ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

Л. З. ГРОССМАН

О СОГЛАСОВАННОСТИ УСЛОВИЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ И СИМПЛЕКТИЧНОСТИ С ПОЛЯРНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ

1. **Постановка задачи.** В ряде задач математического анализа и математической физики особую роль играют J-нерастягивающие матрицы-функции. Одним из важных методов исследования таких матриц-функций является их мультипликативное разложение, полученное В. П. Потаповым [1]. В этом разложении условие нормировки основано на выделении J-модуля матрицы, т. е. на полярном представлении J-нерастягивающей матрицы. В анализе и приложениях на рассматриваемые матрицы-функции часто накладываются дополнительные условия вещественности, симплектичности и др., и, естественно, чтобы компоненты полярного представления таких матриц также удовлетворяли этим условиям. Ниже показано, каким условиям (необходимым и достаточным) должна удовлетворять матрица J, чтобы такая согласованность имела место.

Через J обозначается матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

$$J^* = J; \; J^2 = I.$$

Напомним, что матрица W называется J-нерастягивающей, если $WJW^* \leqslant J$, J-унитарной, если $WJW^* = J$, строго J-сжимающей, если $WJW^* < J$ и J-эрмитовой, если $(WJ)^* = WJ$.

Как показано в [1], каждая J-нерастягивающая матрица допускает полярное представление

$$W = R \cdot U, \tag{1}$$

где R — J-эрмитова J-нерастягивающая матрица с неотрицательными собственными числами и простыми элементарными делителями, отвечающими собственному числу $\lambda = 0$, а U — J-унитарная матрица. Компоненты R и U представления (1) называются соответственно J-модулем и J-аргументом матрицы W. Для J-нерастягивающей матрицы W ее J-модуль удовлетворяет соотношению $R^2 = WJW^*J$. Поскольку из равенства квадратов матриц с неотрицательными собственными числами и простыми элементарными делителями, отвечающими собственному числу $\lambda = 0$, следует равенство самих матриц, то J-модуль матрицы W определяется однозначно. В случае же неособенности W однозначно определяется и J-аргумент.

Матрица X называется вещественной. если вещественны все ее элементы, т. е. если $\overline{X}=X$. Матрица X порядка $2n$ называется симплектической, если выполняется условие

$$XJ_sX' = J_s,$$

где $J_s = \begin{bmatrix} 0 & -iI_n \\ iI_n & 0 \end{bmatrix}$, I_n — единичная матрица порядка n,

X' — транспонированная матрица.

2°. Вещественность. Приведем произвольную матрицу J к „каноническому" виду с помощью ортогональной матрицы.

Теорема 1. *Каждая матрица J представима в виде $J=UJ_{cr}U^*$, где U — ортогональная матрица, а J_{cr} — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали*

$$J_{11}=\begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \; J_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & -i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \; 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$J_{m+2,\,m+2}=\begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}, \; 0<\lambda_j<1 \;(j=1, 2,\cdots, m),$$

$$m\geqslant 0,\; k_1\geqslant 0,\; k_2\geqslant 0,\; l\geqslant 0.$$

Для доказательства представим рассматриваемую матрицу J в виде $J=A+iB$, где A и B — вещественные матрицы. Тогда $J^*= A'-iB'$. Из того, что $J^*=J$, следует, что $A'=A$, $B'=-B$. Для симметрической вещественной матрицы A существует ортогональная матрица U_1, приводящая A к диагональному виду: $U_1AU_1{}^*=A_1$, где A_1 — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$A^{(1)}_{11}=\begin{bmatrix} -I_{k_1} & \\ & I_{k_2} \end{bmatrix}, \; A^{(1)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_1} & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{t_1} \end{bmatrix}, \; 1<j\leqslant m,$$

$$A^{(1)}_{m+2,\;m+2}=0_L,\; 0<\lambda_j,\; \lambda_j\neq 1\; (j=1, 2,\cdots, m),\; m>0,$$

$k_1>0$, $k_2\geqslant 0$, $L\geqslant 0$, 0_L — нулевая матрица порядка L.

