ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть E — замкнутое множество точек в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ и f — функция, определенная и ограниченная на E. Положим

$$R_n(f, E) = \inf_{\{r_n\}} \sup_{z \in E} |f(z) - r_n(z)|,$$

где $\{r_n\}$ — класс рациональных функций порядка не выше n (т. е. функций, имеющих в $\overline{C}$ не более n полюсов, с учетом их кратности). Классическая проблема заключается в исследовании асимптотического поведения $R_n(f, E)$ при $n \to \infty$ в зависимости от метрических свойств множества E и структуры функции f.

В известной работе Д. Ньюмена [1] установлено, что

$$\frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \leqslant R_n(|x|, [-1, 1]) \leqslant 3 e^{-\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Высокая скорость рациональной аппроксимации (скорость полиномиальной аппроксимации $|x|$ на $[-1,1]$ имеет порядок $\frac{1}{n}$) объясняется тем, что функция $f(x) = |x|$ во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме $x = 0$, является *аналитичгской*. Обобщая в этом направлении результат Д. Ньюмена, в работе А. А. Гончара [2] была установлена теорема о скорости рационального приближения функций, непрерывных на отрезке [0,1] и допускающих ограниченное аналитическое продолжение в круг $D = \{z \in C: |z - 1| < 1\}$. Из этой общей теоремы в [2] получены оценки сверху для $R_n(f_\varphi, [-1,1])$, где

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ \varphi(x), & x \in [0,1] \end{cases},$$

а φ — функция, голоморфная и ограниченная в D.

Вид f_φ наталкивает на мысль, что рациональную аппроксимацию этой функции можно осуществить путем приближения интеграла Коши по соответствующим образом подобранному контуру. Именно такой подход к задаче применен в настоящей статье. Он позволяет довольно просто получить теорему, аналогичную доказанной А. А. Гончаром в [2] и дает возможность расширить множество $E=[-1,1]$, сохраняя скорость приближения. Кроме того, в статье устанавливается одно утверждение об аппроксимации мероморфными функциями.

Рассмотрим множества следующего вида:

$$\Delta_\alpha(r) = \{z \in \mathbf{C}: |\arg z| < \alpha,\ |z| < r\} \text{ и } E_{\alpha,\beta} = \overline{\Delta_\beta(1)} \cup (\overline{\mathbf{C}} \setminus \Delta_\alpha(2)),$$

где $r > 0$ и $0 < \beta < \alpha \leqslant \pi$. Пусть f — функция, голоморфная в области $\Delta_\alpha(2)$ и непрерывная в нуле, $f(0) = 0$. Положим $f(z) = 0$, если $z \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \Delta_\alpha(2)$. Тогда справедлива следующая

Теорема.

$$R_n(f, E_{\alpha,\beta}) = O(\rho_n),\quad \rho_n = \min_{x \in [1,\infty)} \left(M(p^{-x}) + xs^{\frac{n}{x}}\right),$$

где $M(r) = \max\limits_{z \in \Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(r)} |f(z)|$, $s = \sqrt[5]{\dfrac{p^2-1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}} < 1$, *а* $p > 0$ — *произвольная постоянная такая, что* $1 < p^2 < \min\left(\dfrac{3}{2},\ 1 + \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Доказательство. Зафиксируем число q, удовлетворяющее условию

$$1 < q < \min\left(\frac{3}{2},\ 1 + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Тогда будем иметь следующее представление для f:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad z \in E_{\alpha,\beta}$$

(здесь и всюду в дальнейшем интегрирование производится в положительном относительно области $\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)$ направлении). Разбив контур $\partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)$ на два непересекающихся контура Γ и γ:

$$\Gamma = \left\{z \in \mathbf{C}: |\arg z| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2},\ |z| = q\right\},\quad \gamma = \partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q) \setminus \Gamma,$$

получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad z \in E_{\alpha,\beta}.$$

Займемся рациональным приближением каждого слагаемого на $E_{\alpha,\beta}$.

