ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

Г. В. АМБАРЦУМЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

Введение

В статье И. Б. Симоненко [4] и в книге [1] установлен критерий возможности факторизации ограниченных, измеримых функций и матриц-функций в пространствах L_p с весом. Там же получены приложения факторизации к решению сингулярных интегральных уравнений в пространствах L_p с весом.

В настоящей статье результаты о факторизации переносятся на случай пространств $\widetilde{l}_p$ с весом. Полученные результаты применяются для обращения теплицевых матриц.

Факторизация функций, заданных на единичной окружности, в пространстве $\widetilde{l}_p$ означает представление отвечающей этой функции бесконечной теплицевой матрицы в виде произведении треугольных теплицевых матриц (с некоторыми дополнительными свойствами).

Статья состоит из двух параграфов. В первом параграфе рассматривается факторизация функций, во втором—матриц-функций.

§ 1. Факторизация функций

1. **Вспомогательные предложения.** Через $\widetilde{l}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначается банахово пространство всех двусторонних последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|\xi\| = \Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\xi_j|^p \Big)^{1/p}.$$

Обозначим через P проектор, действующий в пространстве $\widetilde{l}_p$ по правилу: $P\{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\cdots, 0, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$ и $Q = I - P$.

Каждой функции $a(t)$, интегрируемой на единичной окружности, сопоставим линейный оператор T_a, определенный в пространстве $\widetilde{l}_p$ матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $a_j (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ — коэффициенты Фурье функции $a(t)$.

Через R_p обозначается множество функций $a(t)$, для которых оператор T_a ограничен в пространстве $\widetilde{l}_p$.

Приведем две вспомогательные леммы, доказательства которых можно найти в [1].

Лемма 1. *Если $a(t) \in R_p$ $(1 < p < \infty)$, то выполняется неравенство:*

$$\|T_a\|_{\tilde{l}_p} \geqslant \operatorname{ess\,sup}_{|t|=1} |a(t)|.$$

Лемма 2. *Пусть $a(t) \in R_p$ $(1 < p < \infty)$. Если $a(t)$ отлична от нуля на множестве положительной меры, то хотя бы одно из уравнений*

$$(T_a P + Q)\varphi = 0 \quad (\varphi \in \tilde{l}_p), \; (T_{\bar{a}} P + Q)\psi = 0 \, (\psi \in \tilde{l}_q, \; p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

имеет единственное нулевое решение.

Если $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — какая-нибудь последовательность комплексных чисел, то через C_φ обозначим матрицу $\|c_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $c_{jk} = \varphi_{j-k}$ при $j-k > 0$ и $c_{jk} = 0$ при остальных j и k, а через B_φ — матрицу $\|b_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $b_{jk} = \varphi_{j-k}$ при $j-k \leqslant 0$ и $b_{jk} = 0$ при остальных j и k.

Если $A = \|a_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, то через A' обозначается транспонированная матрица $\|a_{kj}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, а через $\overline{A}$ — матрица $\|\overline{a}_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$. Через A^* будем обозначать сопряженную матрицу $(\overline{A})'$.

2. Определение факторизации. Пусть $a(t) \in L_\infty$. Факторизацией матрицы T_a в пространстве $\tilde{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ называется ее представление в виде

$$T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — целое число, а матрицы B_ξ и C_η удовлетворяют следующим условиям:

1) $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_p$, $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q \cdot (p^{-1} + q^{-1} = 1)$, матрицы B_ξ и C_η обратимы, причем $B_\xi^{-1} = B_h$, $h = \{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q$, $C_\eta^{-1} = C_s$, $s = \{s_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in$ $\in \tilde{l}_p$;

2) оператор $B_\xi P B_\xi^{-1}$ ограничен в пространстве $\tilde{l}_p$.

Лемма 3. *В факторизации (1) число $\varkappa$ определяется единственным способом, а матрицы B_ξ и C_η — с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Действительно, пусть $T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta$ и $T_a = B_{\xi'} T_{t^{\varkappa'}} C_{\eta'}$, где B_ξ, $B_{\xi'}$, C_η, $C_{\eta'}$ удовлетворяют условиям 1) и 2).

Допустим, что $\varkappa > \varkappa'$. Так как левая часть равенства

$$C_\eta C_{\eta'}^{-1} = B_\xi^{-1} B_{\xi'} T_{t^{\varkappa'-\varkappa}}$$

является нижне треугольной матрицей, а правая часть — верхне треугольной с нулями на главной диагонали, то $C_\eta C_{\eta'}^{-1} = 0$. Это противоречит определению C_τ. Следовательно, $\varkappa \leqslant \varkappa'$. Аналогично доказывается, что $\varkappa \geqslant \varkappa'$. Таким образом, $\varkappa = \varkappa'$.

Итак, имеем $T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_{\tau_1}$, $T_a = B_{\xi'} T_{t^\varkappa} C_{\tau_1'}$. Из этих равенств следует равенство $C_{\tau_1} C_{\tau_1'}^{-1} = B_\xi^{-1} B_{\xi'}$, из которого заключаем, что

$$C_{\tau_1} C_{\tau_1'}^{-1} = B_\xi^{-1} B_{\xi'} = \alpha I,$$

где I — единичная матрица. Следовательно, $C_{\tau_1} = \alpha C_{\tau_1'}$, $B_\xi = \alpha^{-1} B_{\xi'}$.

