(\alpha_j)|^2\}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

Итак, из оценок (2.18) величин $L_r(f)\,(1 \leqslant r \leqslant p)$ вытекает такая же оценка для величины $L_{p+1}(f)$. Этим завершается доказательство теоремы.

Отметим, что в существенно менее обозримой формулировке утверждение, эквивалентное теореме 2, было установлено ранее иным способом (см. [5] и [6]), с привлечением уже отмеченных выше общих результатов Н. К. Бари и Шура.

2.2 (a) Ниже мы предположим, что последовательность чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ удовлетворяет лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2) < +\infty, \tag{2.34}$$

обеспечивающему существование функции Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z} \, \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}.$$

При этом, поскольку при любом $j$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ для $B(z) \not\equiv 0$ точка $z=\alpha_j$ является нулем конечной кратности $p_j \geqslant s_j$, то очевидно, что

$$B^{(s_j-1)}(\alpha_j) = 0 \ (1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.35}$$

Вспомнив определение (1.12) системы рациональных функций $\{r_j(z)\}_1^\infty$

$$r_j(z) = \frac{(s_j-1)!\, z^{s_j-1}}{(1-\bar{\alpha}_j z)^{s_j}} \ (1 \leqslant j < +\infty),$$

заметим, что для любой функции $f(z) \in H_2$

$$(f, r_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{r_j(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \frac{(s_j-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)^{s_j}}\, d\zeta = f^{(s_j-1)}(\alpha_j) \ (1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.36}$$

Из (2.36) и (2.35), в частности, имеем

$$(B, r_j) = 0 \ (1 \leqslant j < +\infty),$$

в то время как почти везде на $|\zeta|=1$ $|B(\zeta)|=1$. Это означает, что при условии (2.34) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в $H_2$.

Обозначим через $\lambda_2\{\alpha_k\}$ подкласс функций $\Phi(z)$ из $H_2$, для которых

$$\inf_{\{\sigma_n\} \in R} \int\limits_{|\zeta|=1} |\Phi(\zeta) - \sigma_n(\zeta)|^2 \, |d\zeta| = 0, \tag{2.37}$$

где $R$ — множество всевозможных сумм вида

$$\sigma_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} r_j(z) \in H_2 \ (1 \leqslant n < +\infty), \tag{2.38}$$

а $\{c_j^{(n)}\}_1^n$ — произвольные постоянные. Поскольку система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в $H_2$, то имеет место строгое включение $\lambda_2\{\alpha_k\}\subset H_2$.

Обозначим далее через $N_2\{\alpha_j\}$ подкласс функций $\psi(z)$ из $H_2$, удовлетворяющих условиям

$$\psi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0 \quad (1\leqslant j<+\infty). \tag{2.39}$$

Легко видеть, что класс $N_2\{\alpha_j\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$\psi(z)=B(z)\,G(z), \tag{2.40}$$

где $G(z)\in H_2$ произвольна.

В самом деле, $(s_j-1)$-кратным дифференцированием функций вида (2.40), в силу (2.35), мы заключаем, что они, будучи из класса $H_2$, удовлетворяют условиям (2.39). Обратно, если $\psi(z)\in N_2\{\alpha_k\}$, то из (2.39) и (2.35) следует, что $G(z)\equiv\psi(z)/B(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и принадлежит классу $H_2$.

Введенные нами классы $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$, очевидно, являются линейными подпространствами $H_2$. Покажем, что эти подпространства ортогональны, т. е. что для произвольной пары функций

$$\Phi(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\} \text{ и } \psi(z)\in N_2\{\alpha_j\}$$

$$(\Phi,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Phi(\zeta)\,\overline{\psi(\zeta)}\,|d\zeta|=0. \tag{2.41}$$

Действительно, в силу формулы (2.36)

$$(\psi, r_j)=\psi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0 \quad (1\leqslant j<+\infty),$$

и поэтому имеем также

$$(\psi,\sigma_n)=0 \tag{2.41'}$$

для любой суммы $\sigma_n$ вида (2.36).

Если $\{\sigma_n(z)\}_1^\infty$ выбрана так, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi-\sigma_n\|=0,$$

то предельным переходом при $n\to+\infty$ из (2.41′) будет следовать (2.41).

