ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

А. А. МЕЛИКЯН

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ МОМЕНТОВ НАБЛЮДЕНИЙ В МОДЕЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрена модельная линейная дифференциальная игра сближения. Для обоих игроков построены минимальные достаточные множества точек наблюдения. В плоскости параметров задачи изучено расположение точек сгущения этих множеств. Построена цена игры. В работе применена методика, предложенная в [1].

1. Движение игроков X и Y на фиксированном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, задано соотношениями

$$X: \dot{x} = \alpha x + u, \quad Y: \dot{y} = \lambda y + v,$$
$$|u| \leqslant 1, \; x(0) = x^0, \; |v| \leqslant \nu, \; y(0) = y^0. \tag{1.1}$$

Здесь x, y, u, v — векторы произвольной одинаковой размерности; α, λ, ν — вещественные параметры: $\alpha = \pm 1$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $\nu > 0$. Отметим, что уравнениями вида (1.1) описывается в первом приближении управляемое движение точки малой массы в вязкой среде.

На интервале движения заданы N моментов времени (моменты наблюдения) $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_N = T$. Наблюдая в каждый из моментов a_k реализовавшуюся позицию $\{x_k, y_k\}$, $x_k = x(a_k)$, $y_k = y(a_k)$, игрок X задает свое управление на интервале $[a_k, a_{k+1})$ в виде функции времени $u_k(x_k, y_k, t)$, $k = 1, \cdots, N-1$. Совокупность таких функций будем называть стратегией игрока X. Целью игрока X является минимизация функционала

$$J = |x(T) - y(T)|. \tag{1.2}$$

Игрок Y реализует свое управление в виде функций времени $v(t)$, $t \in [0, T]$ и препятствует намерениям игрока X.

Задача 1. Найти оптимальную минимаксную стратегию u^* игрока X, т. е. стратегию, удовлетворяющую соотношению

$$J^* = \min_u \sup_v J[u, v] = \sup_v J[u^*, v]. \tag{1.3}$$

Найти гарантированный минимум J^* для функционала (1.2). Здесь $J[u, v]$ означает величину (1.2) на паре (u, v), экстремумы в (1.3) берутся по описанным выше стратегиям и управлениям.

Решение задачи 1 сводится к решению многошаговой игры (см. [1, 2])

$$x_{k+1} = e^{\alpha\tau_k} x_k + u_k, \; |u_k| \leqslant p_k = (e^{\alpha\tau_k} - 1)/\alpha,$$

$$y_{k+1} = e^{\lambda \tau_k} y_k + v_k, \ |v_k| \leqslant q_k = \nu (e^{\lambda \tau_k} - 1)/\lambda,$$

$$\tau_k = a_{k+1} - a_k, \ x_1 = x^0, \ y_1 = y^0, \ k = 1, \cdots, N-1, \tag{1.4}$$

$$J = |x_N - y_N|.$$

Введя функцию Беллмана, можно, аналогично проделанному в [2], получить для J^* следующее выражение:

$$J^* = \max\,[h_N, \ R_1], \ h_N > 0,$$

$$h_N = \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} R(a_i, a_{i+1}), \ R(\xi, \eta) = \nu (e^{\lambda (T-\xi)} - 1)/\lambda - (e^{\alpha (T-\eta)} - 1)/\alpha,$$

$$R_1 = |e^{\alpha T} x^0 - e^{\lambda T} y^0| + \nu (e^{\lambda T} - 1)/\lambda - (e^{\alpha T} - 1)/\alpha. \tag{1.5}$$

Оптимальная стратегия $u^* = \{u_k^* (x_k, y_k, t)\}$ — решение задачи 1 имеет вид

$$u_k^* = - e^{-\alpha (T - a_{k+1})} z_k, \ |z_k| \leqslant p_k e^{\alpha (T - a_{k+1})},$$

$$u_k^* = - p_k z_k / |z_k|, \ |z_k| > p_k e^{\alpha (T - a_{k+1})}, \tag{1.6}$$

$$z_k = e^{\alpha (T - a_k)} \cdot x_k - e^{\lambda (T - a_k)} y_k, \ t \in [a_k, a_{k+1}),$$

$$k = 1, \cdots, N-1.$$

Оптимальное для игрока X распределение моментов наблюдения, в смысле минимизации величины J^* в (1.5), находится из условия

$$\min_{\{a_i\}} h_N = \min_{\{a_i\}} \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} R(a_i, \cdot a_{i+1}).$$

