ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4. 1974 Математика

Б. С. РУБИН

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА С ВЕСОМ И ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

В настоящей статье исследуется поведение операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля, в гельдеровых пространствах с весом. Свойства этих операторов применяются к изучению операторов типа потенциала

$$(K\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b\frac{c(x,\ y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

с точки зрения их нетеровости в указанных пространствах.

Вопросы нетеровости операторов вида (1) рассматривались в работах С. Г. Самко [4]—[6] и автора [11]—[13]. При этом для оператора K, не являющегося (см. [4]), вообще говоря, нетеровым из банахова пространства B в себя, была получена нетеровость из B в некоторое специальное пространство $I^\alpha(B)$. В работах [4]—[6], [11]—[13] рассматривались случаи $B=L_p$ и $B=L_p(\rho)$. При этом пространства $I^\alpha(L_p)$, $I^\alpha(L_p(\rho))$ описывались в терминах дробных производных. Представляется естественным построить такие пространства B, чтобы оператор K был нетеровым из B в $I^\alpha(B)$ и чтобы пространство $I^\alpha(B)$ описывалось в таких же простых терминах, как и само пространство B. Такими пространствами оказались весовые пространства $H_\mu^0(\rho)$ гельдеровских функций. Оператор K, как показывается в теореме II § 3, действует как нетеров оператор из пространства $H_\mu^0(\rho)$ в пространство $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$, $\mu+\alpha<1$. Это утверждение основывается на представляющей самостоятельный интерес теореме I о гомеоморфности пространств $H_\mu^0(\rho)$ и $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ относительно операторов дробного интегрирования порядка α, обобщающей некоторые теоремы Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтлвуда ([1], теоремы 14, 19, 20). В наших доказательствах мы опираемся на некоторые результаты Р. В. Дудучавы ([7]—[10]) о поведении сингулярных интегральных операторов в пространстве $H_\mu^0(\rho)$.

§ 1. Некоторые вспомогательные сведения

1°. Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n$ — некоторые точки конечного отрезка $[a,\ b]$ $(a\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant b)$, $\rho(x)$ — весовая функция вида

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^n|x-a_k|^{\alpha_k}, \tag{1.1}$$

где α_k — неотрицательные числа. Через H_μ обозначим банахово пространство функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Гельдера порядка μ, с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{H_\mu} = \sup_{x_1, x_2 \in [a, b];\ x_1 \neq x_2} \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} + \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|.$$

Следуя статье [10], обозначим: через $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$ подпространство пространства H_μ, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль в точках $a_1, \cdots, a_n$; через $H_\mu^0(\rho)$—банахово пространство функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условию $\rho(x)\psi(x) \in H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$, с нормой $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)} = \|\rho\psi\|_{H_\mu}$. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, будем иногда писать просто $\|\psi\|$ вместо $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)}$.

Отметим следующие простые свойства функций из пространства $H_\mu^0(\rho)$, которые нам в дальнейшем понадобятся*.

Свойство 1°. Пусть $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$, $g(x) \in H_\nu$. Тогда

$$F(x) = f(x)\, g(x) \in H_\lambda^0(\rho),$$

где $\lambda = \min(\mu, \nu)$ и $\|F\|_{H_\lambda^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H_\mu^0(\rho)} \|g\|_{H_\nu}$.

Свойство 2°. Пусть $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на отрезке $[a, b]$; $[\bar{a}, \bar{b}]$— некоторый отрезок, содержащийся в $[a, b]$; $\{a_s\}$ — точки из совокупности $\{a_1, \cdots, a_n\}$, которые принадлежат $[\bar{a}, \bar{b}]$; $r(x) = \prod_s |x - a_s|^{\alpha_s}$. Тогда сужение $f_{\bar{a}, \bar{b}}(x)$ функции $f(x)$ на отрезок $[\bar{a}, \bar{b}]$ принадлежит пространству $H_\mu^0(r)$ на $[\bar{a}, \bar{b}]$ и $\|f_{\bar{a}, \bar{b}}\|_{H_\mu^0(r)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H_\mu^0(\rho)}$.

Свойство 3°. Пусть функция $\rho(x)\, f(x)$, заданная на $[a, b]$, непрерывна в некоторой точке $c \in (a, b)$, а сужения f_{ac}, f_{cb} функции $f(x)$ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ принадлежат на соответствующих отрезках пространствам $H_\mu^0(\rho_1)$, $H_\mu^0(\rho_2)$, где $\rho_1(x) = \prod_s |x - a_s|^{\alpha_s}$, $a_s \in [a, c]$, $\rho_2(x) = \prod_m |x - a_m|^{\alpha_m}$, $a_m \in [c, b]$. Тогда $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на $[a, b]$ и $\|f\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const}\max(\|f_{ac}\|_{H_\mu^0(\rho_1)};\ \|f_{cb}\|_{H_\mu^0(\rho_2)})$.

2°. Введем обозначения для операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля:

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}}; \quad (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(y)\, dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \tag{1.2}$$

и для сингулярного оператора

---

* Аналогичные свойства можно найти в [2], [9]. В настоящей работе нам важно подчеркнуть ограниченность различных операций над функциями из $H_\mu^0(\rho)$.

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}.$$

Известна ([3]) следующая связь между дробными интегралами (1.2) и оператором S:

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha}(\cos(\alpha\pi)\varphi + \sin(\alpha\pi)\, r_a^{-1} S r_a \varphi), \tag{1.3}$$

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = I_{b-}^{\alpha}(\cos(\alpha\pi)\varphi - \sin(\alpha\pi)\, r_b^{-1} S r_b \varphi), \tag{1.4}$$

где $r_a(x) = (x-a)^{\alpha}$, $r_b(x) = (b-x)^{\alpha}$. Эти равенства справедливы на функциях класса $H_{\mu}^{0}(\rho)$, если вес $\rho(x)$ удовлетворяет условию $\alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, \cdots, n$. В силу теоремы об ограниченности оператора S в пространствах Гельдера с весом ([7], [10]) из соотношений (1.3), (1.4) вытекает следующая

Лемма 1.1. I. Если $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$, $\mu < \alpha_k < \mu + 1, k = 1, \cdots, n-1$; $\mu + \alpha < \alpha_n < \mu + 1$, то $f = I_{b-}^{\alpha}\psi$, где $\psi = \cos(\alpha\pi)\varphi - \sin(\alpha\pi)\, r_b^{-1} S r_b \varphi \in I_{\mu}^{0}(\rho)$, причем $\|\psi\| \leqslant \mathrm{const}\, \|\varphi\|$.