Из свойства (2.41) ортогональности классов $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$ непосредственно вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Если функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — из класса $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и*

$$\Phi_1^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\Phi_2^{(s_j-1)}(\alpha_j) \quad (1\leqslant j<+\infty),$$

*то*

$$\Phi_1(z)\equiv\Phi_2(z).$$

В самом деле, положив

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)$$

с одной стороны, очевидно, что будем иметь $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$. С другой стороны, поскольку $\Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0$ $(1 \leq j < +\infty)$, то одновременно $\Phi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$. Наконец, отсюда в силу (2.41) вытекает, что

$$(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 0,$$

т. е. $\Phi(z) \equiv 0$, и теорема доказана.

(б) Докажем теперь важную теорему о разбиении пространства $H_2$. Отметим, что несколько иной способ по существу такого же разбиения класса $H_2$ был предложен нами ранее в работе [9].

Теорема 4. *Пространство $H_2$ есть прямая сумма ортогональных подпространств $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$, т. е.*

$$H_2 = \lambda_2\{\alpha_j\} \oplus N_2\{\alpha_j\}.$$

*Иначе говоря, класс $H_2$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z) = \Phi(z) + \psi(z), \quad |z| < 1, \tag{2.42}$$

*где $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$ и $\psi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$.*

*При этом*

$$\|f\|^2 = \|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2. \tag{2.43}$$

Доказательство. Что любая функция $f(z)$ вида (2.42) — из класса $H_2$, очевидно. Покажем обратное, что любая функция $f(z) \in H_2$ допускает представление типа (2.42).

Пусть $\{\varphi_j(z)\}_1^\infty$ — ортогонализация системы функций $\{r_j(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$ по методу Шмидта* .Тогда

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \cdots),$$

причем для любого $k \geq 1$ будем иметь

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=1}^{k} d_j^{(k)} r_j(z), \quad d_k^{(k)} \neq 0. \tag{2.44}$$

Для данной функции $f(z) \in H_2$ введем в рассмотрение ее коэффициент Фурье $(f, \varphi_k)(k \geq 1)$, по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$. Тогда для них справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Отсюда легко следует, что ряд

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k(z) \tag{2.45}$$

---

* Это известная система Мальмквиста-Такенака и может быть записана в явной форме [9].

сходится в среднем на окружности $|z|=1$ и равномерно в круге $D^-$, причем

$$(\Phi, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{2.46}$$

Ввиду сходимости ряда (2.45) к граничным значениям функции $\Phi(z)$ на окружности $|z|=1$, принимая также во внимание определение (2.37) класса $\Lambda_2\{\alpha_j\}$ и линейные соотношения (2.44), мы приходим к заключению, что $\Phi(z) \in \Lambda_2\{\alpha_j\}$.

Но из (2.46), вновь пользуясь соотношениями (2.44), в силу формул (2.46) мы получим

$$(f - \Phi, r_k) = f^{(s_k-1)}(\alpha_k) - \Phi^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 0$$
$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Поэтому, положив $\psi(z) = f(z) - \Phi(z)$, мы заключаем, что $\psi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$, и тем самым, требуемое представление (2.42) установлено. Наконец, что касается равенства (2.43), то оно непосредственно следует из (2.42) и свойства (2.41) ортогональности подпространств $\Lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$.

В добавление отметим, *что функции $f(z) \in H_2$ допускают представление вида* (2.42) *единственным образом.* Это непосредственно вытекает из теоремы единственности 3.

(в) Наконец, докажем заключительную теорему данной статьи, содержащую полное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе $H_2$. Для компактной формулировки и доказательства теоремы введем еще одно определение.

Для данной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ на функциях класса $H_2$ определим линейный оператор $T_2$, положив

$$T_2(f) = \{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty, \quad f(z) \in H_2. \tag{2.47}$$

Как уже отмечалось выше, если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ имеет ограниченную кратность, т. е. если $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{s_j\} = \sup\limits_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p < +\infty$, то $T_2$ отображает $H_2$ на пространство последовательностей, стремящихся к нулю. Ниже мы установим критерий для совпадения двух счетномерных пространств — пространства $T_2[H_2]$ всех счетномерных последовательностей типа (2.47) и гильбертового пространства $l^2$.

Теорема 5. *Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ имеет ограниченную кратность*

$$\sup_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p < +\infty.$$

*Тогда условие*

$$\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p \tag{2.48}$$

*необходимо и достаточно для того, чтобы имело место*

$$T_2[H_2] = l^2. \tag{2.49}$$

Доказательство. Установим сначала достаточность условия (2.48) теоремы. Заметим сперва, что для любого элемента $w = \{w_j\}_1^\infty \in l^2$, положив

$$\gamma_j = (1 - |\alpha_j|^2)^{1/2 - s_j} w_j \quad (1 \leqslant j < +\infty),$$

мы можем утверждать, что элемент $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty \in l^2\{\alpha_j\}$. Но тогда согласно утверждению 1° теоремы 1 существует функция $f_0(z) \in H_2$ такая, что

$$f_0^{(s_j - 1)}(\alpha_j) = \gamma_j \quad (1 \leqslant j < +\infty)$$

или, что то же самое, мы будем иметь $T_2(f_0) = \{w_j\}_1^\infty = w \in l^2$.