При этом, как это следует из леммы в [2], существует единственное оптимальное распределение a_i^*, и для него выполнено

$$a_1^* = 0, \ a_N^* = T, \ R(a_i^*, \ a_{i+1}^*) = h_N^*, \ i = 1, \cdots, N-1, \tag{1.7}$$

где h_N^* — положительная постоянная. Поскольку лишняя точка наблюдения может лишь уменьшить гарантированный для игрока X минимум (1.5), то $h_{N+1}^* < h_N^*$, и существует конечный предел $\lim\limits_{N \to \infty} h_N^* = h, \ h > 0$. Рассмотрения п. 3 доказывают, что величина

$$J^0 = \max\,[h, \ R_1 (x^0, \ y^0)] \tag{1.8}$$

является гарантированным минимумом функционала (1.2) при непрерывном наблюдении игроком X позиции $\{x, y\}$.

Конечное достаточное множество моментов наблюдений $A\,[x^0, y^0] = \{a_i^*\}$ (см. [2]) существует для начальных позиций

$$R_1 (x^0, \ y^0) > h, \tag{1.9}$$

где R_1 определено в (1.5). Минимальное число точек наблюдения $N(x^0, \ y^0)$ (минимальная мощность множества $A\,[x^0, \ y^0]$) равно минимальному целому N, удовлетворяющему неравенству $h_N \leqslant R_1 (x^0, \ y^0)$. Для множества позиций

$$R_1(x^0, y^0) < h \tag{1.10}$$

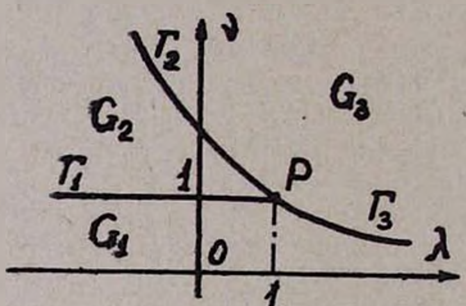
не существует конечного достаточного множества моментов наблюдений. Приведенные утверждения следуют из (1.5) и монотонного стремления h_N^* к h.

Достаточным множеством наблюдений для позиций (1.10) является множество A_T, предельное для совокупности множеств $\{a_1^*, \cdots, a_N^*\}$ при $N \to \infty$ (см. п. 4).

2. Для построения постоянной h, множества A_T и нахождения точек сгущения множества A_T, воспользуемся утверждениями, приведенными в п. 4 без доказательств.

Постоянная $h = \max R(\xi, \xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$. Точками сгущения множества A_T будут являться те и только те точки отрезка $[0, T]$, на которых функция $R(\xi, \xi)$ достигает максимума.

Результаты исследования функции R при $\alpha = 1$ в зависимости от значений параметров λ, ν приведены на рисунке. Для $\alpha = -1$ картина вполне аналогичная; в приводимых ниже соотношениях верхний знак („+" или „−") соответствует значению $\alpha = 1$, нижний — $\alpha = -1$, (рисунок соответствует $\alpha = 1$).



Плоскость Q параметров λ, ν: $\nu > 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$, разбивается на три (открытые) области G_i, $i = 1, 2, 3$. Кривые Γ_i, $i = 1, 2, 3$, ограничивающие эти области, задаются соответственно уравнениями

$$\Gamma_1: \ \nu = 1, \ \lambda < \pm 1; \ \Gamma_2: \ \nu = e^{\pm T(1 \mp \lambda)}, \ \lambda < \pm 1;$$

$$\Gamma_3: \ \nu = \pm \lambda (e^{\pm T} - 1)/(e^{\lambda T} - 1), \ \lambda > \pm 1.$$

Постоянная h (значение максимума функции R) является непрерывной функцией параметров λ, ν на плоскости Q и задается соотношениями

$$G_1: \ h = 0; \ G_2: \ h = \lambda^{-1}(1 \mp \lambda)\, \nu^{1/(1 \mp \lambda)} - \lambda^{-1}(\nu \mp \lambda);$$

$$G_3: \ h = \nu(e^{\lambda T} - 1)/\lambda - e^{\mp T} \pm 1.$$

В области $G_1 \cup \Gamma_1$ единственной точкой максимума (точкой сгущения множества A_T) является правый конец отрезка $\hat{a} = T$. В области G_2 единственной (внутренней) точкой сгущения множества A_T является точка

$$\hat{a} = T \mp \ln \nu/(1 \mp \lambda).$$

Наконец, в области $G_3 \cup T_2$ точка $\hat{a} = 0$ является единственной точкой сгущения. На кривой Γ_3 точками сгущения являются начальная и конечная точки интервала движения $\hat{a} = 0$, $\hat{a} = T$.