Лемма доказана.

3. Критерий возможности факторизации в пространствах $\tilde{l}_p$. В этом пункте устанавливается критерий возможности факторизации матрицы T_a в пространствах $\tilde{l}_p$.

Теорема 1. *Пусть $a^{-1}(t) \in \mathrm{R}_p$ $(1 < p < \infty)$. Для того чтобы матрица T_a допускала факторизацию* (1) *в пространстве $\tilde{l}_p$ необходимо и достаточно, чтобы оператор $A = T_a P + Q$ был Ф-оператором в пространстве $\tilde{l}_p$*.*

Если A является Ф-оператором, то

$$\varkappa = -\operatorname{ind} A.$$

Доказательство. Доказательство необходимости условий теоремы аналогично доказательству, проведенному в [1, теорема 3.1, стр. 272].

Докажем ее достаточность. Пусть оператор $A = T_a P + Q$ является Ф-оператором в пространстве $\tilde{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ и его индекс равен $\varkappa$.

Из равенств

$$T_a P + Q = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)(T_{t^\varkappa} P + Q) \quad (\varkappa > 0),$$

$$T_{at^{-\varkappa}} P + Q = (T_a P + Q)(T_{t^{-\varkappa}} P + Q) \quad (\varkappa < 0)$$

следует, что $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ является Ф-оператором с нулевым индексом. Отсюда и из леммы 2 следует, что оператор $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ обратим в пространстве $\tilde{l}_p$. Тогда из равенства

$$T_{\bar{a}t^\varkappa} P + Q = (I - P\, T_{\bar{a}}^{-}{}_{t^\varkappa} Q)(T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^* (I + Q T_{\bar{a}t^\varkappa}^{-} P)$$

вытекает, что оператор $T_{\bar{a}t^\varkappa} P + Q$ является обратимым в пространстве $\tilde{l}_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

---

* Оператор A называется Ф-оператором, если он нормально разрешим и числа $\alpha = \dim \ker A$ и $\beta = \dim \operatorname{coker} A$ конечны. Разность $\varkappa = \alpha - \beta$ называется индексом оператора A.

Обозначим через $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_p$ решение уравнения $(T_{a\iota^{-x}} P + Q)\xi = e_0$, а через $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q$—решение уравнения $(T_{\bar{a}\iota^x} P + Q)\eta = e_0$, где $e_0 = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{1}, 0, \cdots\}$. Тогда имеют место следующие матричные равенства

$$T_{a\iota^{-x}} C_\xi = -B_\xi + (1+\xi_0) I, \tag{2}$$

$$T_{\bar{a}\iota^x} C_\eta = -B_\eta + (1+\eta_0) I. \tag{3}$$

Переходя в (3) к сопряженным матрицам, получим

$$C_\eta^* T_{a\iota^{-x}} = -B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0) I. \tag{4}$$

Умножая (2) слева на матрицу C_η^* и учитывая (4), получим

$$[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0) I] C_\xi = C_\eta^* [-B_\xi + (1+\xi_0) I].$$

Так как левая часть последнего равенства есть нижне треугольная матрица, а правая часть — верхне треугольная, то отсюда вытекает, что

$$[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0) I] C_\xi = C_\eta^* [-B_\xi + (1+\xi_0) I] = \xi_0 I = \bar{\eta}_0 I. \tag{5}$$

Покажем, что $\xi_0 \neq 0$. Если $\xi_0 = 0$, то равенство (5) принимает вид

$$(-B_\eta^* + I) C_\xi = C_\eta^* (-B_\xi + I),$$

откуда следует, что $\xi_j = 0$ при $j = 1, 2, \cdots$. Но это противоречит тому, что $\xi = \{\xi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ есть решение уравнения $(T_{a\iota^{-x}} P + Q)\xi = e_0$.

Но $\xi_0^{-1}[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0) I] = C_\varphi$, где $\varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q$, $\varphi_j = -\xi_0^{-1}\bar{\eta}_{-j}$

$$(j = \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad \varphi_0 = \xi_0^{-1}; \quad \xi_0^{-1} C_\eta^* = B_\psi,$$

где

$$\psi = \{\psi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q, \quad \psi_j = \xi_0^{-1}\bar{\eta}_{-j} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$-B_\xi + (1+\xi_0) I = B_h, \quad h = \{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_p, \quad h_j = -\xi_j (j = \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad h_0 = 1.$$

Таким образом, имеем $C_\varphi C_\xi = C_\xi C_\varphi = I$, $B_\psi B_h = B_h B_\psi = I$.

Умножая (2) на матрицу C_φ получим $T_{a\iota^{-x}} = B_h C_\varphi$, откуда вытекает следующее представление для T_a:

$$T_a = B_h T_{\iota^x} C_\varphi.$$

Нам осталось проверить, что оператор $B_h P B_h^{-1}$ ограничен в пространстве $\tilde{l}_p$.

Рассмотрим два оператора $T_{a\iota^{-x}} P + Q$ и $(C_\varphi^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1}$.

Учитывая соотношения $C_\varphi^{\pm 1} P = P C_\varphi^{\pm 1} P$, $B_h^{\pm 1} Q = Q B_h^{\pm 1} Q$, легко проверить, что

$$[(C_\varphi^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1}] (T_{a\iota^{-x}} P + Q) = I.$$

Следовательно, оператор $(C_\varphi^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1} = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^{-1}$ ограничен в пространстве $\tilde{l}_p$. Его можно представить в виде

$$(C_\varphi^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1} = I - (I - T_{a^{-1}t^{\varkappa}}) B_h P B_h^{-1}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|T_{a^{-1}}\|_{\tilde{l}_p} < 1$.