Иначе говоря, при условии $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ имеет место включение $T_2[H_2] \supset l^2$. Чтобы установить обратное включение $T_2[H_2] \subset l^2$, и, тем самым, утверждение (2.49) теоремы, нам достаточно доказать, что для любой функции $f(z) \in H_2$, $T_2[f] \subset l^2$, т. е. что

$$\Phi[f] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|^2)^{2s_k - 1} |f^{(s_k - 1)}(\alpha_k)|^2 < +\infty. \tag{2.50}$$

С этой целью, обозначим через $\{z_j\}_1^\infty$ все отличные между собой точки из последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Тогда, как уже отмечалось в § 1, последовательность точек $\{z_j\}_1^\infty \subset \{\alpha_j\}_1^\infty$ равномерно разделена, т. е. мы будем иметь $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Пусть для данного целого $j\ (1 \leqslant j < +\infty)$ целое число $q_j \geqslant 1$ означает кратность появления $z_j$ во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$\sup_{j \geqslant 1} \{q_j\} = \sup_{j \geqslant 1} \{p_j\} = p;$$

и поэтому, согласно теореме 2 справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_j} (1 - |z_j|^2)^{2r-1} |f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{p} (1 - |z_j|^2)^{2r-1} |f^{(r-1)}(z_j)|^2 = \sum_{r=1}^{p} L_r(f) < +\infty. \tag{2.51}$$

Теперь для каждого целого $j\ (\leqslant j < +\infty)$ обозначим через $\{K_j\}$ множество тех индексов $k\ (1 \leqslant k < +\infty)$, для которых

$$\alpha_k = z_j, \text{ при } k \in \{K_j\}.$$

Непосредственно видно, что

$$\{K_{j_1}\} \cap \{K_{j_2}\} = \varnothing\ (j_1 \neq j_2), \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \{K_j\} = \{k\}_1^\infty,$$

а также то, что когда $k$ пробегает все множество $\{K_j\}$, соответствующая ему величина $s_k$ однократно пробегает совокупность чисел $(1, 2, \cdots, q_j)$.

Принимая во внимание эти замечания, мы убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\Phi[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in \{K_j\}} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in \{K_j\}} (1-|z_j|^2)^{2s_k-1} |f^{(s_k-1)}(z_j)|^2 = \tag{2.52}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_j} (1-|z_j|^2)^{2r-1} |f^{(r-1)}(z_j)|^2.$$

Из (2.51) и (2.52) следует (2.50), и, тем самым, достаточность доказана.

Переходим к доказательству необходимости условия (2.48) теоремы, в предположении, что $T_2[H_2] = l^2$.

Покажем сначала, что тогда, во-первых, необходимо, чтобы наша последовательность $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ удовлетворяла условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2) < +\infty. \tag{2.53}$$

Рассмотрим последовательность чисел

$$w_j = \begin{cases} 1, \text{ при } \alpha_j = \alpha_1 \\ 0, \text{ при } \alpha_j \neq \alpha_1 \end{cases} \quad (1 \leqslant j < +\infty),$$

заметив, что в ней лишь конечное число членов отлично от нуля, поскольку кратность появления $\alpha_1$ в $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ равна $p_1 \leqslant \sup_{j \geqslant 1} \{p_j\} = p < +\infty$.

Следовательно, если ввести элемент $w = \{w_j\}_1^{\infty} \in l^2$, то предположение (2.49) приводит нас к заключению о существовании функции $f_*(z) \in H_2$, подчиненной условиям

$$f_*^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \begin{cases} \gamma_j \neq 0, & \text{при } \alpha_j = \alpha_1 \\ 0, & \text{при } \alpha_j \neq \alpha_1 \end{cases} \tag{2.54}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

Пусть $\{\beta_j\}_1^{\infty}$ — последовательность всех нулей функций $f_*(z) \not\equiv 0$, пронумерованных с учетом их кратности, так что в ней каждый нуль появляется столько раз, какова его кратность. Поэтому, очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\beta_j|^2) < +\infty.$$

Но ввиду (2.54) последовательность

$$\{\alpha_j,\ \alpha_j \neq \alpha_1\}_1^{\infty}$$

пронумерованных тем же способом, вообще говоря, есть лишь часть $\{\beta_j\}_1^\infty$, и, таким образом, необходимость условия (2.53) установлена.