II. Если $f = I_{b-}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$, $\mu + \alpha < \alpha_1 < \mu + 1$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1$, $k = 2, \cdots, n$, то $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi = \cos(\alpha\pi)\psi + \sin(\alpha\pi)\, r_a^{-1} S r_a \psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$ и $\|\varphi\| \leqslant \mathrm{const}\, \|\psi\|$.

Отметим еще две теоремы о сужении дробных интегралов и о продолжении дробных интегралов нулем, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1.1 (о сужении дробных интегралов). Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, представима в виде $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$; $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1, k = 1, 2, \cdots, n$.

Пусть далее, $[a_l, c]$; $a < a_l < c \leqslant b$ — некоторый отрезок, содержащийся в $[a, b]$; $\{a_s\}$ — точки из совокупности $\{a_1, \cdots, a_n\}$, принадлежащие $[a_l, c]$; $r(x) = \prod_s |x - a_s|^{\alpha_s}$. Тогда сужение $f_{a_l c}(x)$ функции $f(x)$ на отрезок $[a_l, c]$ при выполнении условия $\mu + \alpha < \alpha_l$ представимо в виде $f_{a_l c} = I_{a_l+}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(r)$ на $[a_l, c]$ и $\|\psi\|_{H_{\mu}^{0}(r)} \leqslant \mathrm{const}\, \|\varphi\|_{H_{\mu}^{0}(\rho)}$.

Теорема 1.2 (о продолжении дробных интегралов нулем). Пусть $a = a_1 < \cdots < a_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ и на каком-нибудь промежутке $[a_j, a_{j+1}]$, $j < n-1$, задана функция $f(x) = (I_{a_j+}^{\alpha}\varphi)(x)$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(r_j)$ на $[a_j, a_{j+1}]$, $r_j(x) = |x - a_j|^{\alpha_j} \times |x - a_{j+1}|^{\alpha_{j+1}}$. Тогда заданная на $[a, b]$ функция

$$\tilde{f}(x) = \{f(x),\ x \in [a_j, a_{j+1}];\ 0,\ x \in [a, b] \setminus (a_j, a_{j+1})\}$$

представима в виде $\tilde{f} = I_{a+}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$ на $[a, b]$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $0 \leqslant \alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, \cdots, j-1$, $\mu + \alpha < \alpha_{j+1} < \mu + 1$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1$, $k = j, j+2, \cdots, n$, причем $\|\psi\|_{H_{\mu}^{0}(\rho)} \leqslant \mathrm{const}\, \|\varphi\|_{H_{\mu}^{0}(r_j)}$.

Теоремы 1.1 и 1.2 в рамках пространств L_p доказаны в [12]. Мы не останавливаемся на их доказательстве для класса $H_\mu^0(\rho)$, поскольку оно совершенно аналогично доказательству в [12] и основывается на применении свойств 1°—3° и теоремы об ограниченности оператора S в $H_\mu^0(\rho)$.

Замечание к теореме 1.2. Рассмотрим отдельно не содержащийся в теореме 1.2 случай, когда функция f задана дробным интегралом из отрезке $[a_{n-1}, b]: f = I^\alpha_{a_{n-1}+}\varphi$, где $\varphi \in H_\mu^0(\rho_{n-1})$ на $[a_{n-1}, b]$. Тогда $\bar{f}(x) = (I^\alpha_{a+}\psi)(x)$, где $\psi(x) = \{0,\ x < a_{n-1};\ \varphi(x),\ x \geqslant a_{n-1}\}$. Если $\rho_{n-1}(x) = (x - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$, то $\psi \in H_\mu^0(\rho')$ на $[a, b]$, где $\rho'(x) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \cdots, n-1$. Если же $\rho_{n-1}(x) = (x - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(b - x)^{\alpha_n}$, то $\psi \in H_\mu^0(\rho)$, где $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

§ 2. Теорема о гомеоморфизме гельдеровых пространств с весом, осуществляемом операторами дробного интегрирования

В этом параграфе будет получен один из основных результатов настоящей статьи, касающийся поведения операторов дробного интегрирования в весовых пространствах гельдеровских функций.

Теорема I. *Пусть весовая функция $\rho(x)$ имеет вид* (1.1), *где $a_1 = a$. Тогда при выполнении условий*

$$\mu + \alpha < 1,\ 0 \leqslant \alpha_1 < \mu + 1,\ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1,\ k = 2, \cdots, n, \quad (2.1)$$

оператор I^α_{a+} гомеоморфно отображает пространство $H_\mu^0(\rho)$ на пространство $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

Аналогичное утверждение справедливо для оператора I^α_{b-}, если $a_n = b$ и имеют место неравенства

$$\mu + \alpha < 1;\ 0 \leqslant \alpha_n < \mu + 1;\ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1,\ k = 1, 2, \cdots, n-1. \quad (2.2)$$

Заметим, что если в сформулированной теореме положить $\rho(x) = 1$ и обращение в нуль функций потребовать только в точке $x = a$, то мы получим утверждение, доказанное ранее Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтлвудом ([1], теоремы 14, 19, 20).

Доказательство теоремы I довольно громоздкое, поэтому для удобства восприятия мы решили разбить его на несколько этапов, содержание каждого из которых излагается в виде отдельной леммы.