Тогда из последнего равенства следует ограниченность оператора $B_h P B_h^{-1}$ в пространстве $\tilde{l}_p$.

Теорема доказана.

4. Приложения факторизации. В этом пункте приводятся некоторые следствия из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $a^{-1}(t) \in \mathrm{R}_p$ и матрица T_a допускает факторизацию $T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta$ в пространстве $\tilde{l}_p$ $(B_\xi B_\varphi = B_\varphi B_\xi = I$,*

$$C_\eta C_\psi = C_\psi C_\eta = I; \ \varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q, \ \psi = \{\psi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_p).$$

Тогда при $\varkappa < 0$

$$\ker(T_a P + Q) = \mathrm{L}\{\chi, U\chi, \cdots, U^{|\varkappa|-1}\chi\}, \tag{6}$$

где U — двусторонний сдвиг в $\tilde{l}_p$, определенный равенством $U\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{\cdots, \xi_{-2}, \underset{(0)}{\xi_{-1}}, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$, $a\chi = \{\cdots, -\xi_{-1}, \underset{(\varkappa)}{-\xi_0}, 0, \cdots, 0, \underset{(0)}{\psi_0}, \psi_1, \cdots\}$. *При $\varkappa > 0$*

$$\mathrm{co}\ker(T_a P + Q) = \mathrm{L}\{e_0, e_1, \cdots, e_{\varkappa-1}\}, \tag{7}$$

где $e_k = \{\cdots, 0, \underset{(k)}{1}, 0, \cdots\}$.

Уравнение $(T_a P + Q)x = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда

$$(U^{k-1}\omega)(y) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, \varkappa),$$

где $\omega = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{\bar{\varphi}_0}, \bar{\varphi}_{-1}, \bar{\varphi}_{-2}, \cdots\}$.

Доказательство. Пусть $\varkappa < 0$ и $\chi_k = U^{k-1}\chi$ $(k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|)$. Тогда, учитывая равенства $C_\eta C_\psi = C_\psi C_\eta = I$, легко проверить, что векторы χ_k удовлетворяют равенству

$$(T_a P + Q)\chi_k = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|).$$

Итак, $\mathrm{L}\{\chi, U\chi, U^2\chi, \cdots, U^{|\varkappa|-1}\chi\} \subseteq \ker(T_a P + Q)$. Учитывая, что $\dim\ker(T_a P + Q) = |\varkappa|$, а векторы χ_k $(k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|)$ линейно независимы, получим (6).

Пусть теперь $\varkappa > 0$. Рассмотрим вектор $\omega = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{\bar{\varphi}_0}, \bar{\varphi}_{-1}, \cdots\} \in \tilde{l}_q$. Учитывая равенства $B_\xi B_\varphi = B_\varphi B_\xi = I$, легко проверить, что векторы $\omega_k = U^{k-1}\omega$ $(k = 1, 2, \cdots, \varkappa)$ удовлетворяют равенству

$$(PT_a^- + Q)\,\omega_k = (T_a P + Q)^*\,\omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, \varkappa).$$

Следовательно, $L\{\omega, U\omega, \cdots, U^{\varkappa-1}\omega\} \subseteq \ker (T_a P + Q)^*$. Но так как $\dim \ker (T_a P + Q)^* = \varkappa$, а векторы ω_k $(k = 1, 2, \cdots, \varkappa)$ линейно независимы, то

$$L\{\omega, U\omega, \cdots, U^{\varkappa-1}\omega\} = \ker (T_a P + Q)^*.$$

Так как оператор $T_a P + Q$ нормально разрешим, то уравнение $(T_a P + Q)\,x = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для любого линейного, ограниченного функционала f, удовлетворяющего условию $(T_a P + Q)^* f = 0$. Поскольку $\varphi_0 \neq 0$, то легко заметить, что векторы e_k $(k = 0, 1, \cdots, \varkappa - 1)$ удовлетворяют условию

$$\omega_{k+1}(e_k) \neq 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, \varkappa - 1),$$

и, стало быть, $e_k \overline{\in} \operatorname{Im}(T_a P + Q)$. Учитывая, что $\dim \operatorname{co}\ker (T_a P + Q) = \varkappa$, получим (7).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при $\varkappa < 0$ оператор $T_a P + Q$ обратим справа, при $\varkappa > 0$ — обратим слева и обратный с соответствующей стороны определяется формулой*

$$(T_a P + Q)^{(-1)} = (T_{t^{-\varkappa}} P + Q)\,(C_\eta^{-1} P + B_\xi Q)\,B_\xi^{-1}. \tag{8}$$

Доказательство. Как было доказано в теореме 1, если матрица T_a допускает факторизацию $T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta$ в пространстве $\tilde{l}_p$, то оператор $T_a P + Q$ является Ф-оператором в $\tilde{l}_p$, $\operatorname{ind}(T_a P + Q) = -\varkappa$, оператор $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ обратим и обратный к нему определяется формулой

$$(T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^{-1} = (C_\eta^{-1} P + B_\xi Q)\,B_\xi^{-1}.$$

Пусть $\varkappa < 0$. Тогда $\operatorname{ind}(T_a P + Q) = -\varkappa > 0$ и, в силу леммы 2, оператор $T_a P + Q$ обратим справа. Используя представление $(T_{at^{-\varkappa}} P + Q) = (T_a P + Q)(T_{t^{-\varkappa}} P + Q)$, получим (8).