1°. Выберем на γ последовательности точек

$$\zeta_k = q^{-k} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \zeta_k' = q^{-k} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ (k = 0, 1, \cdots)$$

и обозначим

$$l_k = \left\{z \in \mathbf{C}: \arg z = \frac{\alpha+\beta}{2},\ q^{-k} \leqslant |z| < q^{-k+1}\right\},$$

$$l'_k = \left\{ z \in \mathbb{C}: \arg z = -\frac{\alpha+\beta}{2},\ q^{-k} \leqslant |z| < q^{-k+1} \right\},$$

$$\gamma_k = \bigcup_{j=0}^{k} (l_j \cup l'_j).$$

Теперь определим функцию $Q_m(\zeta, z)$, аппроксимирующую ядро Коши $\frac{1}{\zeta - z}$ для $\zeta \in \gamma$, $z \in E_{\alpha,\beta}$:

$$Q_m(\zeta, z) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}}, & \xi \in l_k, \\ -\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}}, & \xi \in l'_k, \end{cases}$$

где m — некоторое натуральное число. Исходя из выбора q и разложения для $\frac{1}{\zeta - z}$, легко получить оценки

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - Q_m(\zeta, z) \right| < \frac{q^k}{(1-d)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\, d^m,\ \zeta \in l_k \cup l'_k,\ z \in E_{\alpha,\beta},$$

где $d = \frac{q-1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} < 1$. Из предыдущих неравенств сразу следует

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_k \cup l'_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_k \cup l'_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta \right| <$$

$$\leqslant \frac{dM(q)}{\pi(1-d)} d^m,\ z \in E_{\alpha,\beta}\ (k = 0, 1, \cdots).$$

Введем рациональную функцию $r_{k,m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$ и

оценим разность $\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - r_{k,m}(z) \right|$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - r_{k,m}(z) \right| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| + \frac{2dM(q)}{\pi(1-d)} kd^m,\ z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{1.1}$$

Пусть $z \in E_{\alpha,\beta}, |z| \geqslant \frac{1}{2} q^{-k}$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqslant \frac{2}{\pi \sin\frac{\alpha-\beta}{2}} M(q^{-k}).$$

Если же $z \in E_{\alpha,\beta}$, $|z| \leqslant \frac{1}{2} q^{-k}$, то обозначив $\Gamma_k = \{z \in \mathbf{C}: |\arg z| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}, |z| = q^{-k}\}$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant M(q^{-k}) + \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant 3M(q^{-k}).$$

Учитывая последние два неравенства, из (1.1) получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - r_{k,m}(z)\right| \leqslant \frac{3}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} M(q^{-k}) + \frac{2dM(q)}{\pi(1-d)} k d^m, \; z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{1.2}$$

2°. Перейдем к аппроксимации на $E_{\alpha,\beta}$ функции $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

Представим контур Γ в виде суммы L попарно непересекающихся дуг μ_k, длина каждой из которых не превышает $\frac{(q-1)^2}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$, и выберем на этих дугах по точке $\eta_k \in \mu_k$ $(k = 1, 2, \cdots, L)$. Доопределим функцию $Q_m(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Gamma$ следующим образом:

$$Q_m(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta - \eta_k)^j}{(z - \eta_k)^{j+1}}, \; \zeta \in \mu_k.$$

Нетрудно заметить, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta\right| \leqslant \frac{dM(q)}{2\pi(1-d)} d^m, \; z \in E_{\alpha,\beta}.$$

Введя рациональную функцию $r_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$ и принимая во внимание, что натуральное L может быть выбрано удовлетворяющим неравенству

$$L \leqslant \frac{4\pi}{d^2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - r_m(z)\right| \leqslant \frac{2M(q)}{d(1-d)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} d^m, \; z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{2.1}$$

3°. Теперь из (1.2) и (2.1) для рациональной функции $R_{k,m}(z) = r_{k,m}(z) + r_m(z)$ получим

$$|f(z) - R_{k,m}(z)| \leqslant C\,(M(q^{-k}) + kd^m),\quad z \in E_{\alpha,\beta}, \tag{3.1}$$