1°. Лемма 2.1. *Пусть $0 \leqslant \alpha_a < \mu + 1$ и $\mu + \alpha < 1$. Тогда оператор I^α_{a+} ограниченно действует из $H_\mu^0((x-a)^{\alpha_a})$ в $H_{\mu+\alpha}^0((x-a)^{\alpha_a})$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in H_\mu^0((x - a)^{\alpha_a})$, то есть $\varphi(x) = \psi(x)(x - a)^{-\alpha_a}$, где $\psi(x) \in H_\mu^0(a)$. Нам нужно показать, что

$$F(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{y-a}\right)^{\alpha_a}\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\in H^0_{\mu+\alpha}(a) \text{ и } \|F\|_{H_{\mu+\alpha}}\leqslant \text{const}\,\|\psi\|_{H_\mu}.$$

Имеем: $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где

$$F_1(x)=\int_a^x\frac{[(x-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]\,\psi(y)}{(y-a)^{\alpha_a}(x-y)^{1-\alpha}}dy,\quad F_2(x)=\int_a^x\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}.$$

В силу теоремы 14 из [1]

$$|F_2(x+h)-F_2(x)|\leqslant \text{const}\,h^{\mu+\alpha}\|\psi\|_{H_\mu} \tag{2.3}$$

для любых $x,\ x+h\in[a,\ b]$.

Для $F_1(x)$ имеем:

$$F_1(x+h)-F_1(x)=F_{11}(x)+F_{12}(x)+F_{13}(x), \text{ где}$$

$$F_{11}(x)=\int_x^{x+h}\frac{[(x+h-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]\,\psi(y)\,dy}{(y-a)^{\alpha_a}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{12}(x)=[(x+h-a)^{\alpha_a}-(x-a)^{\alpha_a}]\int_a^x\frac{\psi(y)\,dy}{(y-a)^{\alpha_a}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{13}(x)=\int_a^x\frac{\psi(y)\,[(x-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]}{(y-a)^{\alpha_a}}\,[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\,dy.$$

Оценим, например, первое слагаемое. Если $\alpha_a\leqslant 1$, то

$$|F_{11}|\leqslant \alpha_a\|\psi\|\int_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}}{(y-a)^{1-\mu}}\leqslant \text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha}, \tag{2.4}$$

в силу неравенства $(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}\leqslant\lambda hr^{\lambda-1}$, $r>0$. Если же $\alpha_a>1$, то

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|(x+h-a)^{\alpha_a-1}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-a)^{\alpha_a-\mu}}.$$

Отсюда при $x-a\leqslant h$

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|(x+h-a)^{\alpha_a-1}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-x)^{\alpha_a-\mu}}\leqslant \text{const}\,\|\psi\|\left(\frac{x+h-a}{h}\right)^{\alpha_a-1}\times$$

$$\times\, h^{\mu+\alpha}\leqslant \text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha}, \tag{2.5}$$

а при $x-a>h$

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|\left(\frac{x+h-a}{x-a}\right)^{\alpha_a-1}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-x)^{1-\mu}}\leqslant \text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha}. \tag{2.6}$$

Величины F_{12}, F_{13} оцениваются аналогично, так что

$$|F_1(x+h)-F_1(x)| < \text{const}\, \|\psi\|\, h^{\mu+\alpha}. \tag{2.7}$$

Из оценок (2.3) и (2.7), учитывая неравенство $|F(x)| \leqslant \text{const} \times \times \|\psi\| (x-a)^{\mu+\alpha}$, получаем утверждение леммы.

Аналогичная лемма имеет место и для оператора I_{b-}^{α}:

Лемма 2.1′. *Пусть* $0 \leqslant \alpha_b < \mu+1$, $\mu+\alpha<1$. *Тогда оператор* I_{b-}^{α} *ограничен из* $H_\mu^0((b-x)^{\alpha_b})$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0((b-x)^{\alpha_b})$.

2°. Обобщим теперь утверждения лемм 2.1 и 2.1′ на случай веса вида (1.1).

Лемма 2.2. *Пусть* $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\alpha_k}$, $a=a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant b$; $\mu+\alpha<1$;

$$0\leqslant \alpha_1<\mu+1;\quad \mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1,\quad k=2, 3, \cdots, n. \tag{2.8}$$

Тогда оператор I_{a-}^{α} *ограниченно действует из* $H_\mu^0(\rho)$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in H_\mu^0(\rho)$. Выбрав произвольно точку $c \in (a_1, a_2)$, построим функции

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x\leqslant c, \\ \varphi(c), & x\geqslant c, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x\leqslant c, \\ \varphi(x)-\varphi(c), & x\geqslant c, \end{cases}$$

так что $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$. В силу свойств 2° и 3° (§ 1) $\varphi_1 \in H_\mu^0(\rho_1)$, где $\rho_1(x)=(x-a)^{\alpha_1}$, причем $\|\varphi_1\|_{H_\mu^0(\rho_1)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$. Отсюда на основании леммы 2.1

$$f_1(x) = (I_{a+}^{\alpha}\varphi_1)(x) \in H_{\mu+\alpha}^0(\rho_1) \subset H_{\mu+\alpha}^0(\rho) \tag{2.9}$$

и

$$\|f_1\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi_1\|_{H_\mu^0(\rho_1)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}.$$

Покажем теперь, что $f_2(x)=(I_{a+}^{\alpha}\varphi_2)(x) \in H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ и $\|f_2\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)} \leqslant \text{const} \times \times \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$.

Возьмем сначала весовую функцию $\rho_0(x)=(x-a)^{\nu}\prod\limits_{k=2}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, где ν — некоторое число из интервала $(\mu+\alpha, 1)$. Замечая, что

$$\varphi_2 \in H_\mu^0(\rho_0) \quad \text{и} \quad \|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}, \tag{2.10}$$

докажем справедливость следующих соотношений:

$$f_2 \in H_{\mu+\alpha}^0(\rho_0),\quad \|f_2\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho_0)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}. \tag{2.11}$$

Выберем произвольные точки $c_j \in (a_j, a_{j+1})$, $j=1,\cdots, n-1$. Через f_{2j}, $f_{2j}^{(1)}$, $f_{2j}^{(2)}$ обозначим сужения функции $f_2(x)$ на отрезки $[a_j, a_{j+1}]$, $[a_j, c_j]$, $[c_j, a_{j+1}]$ соответственно. Если $a_n<b$, то через $f_{2n}(x)$ будем обозначать сужение функции $f_2(x)$ на $[a_n, b]$. Пусть $\rho_j(x)=|x-a_j|^{\alpha_j}$,