Для построения изолированных точек множества A_T следует, отправляясь от начального, $a = 0$, или конечного, $a = T$ моментов времени, воспользоваться рекуррентным соотношением, связывающим две соседние точки наблюдения

$$R(a_i, a_{i+1}) = h, \quad a_i < a_{i+1}. \tag{2.1}$$

Условия (2.1) получаются из (1.7) предельным переходом. Если точка (λ, ν) лежит на кривой Γ_3, то воспользоваться предложенной процедурой невозможно, так как моменты 0 и T не являются изолированными точками множества A_T. Однако, и в этом случае (см. п. 4, 1°) существует единственный набор точек $A_T = \{a_i\}$, $i = 0, \pm 1, \cdots$, $0 < a_0 < T$, удовлетворяющий (2.1) и такой, что

$$\lim_{i \to -\infty} a_i = 0, \quad \lim_{i \to +\infty} a_i = T.$$

Далее, можно доказать, что стратегия вида (1.6), где a_k являются точками множества A_T, определяет единственную абсолютно непрерывную траекторию игрока X для всякого интегрируемого управления $v(t)$, $t \in [0, T]$, и гарантирует значение функционала (1.8) для любых начальных позиций.

В точке P, $\nu = 1$, $\lambda = \pm 1$, в которой объекты X и Y являются идентичными (см. (1.1)), множество A_T совпадает с отрезком $[0, T]$, т. е. точкой сгущения является каждая точка отрезка $[0, T]$. Здесь необходимы и достаточны непрерывные наблюдения игрока X (точнее, наблюдения на подмножестве отрезка $[0, T]$ полной меры). Причем, наблюдаемой величиной должно быть значение $v(t)$. Нетрудно убедиться , что отклонение игрока X от оптимальной стратегии $u^* = v(t)$ на множестве положительной меры приводит к увеличению гарантированного минимума $J^0 = e^T |x^0 - y^0|$.

3. Пусть теперь игрок Y находится в условиях информированности, аналогичных информированности игрока X в п. 1, и применяет подобные же стратегии. Цель игрока Y — максимизация функционала (1.2). Игрок X реализует свое управление в виде интегрируемой функции времени $u(t)$, $t \in [0, T]$, и препятствует намерениям противника. Предположим, что игрок Y наблюдает позицию $\{x_k, y_k\}$ в три момента времени $a_1 = 0$, $a_2 \in [0, T]$, $a_3 = T$, т. е. примем $N = 3$. Применяя подход работы [2], получим значение гарантированного максимума величины (1.2) для игрока Y

$$J_* = \max\,[0, R(a_2, a_2), R_1(x^0, y^0)], \tag{3.1}$$

где функции R и R_1 определены в (1.5). Значение (3.1) гарантируется игроку Y стратегией

$$v_k(x_k, y_k, t) = -q_k z_k/|z_k|, \ |z_k| \neq 0,$$
$$v_k(x_k, y_k, t) = q_k e, \ |e| = 1, \ |z_k| = 0,$$
$$t \in [a_k, a_{k+1}), \ k = 1, 2.$$

Необходимые обозначения введены в (1.4), (1.5). Оптимальное (в смысле максимизации величины (3.1)) расположение момента $a_2 = a_2^*$ находится максимизацией $R(a_2, a_2)$, $0 \leqslant a_2 \leqslant T$. Эта процедура уже проделана при поиске точек сгущения множества A_T. В области G_2 точка a_2^* задается формулой (соответственно при $\alpha = \pm 1$)

$$a_2^* = T \mp \ln \nu/(1 \mp \lambda).$$

На остальной части плоскости параметров $Q \setminus G_2$ точка a_2^* совпадает с одним из концов отрезка $[0, T]$. Подставив величину a_2^* в (3.1) нетрудно убедиться, что

$$J_* = J^0, \ (\nu, \lambda) \in Q, \ \alpha = \pm 1. \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е 1. Равенство (3.2) означает, что в игре (1.1), (1.2) имеет место седловая ситуация на всей плоскости параметров $(\nu, \lambda) \in Q$, $\alpha = \pm 1$. Поэтому величина (1.8) является гарантированным минимумом игры с непрерывным наблюдением.