При $\varkappa > 0$ формула (8) получается из равенства

$$T_a P + Q = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)\,(T_{t^\varkappa} P + Q).$$

5. Факторизация в пространствах последовательностей с весом. Через $\tilde{l}_{p,\alpha}$ обозначается банахово пространство* всех двусторонних последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|\xi\| = (|\xi_0|^p + \sum_{|k|=1}^{\infty} |\xi_k k^\alpha|^p)^{1/p}.$$

---

* Подробнее об этом пространстве см. в [5].

Факторизацией матрицы T_a в пространстве $\widetilde{l}_{p,\varkappa}$ $(1<p<\infty)$ называется ее представление в виде

$$T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta, \tag{9}$$

где $\varkappa$ — целое число, а матрицы B_ξ и C_η удовлетворяют следующим условиям:

1) $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_{p,\alpha}$, $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_{q,-\alpha}$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, матрицы B_ξ и C_η обратимы, причем $B_\xi^{-1} = B_h$, $h = \{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_{q,-\alpha}$, $C_\eta^{-1} = C_s$, $s = \{s_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_{p,\alpha}$;

2) оператор $B_\xi P B_\xi^{-1}$ ограничен в пространстве $\widetilde{l}_{p,\alpha}$.

Легко видеть, что все предыдущие результаты переносятся на пространство $\widetilde{l}_{p,\alpha}$. Например, имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть операторы $T_a^{\pm 1}$ ограничены в пространстве $\widetilde{l}_{p,\alpha}$. Для того чтобы матрица T_a допускала факторизацию (9) в пространстве $\widetilde{l}_{p,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $T_aP + Q$ был Ф-оператором в пространстве $\widetilde{l}_{p,\alpha}$.*

Если $T_aP + Q$ является Ф-оператором, то

$$\varkappa = -\operatorname{ind}\,(T_aP + Q).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

§ 2. Факторизация матриц-функций

Если E — некоторое линейное пространство, то через E_n обозначается множество всех n-мерных векторов с компонентами из E, а через $E_{n\times n}$ — множество всех матриц n-ого порядка с элементами из E.

Если $X = \{X_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, где $X_k = \|x_k^{ij}\|_{i,j=1}^n$, то будем писать $X \in (\widetilde{l}_p)_n^n$, если $\{x_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_p$ при $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Через F_X обозначим блочную матрицу $\|F_{sm}\|_{s,m=-\infty}^{+\infty}$, где $F_{sm} = X_{s-m}$ при $s - m \geqslant 0$ и $F_{sm} = 0$ — для остальных s и m, а через G_X — блочную матрицу $\|G_{sm}\|_{s,m=-\infty}^{+\infty}$, где $G_{sm} = X_{s-m}$ при $s-m \leqslant 0$ и $G_{sm} = 0$ — для остальных s и m. Если $B = \|b_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ — блочная матрица, то через B^* обозначается матрица $\|b_{kj}^*\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$.

Пусть $A(\zeta) = \|a_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n$ — матрица-функция, принадлежащая $(L_\infty)_{n\times n}$, а $\{A_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ее матричные коэффициенты Фурье. Матрице-функции $A(\zeta)$ сопоставим линейный оператор T_A, определенный в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ блочной матрицей $\|A_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$. Через P обозначим проектор, определенный в $(\tilde{l}_p)_n$ равенством $\mathrm{P}=\|\delta_{jk}P\|_{j,k=1}^n$ и $\mathrm{Q}=I-\mathrm{P}$.

6. Определение факторизации. Пусть $A(\zeta)\in(L_\infty)_{n\times n}$. Факторизацией блочной матрицы T_A в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ называется ее представление в виде

$$T_A = G_X\, T_{U(\zeta)}\, F_Y, \tag{10}$$

где

$$1)\quad X=\{X_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in(\tilde{l}_p)_n^n;\ G_X^{-1}=G_\Omega,$$

$$\Omega=\{\Omega_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in(\tilde{l}_q)_n^n\ (p^{-1}+q^{-1}=1),\ \ Y=\{Y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in(\tilde{l}_q)_n^n,$$

$$F_Y^{-1}=F_\Psi,\ \Psi=\{\Psi_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in(\tilde{l}_p)_n^n;$$

2) матрица-функция $U(\zeta)$ имеет вид

$$U(\zeta)=\|\delta_{jk}\,\zeta^{\varkappa_j}\|_{j,k=1}^n,$$

где $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n$ — целые числа;

3) оператор $G_X\mathrm{P}\,G_X^{-1}$ ограничен в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$.

7. Факторизация матриц-функций. Основной в этом пункте является следующая

Теорема 5. *Пусть $A(\zeta)\in(L_\infty)_{n\times n}$ и операторы $T_A^{\pm1}$ ограничены в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ $(1<p<\infty)$. Для того чтобы блочная матрица T_A допускала факторизацию* (10) *в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$, необходимо и достаточно, чтобы $T_A\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ был Ф-оператором в $(\tilde{l}_p)_n$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Следуя [1], обозначим через $F\tilde{l}_p$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ множество всех функций $f(\zeta)\in L_2(\Gamma)$, где Γ — единичная окружность, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|f_j|^p<\infty.$$

Легко видеть, что $F\tilde{l}_p$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{F\tilde{l}_p}=\Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|f_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Через $(F\widetilde{l}_p)^+$ ($(F\widetilde{l}_p)^-$) обозначается подпространство всех функций из $F\widetilde{l}_r$, коэффициенты Фурье которых с отрицательными (положительными) индексами равны нулю.