Покажем теперь, что вообще, если $T_2[H_2]\subset l^2$, то $T_2$ — замкнутый оператор. Действительно, предположим, что

$$\{f_n(z)\}_1^\infty\subset H_2,\ f(z)\in H_2,\qquad\qquad (2.55)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|=0,$$

и существует элемент $w=\{w_j\}_1^\infty\in l^2$ такой, что в метрике $l^2$

$$T_2(f_n)=\{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty\to w\in l^2,$$

т. е.

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{j=1}^\infty|(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j)-w_j|^2\right\}=0.\qquad\qquad (2.56)$$

Но из (2.55) непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j)=f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\ (1\leqslant j<+\infty),$$

и поэтому, из (2.56) заключаем, что

$$w_j=(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\ (1\leqslant j<+\infty).$$

Это означает, что

$$T_2(f)=\{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}=\{w_j\}_1^\infty,$$

т. е. $T_2(f)=w$, иными словами оператор $T_2$ действительно замкнут и следовательно, согласно теореме о замкнутом графике (см., например, [10], стр. 147—150) он также ограничен.

Итак, $T_2$—ограниченный оператор, осуществляющий отображение $H_2$ на $l^2$. Но из теоремы 4 следует, что $T_2[H_2]=T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]$, так как любая функция $f(z)\in H_2$ допускает представление (2.42),

$$f(z)=\Phi(z)+\psi(z);\ \Phi\in\lambda_2\{\alpha_j\},\ \psi\in N_2\{\alpha_j\},$$

и поэтому, ввиду определения (2.39) класса $N_2\{\alpha_j\}$, будем иметь $T_2(f)=T_2(\Phi)$.

Поэтому, из $T_2[H_2]=l^2$ следует также $T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]=l^2$, т. е. что ограниченный на $\lambda_2\{\alpha_j\}\subset H_2$ оператор $T_2$ отображает $\lambda_2\{\alpha_j\}$ на $l^2$. Но это отображение уже взаимнооднозначное.

Действительно, поскольку $T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]=l^2$, то для любого элемента $w=\{w\}_1^\infty\in l^2$ существует функция $\Phi(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ такая, что

$$T_2(\Phi)=\{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty=w.$$

В силу теоремы единственности 3, в классе $\lambda_2\{\alpha_j\}$, функция $\Phi(z)$ со свойством $T_2(\Phi)=w$ для произвольного элемента $w\in l^2$ будет единственной. Пользуясь теоремой об открытых отображениях, можем утверждать, что существует ограниченный обратный к $T_2$ оператор $T_2^{-1}$ такой, что $T_2^{-1}[l^2]=\lambda_2\{\alpha_j\}$.

Иначе говоря, существует постоянная $M>0$ такая, что для любого элемента $w=\{w_j\}\in l^2$ можно указать лишь одну функцию $\Phi(z)\in\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ такую, что $\Phi(z)=T_2^{-1}(w)$ и

$$\|\Phi\|\leqslant M\|w\|. \tag{2.57}$$

Теперь мы уже в состоянии завершить доказательство необходимости условия $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$ теоремы.

С этой целью заметим сначала, что для данного значения $k\,(1\leqslant\leqslant k<+\infty)$, очевидно, существует лишь один индекс $j=j_k$ такой, что

$$\alpha_{j_k}=\alpha_k \text{ и } s_{j_k}=1. \tag{2.58}$$

Если положить далее

$$w_j^{(k)}=\begin{cases}0, \text{ при } j\neq j_k\\ 1, \text{ при } j=j_k\end{cases}\quad(1\leqslant j<+\infty), \tag{2.59}$$

то, очевидно, что элемент $w^{(k)}=\{w_j^{(k)}\}_1^\infty\in l^2$, причем $\|w^{(k)}\|=1$.