где $C = \max\left(\dfrac{3}{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}},\ \dfrac{4M(q)}{d(1-d)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right)$. Учитывая тот факт, что порядок $R_{k,m}(z)$ не превышает $(4k+L)\,m$, из (3.1) непосредственно следует

$$R_n(f, E_{\alpha,\beta}) \leqslant C \min_{1<k<\frac{n-L}{4}} \left(M(q^{-k}) + kd^{\left[\frac{n}{4k+L}\right]}\right),\quad n > L+4$$

(квадратные скобки в показателе означают целую часть). Из этого неравенства простыми рассуждениями получается утверждение теоремы, если принять $p = \sqrt{q}$ и $s = \sqrt[6]{d}$. Теорема доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства теоремы получено несколько более сильное утверждение, чем $R_n(f, E_{\alpha,\beta}) = O(\rho_n)$. Именно, при $n > n_0$ выполняется оценка

$$R_n(f, E_{\alpha,\beta}) \leqslant \frac{C}{d}\,\rho_n,$$

где C — константа, фигурирующая в (3.1).

Замечание 2. Метод, использованный для построения аппроксимирующих функций, может быть применен к получению верхних оценок наилучших рациональных приближений на множествах E, метрические свойства которых отличаются от свойств $E_{\alpha,\beta}$. Например, в качестве E можно рассмотреть множество, состоящее из двух соприкасающихся областей.

Замечание 3. Рассмотрим теперь функцию $f(x) = |x|$ на вещественной оси $\mathbb{R}$. Эту функцию нельзя на $\mathbb{R}$ приблизить рациональными. Однако, как следует из теоремы 1 работы [3], ее можно равномерно приблизить вне некоторого отрезка мероморфными функциями F, неванлинновская характеристика которых удовлетворяет условию $T(r, F) = O(\log^3 r)$. Синтез теоремы настоящей работы с теоремой 1 работы [3] позволяет установить возможность равномерной аппроксимации $|x|$ *на всей* оси $\mathbb{R}$ мероморфными функциями F, причем так, что кроме условия $T(r, F) = O(\log^3 r)$ выполнено также условие $n_F = O\left(\log^3 \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, где n_F — число полюсов F в единичном круге, а ε — величина уклонения F от $|x|$ на $\mathbb{R}$. Условие $n_F = O\left(\log^2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ не может быть усилено согласно известному результату Д. Ньюмена [1]. Кроме того, не существует мероморфной функции F, равномерно аппроксимирующей $|x|$ на $\mathbb{R}$, для которой $T(r, F) = O(\log^2 r)$. Это сразу вытекает из результата Ж. Валирона [4], который заключается в том, что мероморфная функция, неванлинновская характеристика которой имеет порядок $\log^2 r$, не может иметь более одного асимптотического значения.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.I.1974

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցված է ընդհանուր թեորեմ երկու հպվող տիրույթների վրա լավագույն ռացիոնալ մոտարկման մասին։ Այնուհետև դիտարկվում է իրական առանցքի վրա մերոմորֆ ֆունկցիաներով $|x|$ *ֆունկցիայի հավասարաչափ մոտարկումը։*

L. A. TER-ISRAJELIAN. *On uniform approximation by rational functions* (summary)

The paper proves a general theorem about the best rational approximation in pairs of contacting domains. Also, uniform approximation of $|x|$ function by meromorphic functions on the real axis is consided.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. I. Newman*. Rational approximation to $|x|$, Michigan Math. J., 11, № 1, 1964, 11—14.
2. *А. А. Гончар*. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями, Матем. сб., 73 (115), 1967, 630—638.
3. *Л. А. Тер-Исраелян*. Равномерное и касательное приближение голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 1, 1971, 67—79.
4. *G. Valiron*. Sur le nombre des singularites transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algebroides, C. r. Acad sci., 200, 1935, 713—715.