Очевидно, пространства $F\widetilde{l}_p$ и $\widetilde{l}_p\,(1\leqslant p\leqslant 2)$ изометричны. Операторы, соответствующие проекторам P и Q в пространстве $F\widetilde{l}_p$ также будем обозначать через P и Q.

Обозначим через W изометрический оператор, отображающий $(F\widetilde{l}_p)_n$ на $(\widetilde{l}_p)_n$. Из легко проверяемого равенства

$$A(\zeta)\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}=W^{-1}(T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q})\,W$$

следует, что оператор $T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(\widetilde{l}_p)_n$ тогда и только тогда, когда $A(\zeta)\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(F\widetilde{l}_p)_n$, причем

$$\dim\ker(T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q})=\dim\ker(A(\zeta)\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}),$$

$$\dim\operatorname{co}\ker(T_A\mathrm{P}+\mathrm{Q})=\dim\operatorname{co}\ker(A(\zeta)\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}).$$

Лемма 4. *Пусть S — линейный, ограниченный, нетривиальный функционал над пространством $(F\widetilde{l}_p)_n$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$. Тогда существует точка ζ_0, $|\zeta_0|>1$, такая, что*

$$S\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right)\neq 0.$$

Доказательство. Обозначим через J изометрический оператор, отображающий $(F\widetilde{l}_p)^+$ на l_p. Очевидно

$$J\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right)=\{-\zeta_0^{-1},\ -\zeta_0^{-2},\cdots,-\zeta_0^{-n},\ \cdots\}.$$

Из равенства $(J^*)^{-1}S=\varphi\in l_q$ следует, что достаточно доказать следующее утверждение: пусть φ — линейный, ограниченный, нетривиальный функционал над пространством l_p. Тогда существует число α_0, $|\alpha_0|<1$ такое, что $\varphi(\{\alpha_0,\alpha_0^2,\cdots,\alpha_0^n,\cdots\})\neq 0$.

Допустим, что $\varphi(\{\alpha,\alpha^2,\cdots\})=0$ для всех α, $|\alpha|<1$ и покажем, что тогда $\varphi\equiv 0$.

Так как $\varphi(\{\alpha,\alpha^2,\cdots\})=\alpha\varphi(\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots\})$, то $\varphi(\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots\})=0$ для любого α, $|\alpha|<1$ и $\alpha\neq 0$. Учитывая непрерывность φ, отсюда легко получить, что $\varphi(\{1,0,0,\cdots\})=0$.

Пусть $\varphi=\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}\in l_q$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Тогда $\varphi(\xi)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\xi_j\overline{\varphi}_j$. Из равенства $\varphi(\{1,0,0,\cdots\})=0$ следует, что $\varphi_0=0$. Доказательство проведем индукцией по j. Пусть мы уже доказали, что $\varphi_0=\varphi_1=\cdots=\varphi_j=0$ и докажем, что $\varphi_{j+1}=0$.

Обозначим через V односторонний сдвиг в пространстве l_p, определенный равенством $V\{\xi_j\}_0^\infty = \{0, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$ и $\eta_\alpha = \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots\}$. Тогда из равенства

$$\alpha^{j+2} V^{j+2} \eta_\alpha = \eta_\alpha - \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{j+1}, 0, \cdots\}$$

и предположения индукции следует, что

$$\alpha^{j+2} \varphi\,(V^{j+2}\eta_\alpha) = -\bar{\varphi}_{j+1}\,\alpha^{j+1}.$$

Из этого равенства следует неравенство $|\bar{\varphi}_{j+1}| \leqslant |\alpha|\,\|\varphi\|\,\|\eta_\alpha\|$, которое справедливо для любого α, $|\alpha| < 1$ и $\alpha \neq 0$. Это и означает, что $\varphi_{j+1} = 0$. (При $p = 2$ это лемма есть задача 6 из книги П. Халмоша „Гильбертово пространство в задачах“).

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $A\mathrm{P} + \mathrm{Q}$ *является* Φ-*оператором в пространстве* $(F\tilde{l}_p)_n$ $(1 < p \leqslant 2)$. *Тогда можно подобрать такие рациональные, неособенные матрицы-функции* $R_1(\zeta)$ *и* $R_2(\zeta)$, *что оператор* $R_1 A R_2 \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ *обратим в пространстве* $(F\tilde{l}_p)_n$.

После того, как установлена предыдущая лемма, эта лемма доказывается точно так же, как аналогичная лемма из [3].