Обозначим $B_1=U_1BU_1^*$, $J_1=U_1JU_1^*$. Имеем: $B_1'=-B_1$, $J_1=A_1+iB_1$, $J_1^*=J_1$, $J_1^2=I$. Из последнего равенства получаем: $(A_1^2-B_1^2)+i(A_1B_1+B_1A_1)=I$, откуда следует: $A_1^2-B_1^2=I$, $A_1B_1=-B_1A_1$. Отсюда вытекает, что B_1 — блочно-диагональная матрица с блоками по диагонали

$$B^{(1)}_{11}=\begin{bmatrix} 0_{k_1} & -C_0 \\ C_0' & 0_{k_2} \end{bmatrix}, \; B^{(1)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix} 0_{s_j} & -C_j \\ C_j' & 0_{t_j} \end{bmatrix}, \; 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$B^{(1)}_{m+2,\;m+2}=B_L, \quad \text{причем}$$

$$C_jC_j'=(1-\lambda_j)^2 I_{t_j},\; C_j'C_j=(1-\lambda_j^2)\, I_{s_j};\; C_0C_0'=0;\; B_L^2=-I,$$

$$B_L'=-B_L.$$

Из первых двух равенств следует, что $\lambda_j < 1$ и $C_j / \sqrt{1-\lambda_j^2}$ — ортогональная матрица $(j = 1, 2, \cdots, m)$, из третьего равенства следует, что $C_0 = 0$. Из последних двух равенств вытекает, что существует ортогональная матрица U_L такая, что $U_L B_L U_L^*$ — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали — матрица II порядка $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

По матрице U_L построим ортогональную матрицу $U_L^{(2)}$, выписав сначала все строчки матрицы U_L, стоящие на нечетных местах, в порядке их расположения, а затем — на четных местах. Тогда, очевидно

$$U_L^{(2)} B_L U_L^{(2)*} = \begin{bmatrix} 0 & -I_l \\ I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad l = \frac{L}{2}.$$

Пусть матрица

$$U_j^{(2)} = \begin{bmatrix} I_{s_j} & \\ & \dfrac{C_j}{\sqrt{1-\lambda_j^2}} \end{bmatrix}, \ (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Преобразуем матрицу J_1 с помощью ортогональной блочно-диагональной матрицы U_2 с блоками на диагонали

$$U_{11} = I_{k_1+k_2}, \quad U_{j+1, j+1}^{(2)} = U_j^{(2)}, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad U_{m+2, m+2}^{(2)} = U_L^{(2)}.$$

Так как $U_2 A_1 U_2^* = A_1$, а $U_2 B_1 U_2^*$ есть блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$B_{11}^{(2)} = 0_{k_1+k_2}, \quad B_{j+1, j+1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & 0 \end{bmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$B_{m+2, m+2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}, \ \text{то} \ U_2 J_1 U_2^* = J_{cr},$$

$$J = (U_1^* U_2^*)\, J_{cr}\, (U_1^* U_2^*)^* = U J_{cr} U^*, \ \text{где} \ U = U_1^* U_2^*,$$

$UU^* = I$, $\overline{U} = U$, J_{cr} — матрица, записанная в формулировке теоремы, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 1 следует, что матрица $(\mathrm{Re}\, J)^2$ тогда и только тогда является проекционной (т. е. $(\mathrm{Re}\, J)^4 = (\mathrm{Re}\, J)^2$), когда $m = 0$, т. е. когда матрица J имеет вид

$$J = U \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s \end{bmatrix} U^*, \ \text{где} \ UU^* = I, \ \overline{U} = U, \ J_s = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы квадрат вещественной части J являлся проекционной матрицей.*

Исходя из замечания к теореме 1, достаточно доказать следующее утверждение: для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы матрица J была представима в виде $J = UJ_{cr}U^*$, где U — ортогональная матрица,

$$J_{cr} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s^{\sim} \end{bmatrix}.$$

Необходимость. Пусть матрица J такова, что компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц вещественны. Тогда, как легко видеть, тем же свойством обладает и матрица J_{cr} — канонический вид матрицы J (см. теорему 1).

Рассмотрим J_{cr}-нерастягивающую вещественную неособенную блочно-диагональную матрицу W_0 с блоками на диагонали

$$W_{11}^{(0)} = I_{k_1+k_2}, \quad W_{j+1,\, j+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2I_{s_j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{s_j} \end{bmatrix}, \quad W_{m+2,\, m+2} = I_{2l}.$$

Для нее квадрат J_{cr}-модуля $R_0^2 = W_0 J_{cr} W_0^* J_{cr}$ есть блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$I_{k_1+k_2}, \quad \begin{bmatrix} (1 + 3\lambda_j^2)\, I_{s_j} & -3i \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ \frac{3}{4} i \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \left(1 - \frac{3}{4} \lambda_j^2\right) I_{s_j} \end{bmatrix},$$