$j=1,\cdots, n$. В силу лемм 2.1, 2.1′ и свойства 3° для доказательства соотношений (2.11) достаточно убедиться в справедливости представлений

$$f_{2j}^{(1)}=I_{a_j+}^{\alpha}\psi_j^{(1)},\ f_{2j}^{(2)}=I_{a_{j+1}-}^{\alpha}\psi_j^{(2)},\ j=1,\cdots, n-1;\ f_{2n}=I_{a_n+}^{\alpha}\psi_n, \tag{2.12}$$

где

$$\psi_j^{(1)}\in H_\mu^0(\rho_j) \text{ на } [a_j, c_j],\ \psi_j^{(2)}\in H_\mu^0(\rho_{j+1}) \text{ на } [c_j, a_{j+1}],$$
$$\psi_n\in H_\mu^0(\rho_n) \text{ на } [a_n, b] \text{ и}$$
$$\|\psi_j^{(1)}\|\leqslant \text{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}, \|\psi_j^{(2)}\|\leqslant \text{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)},\ \|\psi_n\|\leqslant \text{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}.$$

Воспользуемся теоремой 1.1. Из нее вытекает, что функции $f_{2j}(x)$, $j=1,\cdots, n$, представимы в виде $f_{2j}=I_{a_j+}^{\alpha}\psi_j$, где $\psi_j\in H_\mu^0(\rho_j\rho_{j+1})$ на $[a_j, a_{j+1}]$, $j=1,\cdots, n-1$, $\psi_n\in H_\mu^0(\rho_n)$ на $[a_n, b]$ и для всех j выполняется неравенство $\|\psi_j\|\leqslant \text{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}$. Отсюда, обозначая через $\psi_j^{(1)}$ сужение на $[a_j, c_j]$ функции $\psi_j(x)$, получаем первое из соотношений (2.12). Для получения второго соотношения достаточно применить к функции $f_{2j}(x)$ лемму 1.1. Справедливость соотношений (2.11) доказана.

Далее, так как $f_2(x)=0$ при $x\leqslant c$, то из (2.11), учитывая оценку в (2.10), получаем: $f_2(x)\in H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ и $\|f_2\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)}\leqslant \text{const}\,\|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Условие $\mu+\alpha<\alpha_k$, $k=2,\cdots, n$ в формулировке доказанной леммы нельзя ослабить. При $\alpha_k\leqslant\mu+\alpha$ лемма неверна. Пусть, например $\rho(x)=(b-x)^{\alpha_b}$, где $\alpha_b\leqslant\mu+\alpha$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=(x-a)^\mu(b-x)^{\mu-\alpha_b}\in H_\mu^0(\rho)$. Нетрудно видеть, что

$$f^*(x)=(b-x)^{\alpha_b}\int\limits_b^x\frac{(y-a)^\mu\,dy}{(b-y)^{\alpha_b-\mu}(x-y)^{1-\alpha}}\neq O((b-x)^{\mu+\alpha}) \text{ при } x\to b.$$

Следовательно, $f=I_{a+}^{\alpha}\varphi\,\overline{\in}\,H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

Из леммы 2.2, если применить преобразование

$$(Af)(x)=f(a+b-x), \tag{2.13}$$

вытекает аналогичное утверждение и для оператора I_{b-}^{α}:

Лемма 2.2′. *Пусть* $\rho(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, *где* $a\leqslant a_1<\cdots<a_n=b$; $\mu+\alpha<1$; $\mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1$, $k=1, 2,\cdots, n-1$, $0\leqslant\alpha_n<\mu+1$. *Тогда оператор* I_{b-}^{α} *ограниченно действует из* $H_\mu^0(\rho)$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

3°. На следующем этапе доказательства теоремы I мы покажем представимость функций из $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ дробными интегралами порядка α с плотностями из $H_\mu^0(\rho)$.

Через $\mathrm{Lip}(\lambda, p)$, $0<\lambda\leqslant 1$, $p\geqslant 1$, будем обозначать класс функций $f(x)\ (\in L_1(a, b))$, для которых

$$\left\{\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant Mh^{\lambda},$$

где $h>0$, а M — константа, не зависящая от h.

Лемма 2.3. *Всякая функция $f(x)$ из пространства $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^{\alpha_a}$, $\mu+\alpha<1$, $0\leqslant\alpha_a<\mu+1$, представима дробным интегралом: $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^0_{\mu}(\rho)$ и*

$$\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)=(x-a)^{-\alpha_a}f_0(x)$, где $f_0(x)\in H^0_{\mu+\alpha}(a)$. Нетрудно убедиться, что $f(x)\in\mathrm{Lip}(\lambda, p)$, где $\alpha<\lambda<1+\mu+\alpha-\alpha_a$, при любом $p>1$, если $\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha\leqslant 0$, и при $1<p<\dfrac{1}{\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha}$, если $\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha>0$. Действительно

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p}\leqslant\|F_1\|_{L_p}+\|F_2\|_{L_p},$$

где

$$F_1(x)=[f_0(x+h)-f_0(x)](x+h-a)^{-\alpha_a},\ F_2(x)=f_0(x)\,[(x+h-a)^{-\alpha_a}-(x-a)^{-\alpha_a}].$$

Легко видеть, что

$$\|F_1\|_{L_p}\leqslant\mathrm{const}\,h^{\lambda}\left\{\int_a^b\frac{dx}{(x+h-a)^{(\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha)p}}\right\}^{1/p}\leqslant\mathrm{const}\,h^{\lambda}.$$