Поскольку $T_2[H_2]=T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]=l^2$, то в силу того, что $w^{(k)}==\{w_j^{(k)}\}\in l^2$, существует единственная функция $\Phi_k(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ такая что

$$(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\,\Phi_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=w_j^{(k)}\;(1\leqslant j<+\infty).$$

Отсюда и из (2.58) и (2.59), в частности следует, что

$$\Phi_k(\alpha_k)=(1-|\alpha_k|^2)^{-1/2},$$

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0, \text{ при } \alpha_j\neq\alpha_k. \tag{2.60}$$

Рассмотрим, наконец, функции

$$F_{nk}(z)=\Phi_k(z)\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_j z}{\alpha_j-z}\quad(n>j_k), \tag{2.61}$$

заметив, что они регулярны в круге $D^+$ и, очевидно, из класса $H_2$. При этом, мы будем иметь

$$\|F_{nk}\|=\|\Phi_k\|\leqslant M\|w^{(k)}\|=M\;(n>j_k). \tag{2.62}$$

Но представляя функцию $F_{nk}(z)$ интегралом Коши

$$F_{nk}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{F_{nk}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\;(|z|<1)$$

и применив неравенства Шварца, мы получим в силу (2.62)

$$|F_{nk}(z)|\leqslant\|F_{nk}\|\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-z\bar{\zeta}|^2}\right\}^{1/2}\leqslant\frac{M}{(1-|z|^2)^{1/2}}\;(|z|<1),\;n>j_k.$$

Поэтому, в силу (2.60) и (2.61) будем иметь

$$\prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{n} \left| \frac{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k} \right| \leqslant M \ (n > j_k, \ 1 \leqslant k < +\infty).$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\inf_{k \geqslant 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \right\} \geqslant \frac{1}{M} > 0.$$

Наконец, ввиду предположения $\sup_{j \geqslant 1} \{p_j\} = p < +\infty$, это и означает, что $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что в связи с вышеизложенным, естественно ставить некоторые задачи, решение которых представляет несомненный интерес.

1. Достаточно ли условие $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ для того, чтобы система рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ являлась бы базисом в своем замыкании, т. е. в классе $\lambda_2 \{\alpha_j\}$?

2. Исследовать вопросы интерполяции с кратными узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ в классах Харди $H_\delta$ $(0 < \delta < +\infty)$.

3. Распространимы ли результаты статьи на случай, когда узлы $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, но их кратности неограничены: $\sup_{j \geqslant 1} \{p_j\} = +\infty$?

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.VI.1974

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Բիօրթոգոնալ սիստեմներ և սահմանափակ բազմապատիկության հանգույցներով ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը $H_2$ դասում *(ամփոփում)*

*Դիցուք* $\{\alpha_j\}_1^\infty$-ը $(0 < |\alpha_j| < 1)$ *և* $\{\gamma_j\}_1^\infty$-ը *կոմպլեքս թվերի կամայական հաջորդականություններ են և* $s_k \geqslant 1$, *հանդիսանում է* $\{\alpha_j\}_1^k$ *հատվածում* $\alpha_k$-*ի հանդես գալու կարգը։*

*Դիտարկվում է* $f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \ (j=1, 2, \cdots)$ *ինտերպոլյացիոն պայմաններին բավարարող* $H_2$ *դասի* $f(z)$ *ֆունկցիայի գոյությունն ապահովող հայտանիշի բացահայտման խնդիրը* $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *և* $\{\gamma_j\}_1^\infty$ *հաջորդականությունների համար և կառուցվում է ապարատ այս տիպի խնդիրների լուծումների ներկայացման համար։*

*Ներկա հոդվածում առաջարկվում է այս խնդրի լուծմանը տրվող նոր անալիտիկ մեթոդ։*

M. M. DJRBASHIAN. *Biorthogonal systems and the solution of interpolation problem in the class $H_2$ with knots of bounded multiplicity* (summary)

Let $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 < |\alpha_j| < 1)$ and $\{\gamma_j\}_1^\infty$ be arbitrary sequences of complex numbers and $s_k \geqslant 1$ be the multiplicity of $\alpha_k$ in the segment $\{\alpha_j\}_1^k$.

The present paper consideres the problem of finding conditions on $\{\alpha_j\}_1^\infty$ and $\{\gamma_j\}_1^\infty$ under which a function $f(z) \in H_2$ satisfying the interpolation conditions

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j,\ j=1, 2, \cdots,$$

happens to exist.

A new analytical method is proposed giving the complete solution of this problem. An apparatus for representation of solutions of this kind of problems is constructed.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
2. *P. Duren.* Theory of $H^p$ speces, Ac. Press, New York and London, 1970.
3. *H. Shapiro* and *A. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in $H^2$, Michigan Math., J., 14, 1967, 65—70.
5. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in $H^2$, 11 Pacific, J. Math., 27, 1968, 607—610.
6. *B. L. Chalmers.* Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
7. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки Московского университета, т. 48, „Математика", 1951, 69—107.
8. *М. М. Джрбишян.* Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
9. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
10. *Н. И. Ахиезер* и *И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Изд. „Наука", 1966.