Матрицы-функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ имеют следующий вид:

$$R_1(\zeta) = \left\| \begin{matrix} \prod\limits_{l=1}^{\beta_1} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{l1}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \prod\limits_{l=1}^{\beta_2} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{l2}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \quad 0 & \cdots & 0 & \prod\limits_{l=1}^{\beta_n} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{ln}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \end{matrix} \right\|$$

$$R_2(\zeta) = \left\| \begin{matrix} \prod\limits_{l=1}^{\alpha_1} \dfrac{\zeta - \zeta_{l1}}{\zeta - \zeta_0} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \prod\limits_{l=1}^{\alpha_2} \dfrac{\zeta - \zeta_{l2}}{\zeta - \zeta_0} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ \cdots & 0 & \prod\limits_{l=1}^{\alpha_n} \dfrac{\zeta - \zeta_{ln}}{\zeta - \zeta_0} \end{matrix} \right\|,$$

где $|\tilde{\zeta}_{iA}| > 1$, $|\tilde{\zeta}_0| < 1$, $|\zeta_{iA}| < 1$, $|\zeta_0| > 1$;

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \dim \ker (AP + Q), \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \dim \operatorname{co} \ker (AP + Q).$$

Доказательство теоремы 5. Предположим сначала, что оператор $T_A P + Q$ обратим в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$. Легко проверить, что сопряженный оператор T_A^* совпадает с оператором T_{A^*}, где $A^*(\zeta) = \|\overline{a_{kj}}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n}$.

Из обратимости оператора $PT_A^* + Q$ в пространстве $(\tilde{l}_q)_n$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ и из равенства

$$PT_{A^*} + Q = (I + PT_{A^*}Q)(T_{A^*}P + Q)(I - QT_{A^*}P)$$

следует, что оператор $T_{A^*}P + Q$ также обратим в пространстве $(\tilde{l}_q)_n$.

Обозначим через $\xi^i = (\xi^{i1}, \xi^{i2}, \cdots, \xi^{in})(i=1, 2, \cdots, n)$ решения уравнений

$$(T_A P + Q)\xi^i = E_i \ (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{11}$$

где $E_i = (0, \cdots, 0, \underset{(i)}{e_0}, 0, \cdots, 0)$; $\xi^{ij} = \{\xi_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_p(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, а через $\eta^i = (\eta^{i1}, \eta^{i2}, \cdots, \eta^{in})(i=1, 2, \cdots, n)$ — решения уравнений

$$(T_{A^*}P + Q)\eta^i = E_i(i = 1, 2, \cdots, n), \tag{12}$$

где $\eta^{ij} = \{\eta_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}_q \ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

Из (11) и (12) вытекают следующие матричные равенства:

$$T_A F_\xi = (I_n + \xi_0) I - G_\xi, \tag{13}$$

$$T_{A^*} F_\eta = (I_n + \eta_0) I - G_\eta, \tag{14}$$

где

$$\xi = \{\xi_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \ \xi_k = \|\xi_k^{ji}\|_{i,j=1}^{n}; \quad \eta = \{\eta_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \ \eta_k = \|\eta_k^{ji}\|_{i,j=1}^{n}; \ I_n = \|\delta_{jk}\|_{j,k=1}^{n},$$

$$I = \|\delta_{jk} I_n\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}.$$

Из (14) имеем

$$F_\eta^* T_A = (I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*. \tag{15}$$

Умножая (13) слева на F_η^* и учитывая (15), получим

$$[(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] F_\xi = F_\eta^* [(I_n + \xi_0) I - G_\xi].$$

Так как левая часть этого равенства есть нижне треугольная матрица, а правая часть — верхне треугольная матрица, то отсюда следует, что

$$[(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] F_\xi = F_\eta^* [(I_n + \xi_0) - G_\xi] = \xi_0 I = \eta_0^* I. \tag{16}$$

Покажем, что $\det \xi_0 \neq 0$. Если $\det \xi_0 = 0$, то это означает, что между столбцами матрицы ξ_0 существует линейная зависимость. Тогда из (16) следует, что между столбцами матриц ξ_k $(k = 1, 2, \cdots)$ существует аналогичная линейная зависимость. Учитывая, далее, что векторы ξ^j являются решениями уравнений (11), приходим к противоречию.

Так как $\det \xi_0 \neq 0$, то матрица F_ξ обладает обратной матрицей, причем последняя также является нижне треугольной. Но тогда из (16) следует, что она совпадает с матрицей $\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]$.

Аналогичное рассуждение верно и для матрицы F_η^*.

Итак имеем

$$\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] F_\xi = F_\xi \{\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]\} = I,$$

$$[\xi_0^{-1} F_\eta^*] [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] = [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] [\xi_0^{-1} F_\eta^*] = I.$$

Из этих равенств и из (13) следует, что

$$T_A = [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] \{\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]\}.$$

Но

$$(\xi_0 + I_n) I - G_\xi = G_\varphi, \text{ где } \varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in (\widetilde{l_p})_n^n,$$

$$\varphi_j = -\xi_j (j = \pm 1, \pm 2, \cdots), \ \varphi_0 = I_n,$$

а

$$\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] = F_\psi, \text{ где } \psi = \{\psi_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in (\widetilde{l_q})_n^n,$$

$$\psi_k = -\xi_0^{-1} \eta_{-k}^* \ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots), \ \psi_0 = \xi_0^{-1}.$$

Таким образом

$$T_A = G_\varphi F_\psi.$$

Покажем, что оператор $G_\varphi P G_\varphi^{-1}$ ограничен в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$. Рассмотрим оператор $K = (F_\psi^{-1} P + G_\varphi Q) G_\varphi^{-1}$. Учитывая соотношения $P F_\psi^{\pm 1} P = F_\psi^{\pm 1} P$; $Q G_\varphi^{\pm 1} Q = G_\varphi^{\pm 1} Q$, легко проверить, что $K(T_A P + Q) = I$. Следовательно, оператор $K = (T_A P + Q)^{-1}$ ограничен в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$. Оператор K можно представить в виде

$$K = I - (I - T_A^{-1}) G_\varphi P G_\varphi^{-1}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что $\|T_A^{-1}\| < 1$. Тогда из последнего равенства следует ограниченность оператора $G_\varphi P G_\varphi^{-1}$ в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$.