Далее, при $\alpha_a\leqslant 1$ имеем

$$\|F_2\|_{L_p}\leqslant\mathrm{const}\left[\left(\int_a^{a+h}\right)^{1/p}+\left(\int_{a+h}^b\right)^{1/p}\right]\left(\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\,|(x+h-a)^{\alpha_a}-(x-a)^{\alpha_a}|^p\,dx\right)\leqslant\mathrm{const}\,h^{\lambda}\left\{\left[\int_a^{a+h}\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}\,h^{(\alpha_a-\lambda)p}}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\,dx\right]^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\,\alpha_a\left[\int_{a+h}^b\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-1)p}\,h^{(1-\lambda)p}\,dx}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\right]^{1/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\,h^{\lambda}(1+\alpha_a)\left[\int_a^b(x-a)^{(\mu-\alpha_a-\lambda+\alpha)p}\,dx\right]^{1/p}\leqslant\mathrm{const}\,h^{\lambda}.$$

Если же $\alpha_a>1$, то

$$\|F_2\|_{L_p} \leqslant \mathrm{const}\, h^{\lambda} \left\{ \int_a^b \frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}\, h^{(1-\lambda)p}}{(x+h-a)^{p}}\, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, h^{\lambda} \left\{ \int_a^b (x-a)^{(\mu-\alpha_a-\lambda+\alpha)p}\, dx \right\}^{1/p} \leqslant \mathrm{const}\, h^{\lambda}.$$

На основании теоремы 23 из [1] всякая функция, принадлежащая пространству $\mathrm{Lip}(\lambda, p)$, при $\lambda > \alpha$ представима дробным интегралом порядка α от функции из L_p. Следовательно, для нашей функции имеем: $f(x) = (I^{\alpha}_{a+}(\varphi)(x))$, причем справедливо ([1]) равенство

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\, dy. \tag{2.14}$$

Для завершения доказательства леммы остается показать, что

$$\varphi \in H^0_{\mu}(\rho) \text{ и } \|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)} \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Для первого слагаемого в (2.14) это следует из известных свойств гельдеровских функций ([2]). Рассмотрим второе слагаемое, которое обозначим через $\Phi(x)$. Пусть $\Phi_0(x) = (x-a)^{\alpha_a}\Phi(x)$. Для оценки разности $\Phi_0(x+h) - \Phi_0(x)$ представим ее в виде

$$\Phi_0(x+h) - \Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{8} \Phi_k(x),$$

где

$$\Phi_1(x) = [(x+h-a)^{\alpha_a} - (x-a)^{\alpha_a}] \int_a^{x+h} \frac{(x+h-a)^{-\alpha_a}[f_0(x+h)-f_0(y)]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_2(x) = [(x+h-a)^{\alpha_a} - (x-a)^{\alpha_a}] \int_a^{x+h} \frac{f_0(y)[(x+h-a)^{\alpha_a} - (y-a)^{-\alpha_a}\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_3(x) = (x-a)^{\alpha_a} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-a)^{-\alpha_a}[f_0(x+h)-f_0(y)]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_4(x) = (x-a)^{\alpha_a} \int_a^{x+h} \frac{f_0(y)[(x+h-a)^{-\alpha_a} - (y-a)^{-\alpha_a}]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_5(x) = \int_a^x [f_0(x) - f_0(y)][(x+h-y)^{-\alpha-1} - (x-y)^{-\alpha-1}]\,dy,$$

$$\Phi_6(x) = (x-a)^{\alpha a}\int_a^x f_0(y)\,[(x-a)^{-\alpha a}-(y-a)^{-\alpha a}]\,[(x+h-y)^{-\alpha-1}-$$

$$-(x-y)^{-\alpha-1}]\,dy,$$

$$\Phi_7(x) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x-a}{x+h-a}\right)^{\alpha a}[f_0(x+h)-f_0(x)]\,[h^{-\alpha}-(x+h-a)^{-\alpha}],$$

$$\Phi_8(x)=\frac{1}{\alpha}(x-a)^{\alpha a}f_0(x)\,[(x+h-a)^{-\alpha a}-(x-a)^{-\alpha a}][h^{-\alpha}-(x+h-a)^{-\alpha}].$$

Произведя оценку каждого из этих слагаемых, получим

$$|\Phi_0(x+h)-\Phi_0(x)| \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\cdot}_{\mu+\alpha}(\rho)}\,h^{\mu}$$

(мы опускаем соответствующие выкладки, проделать которые не представляет большого труда).

Отсюда, учитывая легко проверяемые соотношения

$$|\Phi_0(x)| \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\cdot}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \qquad \Phi_0(a)=0,$$

имеем: $\Phi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$, причем $\|\Phi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы, если применить преобразование (2.13), вытекает

Лемма 2.3′. *Всякая функция $f(x)$ из пространства $H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(b-x)^{\alpha_b}$, $\mu+\alpha<1$, $0\leqslant\alpha_b<\mu+1$, представима дробным интегралом $f=I^{\alpha}_{b-}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)}\leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$.*

4°. Докажем, наконец, последнюю в этом параграфе лемму, обобщающую утверждение леммы 2.3 на случай произвольного веса вида (1.1).

Лемма 2.4. *Всякая функция $f(x)$ из пространства*

$$H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho),\ \text{где}\ \rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k},\quad a=a_1<\cdots<a_n\leqslant b;$$

$$0\leqslant\alpha_1<\mu+1;\ \mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1,\ k=2,\cdots,n, \tag{2.15}$$

представима в виде $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)}\leqslant$ $\leqslant \text{const}\,\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$.

Доказательство. Пусть c—произвольная точка из интервала (a, a_2). Аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.2, имеем: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant c,\\ f(c), & x\geqslant c,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ f(x)-f(c), & x\geqslant c,\end{cases} \tag{2.16}$$

$$f_1(x)\in H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_a);\ \rho_a(x)=(x-a)^{\alpha_a};\ \|f_1\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_a)}\leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \tag{2.17}$$

$$f_2(x)\in H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_0);\ \|f_2\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_0)}\leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \tag{2.18}$$

$$\rho_0(x)=(x-a)^{\mu+\varepsilon}\prod_{k=2}^{n}|x-a_k|^{\varepsilon_k};\ \alpha<\varepsilon<1.$$

Заметим, что введение функций (2.16) является в некотором смысле основным моментом в доказательстве как леммы 2.2, так и настоящей леммы, так как оно дает возможность отделить точку $a_1=a$, являющуюся нижним пределом интегрирования, от остальных точек a_k, $k=2,\cdots,n$, в которых допускаются особенности.