$1 \leqslant j \leqslant m$ и I_{2l}. Поскольку из вещественности R_0 следует вещественность R_0^2, то $m = 0$, т. е.

$$J_{cr} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s \end{bmatrix}.$$

Достаточность. Очевидно, без ограничения общности, можно считать, что $J = J_{cr} = \begin{bmatrix} J_r & \\ & J_s \end{bmatrix}$, где

$$J_r = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & \\ & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что все J-нерастягивающие вещественные матрицы W распадаются на блоки в соответствии с распадом на блоки матрицы

$$J: W = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Итак, при произвольной J-нерастягивающей вещественной матрице $W=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ следует показать, что блоки a_{12} и a_{21} равны нулю. Достаточно показать, что $a_{21}=0$, поскольку вместе с матрицей W вещественной J-нерастягивающей является и матрица W^*.

Из неотрицательности произвольной матрицы V следует неотрицательность матрицы $\overline{V}$, а значит, и матрицы

$$\frac{V+\overline{V}}{2}=\mathrm{Re}\ V.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\,(J-WJW^*)=\begin{bmatrix} J_r-a_{11}J_r a_{11}'-a_{11}J_r a_{21}' \\ -a_{21}J_r a_{11}' & -a_{21}J_r a_{21}' \end{bmatrix}\geqslant 0.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда матрица $J_r-a_{11}J_r a_{11}'$ неособенна. Действительно, пусть матрица особенна. Рассмотрим матрицу W_1,

$$W_1=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \rho_1 I_{k_1} & & \\ & \rho_2 I_{k_2} & \\ & & I_{2l} \end{bmatrix} W \quad (\rho_1>1,\ 0<\rho_2<1).$$

Обозначим $W_0=\begin{bmatrix} \rho_1 I_{k_1} & \\ & \rho_2 I_{k_2} \end{bmatrix}$. Тогда $\begin{bmatrix} W_0 & \\ & I_{2l} \end{bmatrix}$ — J-нерастягивающая матрица. Поэтому и $W_1=\begin{bmatrix} W_0 & \\ & I_{2l} \end{bmatrix} W$ — также J-нерастягивающая (вещественная) матрица. При этом матрица

$$J_r-b_{11}J_r b_{11}'=J_r-W_0 a_{11}J_r a_{11}' W_0=(J_r-W_0 J_r W_0^*)+$$
$$+W_0(J_r-a_{11}J_r a_{11}')W_0'>0$$

и поэтому неособенна. Если будет доказано, что при этом блок $b_{21}=0$, то отсюда будет вытекать $a_{21}=0$, так как $a_{21}=b_{21}$.

Итак, пусть теперь матрица $J_r-a_{11}J_r a_{11}'$ неособенна. В этом случае из неотрицательности матрицы $\mathrm{Re}\,(J-WJW^*)$ следует, что

$$J_r-a_{11}J_r a_{11}'>0,\ (-a_{21}J_r a_{21}')-(-a_{21}J_r a_{11}')\times$$
$$\times(J_r-a_{11}J_r a_{11}')^{-1}(-a_{11}J_r a_{21}')\geqslant 0. \qquad (2)$$

Воспользуемся следующим непосредственно проверяемым тождеством: $J+JA^*(I-AJA^*)AJ=(J-A^*JA)^{-1}$ ($J^*=J$; $J^2=I$, A — произвольная матрица).

Учитывая это тождество и второе неравенство в (2), получаем

$$0\leqslant -a_{21}[J_r+J_r a_{11}'(J_r-a_{11}J_r a_{11}')a_{11}J_r]a_{21}'=-a_{21}(J_r-a_{11}'J_r a_{11})^{-1}a_{21}'.$$

С другой стороны, из первого неравенства в (2) следует, что $J_r - a_{11}' J_r a_{11} > 0$, а значит, $-a_{21}(J_r - a_{11}' J_r a_{11})^{-1} a_{21}' \leqslant 0$. В итоге получаем $-a_{21}(J_r - a_{11} J_r a_{11}')^{-1} a_{21}' = 0$, откуда $a_{21} = 0$.

Итак, для $J = J_{cr}$ все J-нерастягивающие вещественные матрицы W имеют вид $W = \begin{vmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{vmatrix}$. В случае неособенности W блоки W_1 и W_2 также неособенны. Кроме того, они вещественны и J-нерастягивающие матрицы в метриках J_r и J_s соответственно. Компоненты полярного представления матрицы W распадаются на блоки, являющиеся компонентами полярных представлений матриц W_1 и W_2. Поэтому достаточно показать вещественность этих компонент, т. е. доказать утверждение в случае $J = J_r$ и $J = J_s$.