Пусть теперь оператор $T_A P + Q$ является Ф-оператором в $(\widetilde{l_p})_n$. Предположим сначала, что $1 < p \leqslant 2$. Тогда, согласно лемме 5, можно подобрать рациональные, неособенные матрицы-функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ такие, что оператор $T_{R_1 A R_2} P + Q$ обратим в $(\widetilde{l_p})_n$. Согласно доказанной части теоремы, имеем

$$T_{R_1 A R_2} = G_2 F_2,$$

то есть

$$R_1(\zeta) A(\zeta) R_2(\zeta) = \tilde{A}_-(\zeta)\tilde{A}_+(\zeta), \tag{17}$$

где

$$\tilde{A}_-(\zeta) = \|b_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n \in (F\tilde{l}_p)^-_{n\times n}, \quad \tilde{A}_+(\zeta) = \|c_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n,$$

$$c_{jk}(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l^{jk}\zeta^l, \quad \sum_{l=0}^{\infty} |\gamma_l^{jk}|^q < \infty \ (j, k=1, 2, \cdots, n);$$

$$\tilde{A}_+^{-1}(\zeta) = \|d_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n \in (F\tilde{l}_p)^+_{n\times n}; \quad \tilde{A}_-^{-1}(\zeta) = \|g_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n,$$

$$g_{jk}(\zeta) = \sum_{l=0}^{-\infty} g_l^{jk}\zeta^l, \quad \sum_{l=0}^{-\infty} |g_l^{jk}|^q < \infty \ (j, k=1, 2, \cdots, n).$$

Из (17) имеем для $A(\zeta)$

$$A(\zeta) = R_1^{-1}(\zeta)\tilde{A}_-(\zeta)\tilde{A}_+(\zeta) R_2^{-1}(\zeta). \tag{18}$$

Элементы матрицы-функции $\tilde{A}_+(\zeta) R_2^{-1}(\zeta)$ являются аналитическими функциями внутри единичного круга, кроме, быть может, конечного числа точек, где могут иметь полюсы. Факторизуя $\tilde{A}_+(\zeta) R_2^{-1}(\zeta)$ [см. 2], получим

$$\tilde{A}_+(\zeta) R_2^{-1}(\zeta) = M_-(\zeta) D(\zeta) M_+(\zeta), \tag{19}$$

где $M_-^{\pm 1}(\zeta)$ — неособенные, рациональные матрицы-функции, элементы которых аналитичны вне единичного круга, $D(\zeta) = \|\delta_{jk}\zeta^{m_j}\|_{j,k=1}^n$, m_j — целые числа, а $M_+(\zeta)$ принадлежит тому же классу, что и $\tilde{A}_+(\zeta)$.

Из (18) и (19) следует, что

$$A(\zeta) = R_1^{-1}(\zeta)\tilde{A}_-(\zeta) M_-(\zeta) D(\zeta) M_+(\zeta).$$

Элементы матрицы-функции $R_1^{-1}(\zeta)\tilde{A}_-(\zeta) M_-(\zeta) D(\zeta)$ являются аналитическими функциями вне единичного круга, кроме, быть может, конечного числа точек, где могут иметь полюсы. Факторизуя матрицу-функцию $R_1^{-1}(\zeta)\tilde{A}_-(\zeta) M_-(\zeta) D(\zeta)$ [см. 2], получим

$$R_1^{-1}(\zeta)\tilde{A}_-(\zeta) D(\zeta) M_-(\zeta) = A_-(\zeta) U(\zeta) C_+(\zeta),$$

где $C_+^{\pm 1}(\zeta)$ — рациональные, неособенные матрицы-функции, принадлежащие $(F\tilde{l}_p)^+_{n\times n}$, $U(\zeta) = \|\delta_{jk}\zeta^{\varkappa_j}\|_{j,k=1}^n$, $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа, а $A_-(\zeta)$ принадлежит тому же классу, что и $\tilde{A}_-(\zeta)$.

Таким образом

$$A(\zeta) = A_-(\zeta) U(\zeta) A_+(\zeta),$$

где $A_+(\zeta) = C_+(\zeta) M_+(\zeta)$. Следовательно

$$T_A = T_{A-}\, T_{U(\zeta)}\, T_{A+} = G_\xi\, T_{U(\zeta)}\, F_\eta.$$

Оператор $G_\xi \mathrm{P} G_\xi^{-1}$ ограничен в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$, так как оператор $G_\rho \mathrm{P}\, G_\rho^{-1}$ ограничен в $(\widetilde{l_p})_n$, а все последующие преобразования заключаются в умножении $\widetilde{A}_+ (\zeta)$ и $\widetilde{A}_- (\zeta)$ на рациональные, неособенные матрицы-функции.

Достаточность условий теоремы в случае $1 < p \leqslant 2$ доказана. Докажем их необходимость.