В силу леммы 2.3 и неравенств (2.15) имеет место представление: $f_1(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi_1)(x)$, где $\varphi_1\in \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_a)\subset \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho)$, причем

$$\|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho)}\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_a)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_a)}\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(x)$. Пусть $f_{2k}(x)$ $(k=1,\cdots,n-1)$ — сужение функции $f_2(x)$ на отрезок $[a_k, a_{k+1}]$, а $f_{2n}(x)$ — сужение этой функции на отрезок $[a_n, b]$ (если $a_n<b$). Введем для удобства следующие обозначения: $\Delta_k=[a_k,a_{k+1}]$, $k=1,\cdots,n-1$; $\Delta_n=[a_n,b]$; $\beta_1=\mu+\varepsilon$; $\beta_k=\alpha_k$, $k=2,\cdots,n$; $r_k(x)=|x-a_k|^{\beta_k}|x-a_{k+1}|^{\beta_{k+1}}$; $\rho_k(x)=|x-a_k|^{\beta_k}$. Покажем, что функции $f_{2k}(x)$, $k=1,\cdots,n$, представимы в виде

$$f_{2k}(x)=(I^{\alpha}_{a_k+}\psi_k)(x), \tag{2.19}$$

где $\psi_k(x)\in \overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)$ на Δ_k, $k=1,\cdots,n-1$, $\psi_n(x)\in \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_n)$ на Δ_n и

$$\|\psi_k\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(r_k)};\ \|\psi_n\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_n)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2n}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_n)}. \tag{2.20}$$

Для функции $f_{2n}(x)$ этот факт вытекает из свойства 2° и леммы 2.3.

Рассмотрим функции $f_{2k}(x)$, $k=1,\cdots,n-1$. Возьмем произвольную точку $c_k\in(a_k,a_{k+1})$ и представим фукцию $f_{2k}(x)$ в виде $f_{2k}(x)=f^{(1)}_{2k}(x)+f^{(2)}_{2k}(x)$, где

$$f^{(1)}_{2k}(x)=\begin{cases} f_2(x), & a_k\leqslant x\leqslant c_k,\\ f_2(c_k), & c_k\leqslant x\leqslant a_{k+1},\end{cases}\qquad f^{(2)}_{2k}(x)=\begin{cases} 0, & a_k\leqslant x\leqslant c_k,\\ f_2(x)-f_2(c_k), & c_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}.\end{cases}$$

Так как $f^{(1)}_{2k}(x)\in \overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_k)$ на Δ_k, то в силу леммы 2.3 $f^{(1)}_{2k}(x)=(I^{\alpha}_{a_k+}\psi^{(1)}_k)(x)$, где $\psi^{(1)}_k(x)\in H^0_{\mu}(\rho_k)\subset \overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)$, причем

$$\|\psi^{(1)}_k\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f^{(1)}_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_k)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(r_k)}. \tag{2.21}$$

Далее, так как $f^{(2)}_{2k}(x)\in H^0_{\mu+\alpha}(\rho_{k+1})$ на Δ_k, то по лемме 2.3′

$$f^{(2)}_{2k}(x)=(I^{\alpha}_{a_{k+1}-}\psi^{(2)}_k)(x),\ \text{где}\ \psi^{(2)}_k(x)\in H^0_{\mu}(\rho_{k+1})\subset H^0_{\mu}(r_k),$$

причем

$$\|\psi^{(2)}_k\|_{H^0_{\mu}(r_k)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f^{(2)}_k\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho_{k+1})}\leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{H^0_{\mu+\alpha}(r_k)}. \tag{2.22}$$

Применяя к функции $f^{(2)}_{2k}(x)$ лемму 1.1 из § 1, получаем

$$f^{(2)}_{2k}(x)=(I^{\alpha}_{a_k+}\tilde{\psi}^{(2)}_k)(x),\ \text{где}\ \tilde{\psi}^{(2)}_k(x)\in H^0_{\mu}(r_k)\ \text{на}\ \Delta_k\ \text{и}$$

$$\|\tilde{\psi}_k^{(2)}\|_{H^0_\mu(r_k)} \leqslant \text{const}\, \|\psi_k^{(2)}\|_{H^0_\mu(r_k)}. \tag{2.23}$$

Таким образом, мы приходим к соотношению (2.19), в котором $\psi_k(x) = \psi_k^{(1)}(x) + \tilde{\psi}_k^{(2)}(x)$. Неравенство (2.20) для норм непосредственно вытекает из оценок (2.21), (2.22), (2.23).

Далее, на основании теоремы 1.2 функция $(P_k f_2)(x)$, $k = 1, \cdots, n$, являющаяся продолжением нулем функции $f_{2k}(x)$ за пределы отрезка Δ_k, представима дробным интегралом

$$P_k f_2(x) = (I^\alpha_{a+} \varphi_k)(x), \text{ где } \varphi_k(x) \in H^0_\mu(\rho_0) \text{ на } [a, b] \text{ и}$$

$$\|\varphi_k\|_{H^0_\mu(\rho_0)} \leqslant \text{const}\, \|\psi_k\|_{H^0_\mu(r_k)}, \ k = 1, \cdots, n-1, \ \|\varphi_n\|_{H^0_\mu(\rho_0)} \leqslant \text{const}\, \|\psi_n\|_{H^0_\mu(\rho_n)}. \tag{2.24}$$

Отсюда следует, что $f_2(x) = (I^\alpha_{a+}\varphi_2)(x)$, где $\varphi_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \in H^0_\mu(\rho_0)$ и в силу соотношений (2.24), (2.20), свойства 2° и оценки для норм соотношения (2.18), имеет место неравенство

$$\|\varphi_2\|_{H^0_\mu(\rho_0)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}. \tag{2.25}$$

Покажем, что

$$\varphi_2(x) \in H^0_\mu(\rho) \text{ на } [a, b] \text{ и } \|\varphi_2\|_{H^0_\mu(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi_2\|_{H^0_\mu(\rho_0)}. \tag{2.26}$$

Учитывая, что $f_2(x) = 0$ при $x < c$, на основании равенства

$$\varphi_2(x) = \frac{f_2(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f_2(x) - f_2(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\, dy,$$

вытекающего (см., например, [11], [12]) из представимости функции $f_2(x)$ дробным интегралом от функции $\varphi_2(x)$, получаем: $\varphi_2(x) = 0$ при $x < c$. Отсюда в силу свойств 2° и 3° вытекает соотношение (2.26), из которого, учитывая оценку (2.25), получаем: $\|\varphi_2\|_{H^0_\mu(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}$.

Лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Лемма 2.4′. *Пусть* $f(x) \in H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$; $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$;

$a \leqslant a_1 < \cdots < a_n = b$; $0 \leqslant \alpha_n < \mu + 1$; $\mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. *Тогда справедливо представление* $f(x) = (I^\alpha_{b-}\varphi)(x)$, *где*

$$\varphi(x) \in H^0_\mu(\rho) \text{ и } \|\varphi\|_{H^0_\mu(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Из лемм 2.2, 2.2′, 2.4, 2.4′ и вытекает утверждение теоремы I, сформулированной в начале этого параграфа.

§ 3. Операторы типа потенциала в гельдеровых пространствах с весом

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy,\quad 0<\alpha<1. \tag{3.1}$$

Обозначим через $V^{\lambda,\mu}(a_1,\cdots,a_n)$ класс функций $c(x, y)$, заданных на $[a, b]\times[a, b]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $c(x, y)$ непрерывна на $[a, b]\times[a, b]$ всюду, за исключением диагонали $x=y$, где она допускает разрыв первого рода: $c(x, y)=\{u(x, y),\ x>y;\ v(x, y),\ x<y\}$;

2) функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ по переменной x удовлетворяют условию Гельдера вида

$$|u(x_1, y)-u(x_2, y)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\lambda},\quad x_1\geqslant y,\ x_2\geqslant y, \tag{3.2}$$

где A — константа, не зависящая от y (аналогичное неравенство предполагается выполненным для функции $v(x, y)$ при $x_1\leqslant y$, $x_2\leqslant y$;

3) Функции $u(x)=u(x, x-0)$, $v(x)=v(x, x+0)$ — кусочно-гельдеровские порядка μ, допускающие разрывы первого рода в точках $a_1,\cdots, a_n$.

Считая, что $c(x, y)\in V^{\lambda,\mu}(a_1,\cdots, a_n)$, исследуем вопрос о нетеровости этого оператора, рассматривая его на функциях $\varphi(x)\in H_\mu^0(\rho)$ на $[a, b]$, где вес $\rho(x)$ имеет вид (1.1).

Представим оператор K в виде: $K=K_0+T_1+T_2$, где

$$(K_0\varphi)(x)=(I_{a+}^\alpha u\varphi)(x)+(I_{a-}^\alpha v\varphi)(x), \tag{3.3}$$

$$(T_1\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{u(x, y)-u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy;$$

$$(T_2\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{v(x, y)-v(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют условию Гельдера вида (3.2) порядка $\lambda>\mu+\alpha$. Тогда операторы T_1, T_2 ограничены из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$, где $\rho(x)=\prod_{k=1}^n|x-a_k|^{\alpha_k}$, $a=a_1<\cdots<a_n=b$, $\mu<\alpha_k<\mu+1$, $k=1, 2,\cdots, n$.*

Доказательство. Поскольку из справедливости леммы для оператора T_1 вытекает ее справедливость для оператора T_2 (применяется преобразование $(Af)(x)=f(a+b-x)$, то можно ограничиться рассмотрением только первого оператора.

В [11] показано, что $(T_1\varphi)(x)=(I_{a+}^\alpha\psi)(x)$, где

$$\psi(x) = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt. \tag{3.5}$$

В силу леммы 2.2 нам достаточно доказать ограниченность в $H_\mu^0(\rho)$ оператора (3.5). Возьмем произвольные точки $c_j \in (a_j, a_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. Пусть $\rho_j(x) = |x - a_j|^{\alpha_j}$, а $\psi_j^{(1)}(x)$ и $\psi_j^{(2)}(x)$ — сужения функции $\psi(x)$ на отрезки $[a_j, c_j]$ и $[c_j, a_{j+1}]$ соответственно. Путем непосредственных оценок нетрудно убедиться, что при $\lambda > \mu + \alpha$,

$$\psi_j^{(1)}(x) \in H_\mu^0(\rho_j) \quad \text{на} \quad [a_j, c_j],$$

$$\psi_j^{(2)}(x) \in H_\mu^0(\rho_{j+1}) \ \text{на} \ [c_j, a_{j+1}] \ \text{и} \ \|\psi_j^{(1)}\|_{H_\mu^0(\rho_j)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}, \ \|\psi_j^{(2)}\|_{H_\mu^0(\rho_{j+1})} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}.$$

Отсюда в силу свойства 3° вытекает, что $\psi(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на $[a, b]$ и $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.2. *При выполнении условий леммы 3.1 операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.*

Доказательство. Достаточно показать справедливость леммы только для первого оператора. Доказательство сводится к установлению полной непрерывности в пространстве $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$ оператора $M_0\varphi = \rho M \rho^{-1}\varphi$, где

$$(Mf)(x) = \int_a^x f(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Пусть $\{\varphi\}$ — ограниченное множество функций из $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$, $\|\varphi\|_{H_\mu} \leqslant A$, где A — константа, не зависящая от φ. В силу теоремы Арцела, множество $\{\varphi\}$ компактно в пространстве $C(a, b)$ функций, непрерывных на $[a, b]$ с нормой $\|\varphi\|_{C(a,b)} = \max\limits_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$. Выделим из множества $\{\varphi\}$ последовательность $\{\varphi_k\}$, сходящуюся по норме пространства $C(a, b)$ к пределу $\varphi \in C(a, b)$. Легко видеть, что $\varphi(x) \in H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$. Действительно, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$\frac{|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \leqslant B,$$