Пусть $J = J_r$ и пусть неособенная J_r-нерастягивающая матрица $W = R \cdot U$ вещественна. Покажем, что $\overline{R} = R$ и $\overline{U} = U$. Убедимся в том, что $\overline{R}$ и $\overline{U}$ удовлетворяют условиям соответственно J-модуля и J-аргумента:

$$(\overline{R} J_r)^* = (\overline{R}\, \overline{J}_r)^* = (R J_r)' = (J_r R^*)' = \overline{R} J_r;\ J_r - \overline{R} J_r \overline{R}^* =$$
$$= \overline{J}_r - \overline{R} J_r \overline{R}^* = \overline{J_r - R J_r R^*} \geqslant 0;\ \overline{U} J_r \overline{U}^* = \overline{U J_r U^*} = \overline{J}_r = J_r.$$

Собственные числа матрицы $\overline{R}$ совпадают с собственными числами матрицы R и потому положительны. $\overline{R}\, \overline{U} = \overline{RU} = \overline{W} = W$. Из единственности полярного представления вытекает, что $\overline{R} = R$, $\overline{U} = U$.

В случае чисто мнимого J, все J-нерастягивающие вещественные матрицы являются J-унитарными. Действительно, из $J - WJW^* \geqslant 0$ имеем $\overline{J} - W \overline{J} W^* \geqslant 0$, и так как $\overline{J} = -J$, то $J - WJW^* \leqslant 0$, поэтому $J - WJW^* = 0$. Отсюда, при $J = J_s$ для каждой вещественной J_s-нерастягивающей матрицы W компоненты полярного представления суть соответственно $R = I$ и $U = W$ и, значит, вещественны.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Пусть для матрицы J выполняется необходимое условие теоремы 2, кроме того, существует строго J-сжимающая вещественная матрица. Тогда матрица J вещественна.

Действительно, в этом случае для соответствующей матрицы $J_{cr} = \begin{vmatrix} J_r & \\ & J_s \end{vmatrix}$ также существует строго J-сжимающая вещественная матрица. Если порядок блока J_s отличен от нуля, то эта строго J-сжимающая вещественная матрица является блочно-диагональной с J_s-унитарным блоком (см. достаточность теоремы 2), что противоречит ее строгой J-сжимаемости. Поэтому $J_{cr} = J_r$, $J = UJ_rU^* = \overline{J}$.

Очевидно, вещественность J является при существовании строго J-сжимающей вещественной матрицы не только необходимым, но и достаточным условием того, что компоненты полярного представления всех неособенных J-нерастягивающих вещественных матриц вещественны.

3°. Симплектичность. Аналогичными рассуждениями, но более громоздкими выкладками, можно доказать, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Каждая матрица J представима в виде $J = UJ_{cs}U^*$, где U — унитарная симплектическая матрица, J_{cs} — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали*

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_{j+1,\, j+1} = \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$J_{m+2,\, m+2} = \begin{bmatrix} -I_{l+k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_{j+m+2,\, j+m+2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & -\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ -\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \ J_{2m+3,\, 2m+3} = I_l,$$

$$0 < \lambda_j < 1 \ (j = 1, 2, \cdots, m), \ m > 0, \ k_1 \geqslant 0, \ k_2 > 0, \ l \geqslant 0.$$

Теорема 4. *Для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех симплектических J-нерастягивающих матриц были симплектичны, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\left(\frac{J + J_s \bar{J} J_s}{2}\right)^2$ была проекционной.*

Остановимся, но уже не столь подробно, на доказательстве этих теорем.

Доказательство теоремы 3. Произвольную матрицу J можно представить в виде суммы двух матриц A и B таких, что $AJ_s = J_sA'$ и $BJ_s = -J_sB'$. При этом:

$$A = \frac{J + \bar{J}_s J J_s}{2}, \quad B = \frac{J - J_s \bar{J} J_s}{2}; \ A^* = A, \ B^* = B.$$

Из того, что $A^* = A$ и $AJ_s = J_sA'$, вытекают такие свойства собственных векторов матрицы A, которые позволяют привести ее при помощи некоторой унитарной симплектической матрицы U_1 к следующему диагональному виду:

$U_1 A U_1^* = A_1$ — диагональная матрица с блоками на диагонали

$$A_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad A_{j+1,\, j+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix},$$

$$1 \leqslant j \leqslant m, \ A_{m+2,\, m+2}^{(1)} = 0_l, \ A_{k+m+2,\, k+m+2}^{(1)} = A_{k,\, k}^{(1)},$$

$$1 \leqslant k \leqslant m+2, \ 0 < \lambda_j, \ \lambda_j \neq 1, \ (j = 1, 2, \cdots, m), \ m > 0,$$

$$k_1 > 0, \ k_2 \geqslant 0, \ l \geqslant 0.$$

При этом, если $B_1 = U_1 B U_1^*$ и $J_1 = U_1 J U_1^*$, то

$$J_1 = A_1 + B_1,\quad A_1^2 + B_1^2 = I;\quad A_1 B = -B_1 A_1;\quad B_1^* = B_1,\quad B_1 J_s = -J_s B_1,$$

и потому

$$\mathcal{B}_1 = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0_{k_1+k_2} & & & & & 0_{k_1+k_2} & & & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & C_1 \\ C_1^* & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \begin{smallmatrix} 0 & \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_1' & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & C_m \\ C_m^* & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \begin{smallmatrix} 0 & \mathcal{D}_m \\ \mathcal{D}_m' & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & & B_1^{(0)} & & & & & B_2^{(0)} \\ \hline 0_{k_1+k_2} & & & & & 0_{k_1+k_2} & & & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & \bar{\mathcal{D}}_1 \\ \mathcal{D}_1^* & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \begin{smallmatrix} 0 & -\bar{C}_1 \\ -C_1' & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & \bar{\mathcal{D}}_m \\ \mathcal{D}_m^* & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \begin{smallmatrix} 0 & -\bar{C}_m \\ -C_m' & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & & \bar{B}_2^{(0)} & & & & & -\bar{B}_1^{(0)} \end{array}\right],$$

$$B_1^{(0)*} = B_1^{(0)},\quad B_2^{(0)'} = B_2^{(0)}.$$

Для матрицы $J^{(0)} = \begin{bmatrix} B_1^{(0)} & B_2^{(0)} \\ \bar{B}_2^{(0)} & -\bar{B}_1^{(0)} \end{bmatrix}$ существует унитарная симплектическая матрица $U^{(0)} = \begin{bmatrix} U_1^{(0)} & U_2^{(0)} \\ -\bar{U}_2^{(0)} & \bar{U}_1^{(0)} \end{bmatrix}$ такая, что

$$U^{(0)} J^{(0)} U^{(0)*} = \begin{bmatrix} -I_l & \\ & I_l \end{bmatrix}.$$

Унитарная симплектическая матрица U_2,

$$U_2 = \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc} I_{k_1+k_2} & & & & & & & & 0_{k_1+k_2} & & & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} I_{s_1} & & & & & & & & 0_{s_1} & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} C_1 & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \mathcal{D}_1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} I_{s_m} & & & & & & & & 0_{s_m} & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} C_m & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \mathcal{D}_m & & \\ & & & & & & U_1^{(0)} & & & & & & & & U_2^{(0)} & \\ \hline 0_{k_1+k_2} & & & & & & & & I_{k_1+k_2} & & & & & & & \\ & 0_{s_1} & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} I_{s_1} & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \bar{\mathcal{D}}_1 & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \bar{C}_1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0_{s_m} & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} I_{s_m} & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \mathcal{D}_m & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \bar{C}_m & & \\ & & & & & & -\bar{U}_2^{(0)} & & & & & & & & \bar{U}_1^{(0)} & \end{array}\right],$$

приводит матрицу B_1 к блочно-диагональной матрице $U_2 B_1 U_2^*$ с блоками на диагонали $B_{11}^{(2)} = 0_{k_1+k_2}$,

$$B^{(2)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j}\\ \sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} & 0\end{bmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant m,\ B^{(2)}_{m+2,\,m+2}=I_l,$$

$$B^{(2)}_{m+3,\,m+3}=0_{k_1+k_2},\quad B^{(2)}_{j+m+3,\,j+m+3}=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j}\\ -\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} & 0\end{bmatrix},$$

$$1\leqslant j\leqslant m,\ B^{(2)}_{2m+4,\,2m+4}=I_l,$$

$$0<\lambda_j<1\ (j=1,2,\cdots,m),\ m\geqslant 0,\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0,\ l\geqslant 0,$$