З а м е ч а н и е 2. Поскольку в области параметров G_2 игроку Y необходима и третья (внутренняя) точка наблюдения, то можно утверждать, что в G_2 игра не является регулярной. В [3] доказано, что игрок Y в регулярном случае может добиться гарантированного максимума, применив программное управление, т. е. воспользовавшись наблюдением позиции только лишь в начальный момент движения $a_1 = 0$. Далее, нерегулярность игры в области $G_2 \cup \Gamma_2$ устанавливается следующим образом. Области достижимости игроков X и Y являются сферами K_x, K_y радиусов $r_x = \nu\,(e^{\lambda(T-t)} - 1)/\lambda$, $r_y = (e^{\alpha(T-t)} - 1)/\alpha$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Нетрудно убедиться, что существуют позиции, когда эти сферы концентричны и $r_y(t) > r_x(t)$. Тогда ε-окрестность K_x^ε сферы K_x, удовлетворяющая включению $K_x^\varepsilon \supset K_y$ с минимальным ε, просто совпадает со сферой K_y, т. е. общие точки сфер K_x^ε и K_y, $\varepsilon > 0$, не могут быть уложены в единственную гиперплоскость.

З а м е ч а н и е 3. Подобным образом, используя геометрическое определение регулярности, данное в [3], можно показать регулярность рассматриваемой игры в области параметров $G_1 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup P$, т. е. там, где выполнено $h = 0$.

4. Пусть функция $g(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы в [2]. Тогда, по утверждению леммы, минимум

$$h_n = \min_{z \in G} \Phi(z), \quad \Phi(z) = \max_{1 < i < n-1} g(z_i, z_{i+1})$$

достигается на единственном векторе $z^* \in G$. Здесь $z = (z_1, \cdots, z_n)$ — n-мерный вектор, и $z \in G$ означает, что

$$z_1 = a,\ z_n = b,\ a < z_i \leqslant b,\ i = 2, \cdots, n - 1.$$

Обозначим множество $\{z_1^*, \cdots, z_n^*\}$ через Z_n и введем

Определение. Множество $C \subset [a, b]$ называется предельным для последовательности конечных множеств $C_n \subset [a, b]$ при $n \to \infty$, если оно состоит из тех и только тех точек $c \in [a, b]$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует целое положительное N_ε, удовлетворяющее условию: пересечение $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap C_n$ не пусто для $n > N_\varepsilon$. Тогда, в дополнение к лемме работы [2], справедливы следующие утверждения:

1°. *Существует единственное предельное множество точек Z для последовательности Z_n, $n \to \infty$.*

2°. *Существует* $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = h = \max g(x, x),\ a \leqslant x \leqslant b.$

3°. *Точками сгущения множества Z являются те и только те точки $\hat{z} \in Z$, для которых выполнено $g(\hat{z}, \hat{z}) = h$.*

4°. *Если $z_i < z_{i+1}$ — две изолированные соседние точки множества Z, z_i, $z_{i+1} \in Z$, $(z_i, z_{i+1}) \cap Z = \varnothing$, то $g(z_i, z_{i+1}) = h$.*

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 16.V.1973

Ա. Ա. ՄԵԼԻՔՅԱՆ. Դիտարկման մոմենտների մինիմալ քանակի մասին մոդելային մոտեցման խաղում *(ամփոփում)*

Մոդելային գծային մոտեցման դիֆերենցիալ խաղի համար կառուցված է դիտման մոմենտների մինիմալ բավարար բազմությունը, ուսումնասիրված է այդ բազմության խտացման կետերի կախումը պարամետրից։ Գտնված է խաղի գինը։ Աշխատանքում օգտագործված է ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղը էկվիվալենտ բազմաքայլ խաղի բերման մեթոդը։

A. A. MELIKIAN. *On the minimal number of observation moments in a model approach game* (summary)

The minimal sufficient set of observation moments for a model linear differential approach game is found. The dependance of the location of accumulation points of this set of the game parameters is studied. The game price is calculated. The method of reduction of differential game with incomplete information to equivalent manystep game is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с переменными условиями информированности, ДАН СССР, 203, № 1, 1972.
2. *А. А. Меликян.* О минимальных наблюдениях в одной игре сближения, ПММ, 37, вып. 3, 1973.
3. *Н. Н. Красовский.* Игровые задачи о встрече движений, М., Изд. „Наука“, 1970.