Пусть блочная матрица T_A допускает факторизацию (10) в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$. Образуем оператор

$$H = (F_Y^{-1} \mathrm{P} + G_X \mathrm{Q}\, (T_U^{-1}\ \mathrm{P} + \mathrm{Q})\, G_X^{-1}\, .$$

Представим его в виде суммы трех операторов:

$$H = F_Y^{-1}\, \mathrm{P}\, T_U^{-1}\, \mathrm{P}\ G_X^{-1} + G_X\, \mathrm{Q}\, T_U^{-1}\, \mathrm{P}\, G_X^{-1} + G_X\ \mathrm{Q}\, G_X^{-1}\, .$$

Последнее слагаемое ограничено в силу определения факторизации. Второе слагаемое, как легко видеть, также ограничено (конечномерно). Рассмотрим первое слагаемое. Оператор $F_Y^{-1}\ T_U^{-1}\ \mathrm{P}\ G_X^{-1} = T_A^{-1}\ G_X\ \mathrm{P}\ G_X^{-1}$ ограничен, а разность

$$F_Y^{-1}\ T_U^{-1}\, \mathrm{P} G_X^{-1} - F_Y^{-1}\, \mathrm{P}\, T_U^{-1}\, \mathrm{P}\ G_X^{-1} = F_Y^{-1}\, \mathrm{Q}\, T_U^{-1}\, \mathrm{P} G_X^{-1}\, ,$$

как легко видеть, есть конечномерный ограниченный оператор. Следовательно, ограниченно и первое слагаемое, а вместе с ним и H.

Легко проверить, что оператор H удовлетворяет равенству

$$(T_A\, \mathrm{P} + \mathrm{Q})\, H\, (T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = T_A\, \mathrm{P} + \mathrm{Q},$$

откуда следует нормальная разрешимость оператора $T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ [1].

Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать, что имеют место равенства

$$\dim \ker\, (T_A\, \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j,\ \dim \mathrm{co}\ker\, (T_A\, \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j.$$

Покажем, что числа $\varkappa_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ в факторизации (10) определяются единственным образом. Действительно, пусть

$$T_A = G_{X'}\, T_{U'(\zeta)}\, F_{Y'},\ \text{где}\ U'(\zeta) = \| \delta_{jk}\, \zeta^{\varkappa_j'} \|_{j,\,k=1}^{n},\ \varkappa_1' \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n'$$

— другая факторизация. Тогда имеют место равенства

$$\dim \ker (T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = -\sum_{\varkappa'_j < 0} \varkappa'_j, \quad \dim \ \mathrm{co}\ker (T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \sum_{\varkappa'_j > 0} \varkappa'_j .$$

Повторяя все предыдущие рассуждения для матрицы-функции $\zeta^{-r}A(\zeta)$, где r — целое число, получим

$$\sum_{\varkappa_j > r} (\varkappa_j - r) = \sum_{\varkappa'_j > r} (\varkappa'_j - r), \quad \sum_{\varkappa_j < r} (\varkappa_j - r) = \sum_{\varkappa'_j < r} (\varkappa'_j - r)$$

для любого целого r. Отсюда следует, что $\varkappa_j = \varkappa'_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$.

При $2 < p < \infty$ надо рассмотреть оператор $T_{A^*} \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ в пространстве $(\bar{l}_q)_n$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(\bar{l}_p)_n$. Если уравнение $(T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}) \varphi = f$ разрешимо, то одно из решений дается формулой $\varphi = Hf$.

Следствие 2. Для того чтобы оператор $T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ был обратим (обратим слева, обратим справа), необходимо и достаточно, чтобы все числа $\varkappa_j$ были равны нулю (были неотрицательны, неположительны). В любом случае, обратный с соответствующей стороны совпадает с H.

В заключение отметим, что все предыдущие результаты переносятся на пространства $(\bar{l}_{p,\,\circ})_n$.

Институт математики АН
Армянской ССР

Поступила 13.VI.1973

Հ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Տեպլիցյան մատրիցաներով որոշված օպերատորների մասին (ամփոփում)

Ի. Բ. Սիմոնենկոյի, Ի. Ց. Գոխբերգի և Ն. Յա. Կրուպնիկի աշխատություններում մտցված է ֆունկցիաների և մատրից-ֆունկցիաների ընդհանրացված ֆակտորիզացիայի գաղափարը L_p կշռով տարածություններում և ստացված է ֆակտորիզացիայի հայտանիշը։

Ներկա հոդվածում այդ արդյունքները տարածվում են l_p կշռով տարածությունների վրա։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են տեպլիցյան մատրիցների հակադարձման համար։

G. V. AMBARTZUMIAN. *On the operators, defined by Teoplitz matrices* (summary)

A criterion of possibility of factorization of limited measurable functions and matrix functions in weighted spaces L_p has been established in the works of I. B. Simonenko, I. Z. Gohberg and N. Y. Kroupnik.

In this paper the results on factorization are extended to the case of l_p sequence spaces with weights. The results are used for the inversion of Teoplitz matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Штиинца. Кишинев, 1973.
2. *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман*. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, „Наука", 1971.
3. *И. Б. Симоненко*. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 277—306.
4. *И. Б. Симоненко*. Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1138—1147.
5. *Р. В. Дудучава*. Дискретные уравнения Винера—Хопфа в пространствах l_p с весом, Сообщ. АН Груз. ССР, 67, № 1, 1972.