откуда, так как $U_2A_1U_2^*=A_1$, имеем: $U_2JU_2^*=J_{cs}$.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что матрица $\left(\frac{J+J_s\bar{J}J_s}{2}\right)^2$ тогда и только тогда является проекционной, когда $m=0$, т. е. когда матрица J имеет вид

$$J=U\begin{bmatrix}J_r & & & \\ & -I_l & & \\ & & J_r & \\ & & & I_l\end{bmatrix}U^*,$$

где $UU^*=I,\ UJ_sU'=J_s,\ J_s^1=\begin{bmatrix}0 & -iI_l\\ iI_l & 0\end{bmatrix},\ J_s=\begin{bmatrix}-I_{k_1} & \\ & I_{k_2}\end{bmatrix}.$

Доказательство теоремы 4. Необходимость доказывается так же, как и в теореме 2. В качестве матрицы W_0 можно взять, например, блочно-диагональную матрицу с блоками на диагонали

$$W^{(0)}_{11}=I_{k_1+k_2},\quad W^{(0)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}I_{s_j} & -\frac{4}{3}I_{s_j}\\ -\frac{4}{3}I_{s_j} & \frac{5}{3}I_{s_j}\end{bmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$W^{(0)}_{m+2,\,m+2}=I_{l+k_1+k_2},\quad W^{(0)}_{k+m+2,\,k+m+2}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}I_{s_j} & -\frac{4}{3}I_{s_j}\\ -\frac{4}{3}I_{s_j} & -\frac{5}{3}I_{s_j}\end{bmatrix},$$

$$1\leqslant j\leqslant m,\ W^{(0)}_{2m+3,\,2m+3}=I_l\ (W_0J_sW_0'=J_s,\ J_{cs}-W_0J_{cs}W_0^*>0).$$

Достаточность. Можно считать, что $J=J_{cs}$. У всех J-нерастягивающих симплектических матриц

$$W=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

(разбитых на блоки в соответствии с разбиением J) имеем

$$a_{12}=a_{14}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=a_{34}=a_{41}=a_{43}=0.$$

Действительно, из симплектичности W следует, что $J_s\bar{J}J_s \leqslant WJ_s\bar{J}J_sW^*$, и потому при

$$B\left(=\frac{J-J_s\bar{J}J_s}{2}\right)=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & -I_l & & \\ & & 0 & \\ & & & I_l \end{bmatrix}$$

имеем $B-WBW^*\geqslant 0$. Перестановкой блоков матрицы W составим матрицу W_1:

$$W_1=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{22} & a_{24} & a_{21} & a_{23} \\ a_{42} & a_{44} & a_{41} & a_{43} \\ \hline a_{12} & a_{14} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{34} & a_{31} & a_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Надо показать, что $W_{21}=0$. При $J_r=\begin{bmatrix} -I_l & \\ & I_l \end{bmatrix}$ и $j_0=\begin{bmatrix} J_r & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ для W_1 получаем $j_0-W_1j_0W_1^*\geqslant 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} J_r-W_{11}J_rW_{11}^* & -W_{11}J_rW_{21}^* \\ -W_{21}J_rW_{11}^* & -W_{21}J_rW_{21}^* \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

Далее рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям доказательства достаточности теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Потапову за постановку задачи, Д. З. Арову за ценные советы.

Одесский педагогический институт

Поступила 27.III.1973

Լ. Զ. ԳՐՈՍՍՄԱՆ. Իրականության և սիմպլեկտիկության պայմանների համաձայնեցվածությունը J-չձգվող մատրիցների բևեռային ներկայացման հետ (*ամփոփում*)

Հոդվածում պարզված է, թե $J^*=J$, $J^2=I$ հատկություններով օժտված ինչպիսի J մատրիցների համար W J-չձգվող մատրիցի իրականությունից (սիմպլեկտիկությունից) հետևում է նրա բևեռային ներկայացման կոմպոնենտների իրականությունը (սիմպլեկտիկությունը)։

Պարզված է, թե ինչպիսի պարզագույն տեսքի կարելի է բերել կամայական J մատրիցը իրական (սիմպլեկտիկ) ունիտար մատրիցի միջոցով։

L. Z. GROSSMAN. *On the consistency of the reality and symplexity conditions with polar representation of J-constructive matrices* (summary)

The following question is solved: for which matrices with the property $J^*=J$, $J^2=I$ the reality (symplexity) of J-constructive matrix W implies the reality (symplexity) of the components of its polar representation.

The simplest form, to which the matrix J can be reduced with the aid of real (symplectic) unitary matrix, is discovered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 2, 1955, 125—236.