где B — константа, не зависящая от φ_k, получаем

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant B|x_1 - x_2|^\mu.$$

Полная непрерывность оператора M_0 будет доказана, если мы установим, что

$$\|M_0\varphi - M_0\varphi_k\|_{H_\mu} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

Воспользуемся методом, примененным ранее в работе [8]. Выберем число μ_1, удовлетворяющее неравенствам $0 < \mu_1 < \mu$, $\alpha_k < \mu_1 + 1$ для всех $k = 1, \cdots, n$. Пусть

$$\omega_k(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_k(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\mu_k}}, \quad \delta_k(x) = \max_{x \in [a, b]} |\omega_k(x)|.$$

Нетрудно проверить (см. [8], стр. 109), что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть теперь

$$\Phi_k(x) = [M_0(\varphi - \varphi_k)](x) = \rho(x) \int\limits_a^x \frac{\omega_k(s)\, ds}{\prod\limits_{k=1}^{n} |s - a_k|^{\alpha_k - \mu_k}} \int\limits_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Можно показать, что если для функции $\Phi_k(x)$ повторить почти без изменений выкладки, необходимые для доказательства леммы 3.1, то получим: $\|\Phi_k\|_{H_\mu} \leqslant \mathrm{const}\, \delta_k$, где константа не зависит от k. Отсюда, учитывая, что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем соотношение (3.6). Лемма доказана.

В силу леммы 3.2 нетеровость оператора K из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ эквивалентна нетеровости оператора K_0 в тех же пространствах и индексы этих операторов равны. В свою очередь, оператор K_0 с помощью соотношения (1.4) представляется в виде

$$K_0\varphi = I_{b-}^{\alpha}\, r_b^{-1} N r_b \varphi, \tag{3.7}$$

где $N\psi = c_1\psi + Sc_2\psi$, $c_1(x) = u(x)\cos\alpha\pi + v(x)$, $c_2(x) = -u(x)\sin\alpha\pi$.

Из (3.7) в силу теоремы I следует, что нетеровость оператора K_0 из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ эквивалентна нетеровости оператора N из $H_\mu^0(\rho_1)$ в $H_\mu^0(\rho_1)$, где

$$\rho_1(x) = (b - x)^{\alpha_n - \alpha} \prod_{k=1}^{n-1} |x - a_k|^{\alpha_k} \quad \text{и} \quad \mathrm{ind}\, K_0 = \mathrm{ind}\, N.$$

Применяя к оператору N результаты Р. В. Дудучавы [10] относительно нетеровости сингулярных интегральных операторов в гельдеровых пространствах с весом, получаем вторую основную теорему настоящей работы:

Теорема II. *Пусть* $c(x, y) \in V^{\lambda, \mu}(a_1, \cdots, a_n)$, *где*

$$\mu + \alpha < \lambda \leqslant 1 \ \text{и}\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}, \ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

Для того чтобы оператор K *был* Φ*-оператором из* $H_\mu^0(\rho)$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\inf |u(x)\, e^{-i\alpha\pi} + v(x)| > 0$; $\inf |u(x)\, e^{i\alpha\pi} + v(x)| > 0$, $x \in [a, b]$,

2) $$\frac{1}{2\pi} \arg \frac{Q(a_k - 0)}{Q(a_k + 0)} \neq \alpha_k - \mu, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

где функция $Q(x)$ *определяется равенством*

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\,e^{-i\alpha\pi} + v(x)}{u(x)\,e^{i\alpha\pi} + v(x)}, & x \in (a, b], \\ 1, \; x \in [-\infty, \infty] \setminus (a, b]. & \end{cases}$$

Полагая $\omega = (\mu, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, заметим, что индекс оператора K равен ω — индексу ([10]) функции $Q(x)$.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность С. Г. Самко за внимание к работе.

Ростовский государственный
университет

Поступила 12.VI.1973

Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Կոտորակային ինտեգրալների կշռային գյոլդերյան տարածություններում և պոտենցիալի տիպի օպերատորներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ $H^0_\mu(\rho)$ *և* $H_{\mu+\alpha}(\rho)$ *կշռային գյոլդերյան տարածությունները համեմորֆ են* α *կարգի Ռիման-Լիուվիլի կոտորակային ինտեգրման օպերատորի նկատմամբ։ Գտնված են նետերության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ պոտենցիալի տիպի օպերատորի համար և հաշված է նրանց ինդեքսը։*

B. S. RUBIN. *Fractional integrals in the Hölder spaces with weights and potential-type operators* (summary)

It is proved that $H^0_\mu(\rho)$ and $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$ Hölder spaces with weights are homeomorph with respect to Rieman—Liuville fractional integration operator of order α. The necessary and sufficient condition for Neterity of an operator acting from $H^0_\mu(\rho)$ into $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$ is obtained and the index calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals I, Math. Z., 27, 1928, 565—606.
2. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., Изд. „Наука", 1968.
3. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференциальные уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
4. *С. Г. Самко.* О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля, Дифференц. уравнения, 4, № 2, 1968, 315—326.
5. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
6. *С. Г. Самко.* Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала, Изв. вузов, Матем., № 4, 1971, 78—86.
7. *Р. В. Дудучава.* Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровых пространствах с весом, Матем. исследования, 5, вып. I, 1970, 56—76.
8. *Р. В. Дудучава.* Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом 1. Гельдеровы коэффициенты, Матем. исследования, 5, вып. 2, 1970, 104—124.
9. *Р. В. Дудучава.* Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом II. Кусочно-гельдеровы коэффициенты, Матем. исследования, 5, вып. 3 , 1970, 58—82.

10. *Р. В. Дудучава*. О сингулярных интегральных операторах в пространстве Гельдера с весом, ДАН СССР, 191, № 1, 1970, 16—19.
11. *Б. С. Рубин*. Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси, Изв. вузов, Матем., (аннотация в № 11, 1971, стр. 71).
12. *Б. С. Рубин*. О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 373—386.
13. *Б. С. Рубин*. Об операторах типа потенциала в весовых пространствах на произвольном контуре, ДАН СССР, 207, № 2, 1972, 300—303.