ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

МНОГООБРАЗИЯ И БИМНОГООБРАЗИЯ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД ВСЕМИ КОЛЬЦАМИ

Г. Г. ЭМИН

Введение

К настоящему времени выявился определенный интерес к изучению категории $\mathfrak{M}$ — „модулей над всеми кольцами“, объектами которой являются всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, A — правый, U-модуль, в общем случае не унитарный, а морфизмами категории $\mathfrak{M}$ являются полулинейные гомоморфизмы (см. [2] и [4]).

В настоящей работе дается полное описание всех многообразий и бимногообразий такой категории, а также выясняются некоторые свойства этой категории.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Г. Шульгейферу, под руководством которого была выполнена эта работа.

§ 1. Предварительные замечания

Рассматривается категория $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, A — правый U-модуль, в общем случае не унитарный, а множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар отображений $\Phi=(\Phi_A, \Phi_U)$, где Φ_A (соответственно Φ_U) — гомоморфизм группы A в группу B (кольца U в кольцо V), причем $(a\cdot u)\Phi_A=a\Phi_A\cdot u\Phi_U$, $a\in A$, $u\in U$. Такая пара отображений называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V).

Категория $\mathfrak{M}$ содержит в качестве полных подкатегорий категорию абелевых групп и категорию ассоциативных колец, а также содержит категорию модулей над фиксированным кольцом Λ, в которой морфизмами являются линейные преобразования.

Гомоморфизм $\Phi\colon (A, U)\to(B, V)$ называется мономорфизмом (эпиморфизмом), если Φ_A мономорфизм (эпиморфизм) в категории абелевых групп, а Φ_U — мономорфизм (эпиморфизм) в категории ассоциативных колец.

Пара $(A_1, U_1)\in Ob\mathfrak{M}$ называется подмодулем модуля (A, U), если она является подобъектом объекта (A, U) категории $\mathfrak{M}$. Это означает, что действие U_1 на A_1 совпадает с действием U_1 как подкольца кольца U.

Подмодуль модуля (A, U), являющийся ядром некоторого гомоморфизма Φ: $(A, U) \to (B, V)$, называется идеалом модуля (A, U).

Приведем некоторые свойства категории $\mathfrak{M}$.

Легко доказать, что имеет место

Предложение 1.1. *В категории $\mathfrak{M}$ любой гомоморфизм Φ: $(A, U) \to (B, V)$ обладает ядром, которым является вложение* $(Ker\ \Phi_A, Ker\ \Phi_U) \to (A, U)$.

В работе [2] доказано

Предложение 1.2. *Подмодуль (A_1, U_1) модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом модуля (A, U), когда U_1—идеал кольца U и выполнены следующие включения*: $A \cdot U_1 \subseteq A_1$, $A_1 \cdot U \subseteq A_1$.

Если (A_1, U_1) является идеалом модуля (A, U), то можно образовать абелеву группу A/A_1, кольцо U/U_1 и определить отображение $A/A_1 \times U/U_1 \to A/A_1$, полагая $(a + A_1)\cdot(u + U_1) = a \cdot u + A_1$. При этом пара $(A/A_1, U/U_1)$ будет объектом категории $\mathfrak{M}$. Этот модуль называется фактор-модулем модуля (A, U) по идеалу (A_1, U_1). Естественное отображение π: $(A, U) \to (A/A_1, U/U_1)$ является гомоморфизмом, причем ядром этого гомоморфизма служит (A_1, U_1).

Пусть (A_1, U_1) — подмодуль модуля (A, U). Идеалом, порожденным подмодулем (A_1, U_1), будет модуль $(\overline{D}, \overline{U_1})$, где $\overline{U_1}$ — идеал, порожденный подкольцом U_1 в кольце U, а $\overline{D} = \{A_1 \cup A_1 \cdot U \cup A \cdot \overline{U_1}\}$ — подгруппа абелевой группы A, порожденная множеством $D = A_1 \cup A_1 \cdot U \cup A \cdot \overline{U_1}$. Легко проверить, что $(\overline{D}, \overline{U_1})$ — идеал модуля (A, U) и что это наименьший идеал модуля (A, U), содержащий подмодуль (A_1, U_1).

Пусть имеется гомоморфизм модулей α: $(B, V) \to (C, W)$. Обозначим через $\overline{D} = \{\mathrm{Im}\,\alpha_B \cup \mathrm{Im}\,\alpha_B \cdot W \cup C \cdot \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}\}$ подгруппу абелевой группы C, порожденную множеством $D = \mathrm{Im}\,\alpha_B \cup \mathrm{Im}\,\alpha_B \cdot W \cup C \cdot \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}$, где $\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}$ — идеал кольца W, порожденный подкольцом $\mathrm{Im}\,\alpha_V$. Пара $(\overline{D}, \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ по построению является идеалом модуля (C, W), поэтому можно образовать фактор-модуль $(C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$. Легко видеть, что модуль $(C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ вместе с естественным эпиморфизмом π: $(C, W) \to (C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ образует коядро гомоморфизма α. Таким образом, справедливо

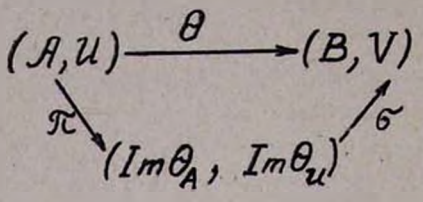
Предложение 1.3. *В категории $\mathfrak{M}$ каждый морфизм обладает коядром.*

Следовательно, имеет место (см. [3], предложения 1.6.3 и 1.6.14).

Следствие 1.4. В категории $\mathfrak{M}$ нормальными мономорфизмами являются вложения идеалов и только они.

Предложение 1.5. *В категории $\mathfrak{M}$ нормальными эпиморфизмами являются гомоморфизмы „на" и только они.*

Доказательство. Пусть θ: $(A, U) \to (B, V)$ — нормальный эпиморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму



(*)

Гомоморфизм π является эпиморфизмом, поэтому (см. [3], лемма I.4.7*) σ — нормальный эпиморфизм, а так как σ в то же время является мономорфизмом, то σ — изоморфизм (см. [3], следствие I.4.6*). Значит, θ — гомоморфизм „на“.

Обратно. Пусть θ: $(A, U) \to (B, V)$ — гомоморфизм „на“. Тогда имеем такую короткую точную последовательность:

$$(A_1, U_1) = (Ker\,\theta_A, Ker\,\theta_U) \xrightarrow{\mu} (A, U) \xrightarrow{\theta} (B, V).$$

Если для некоторого гомоморфизма γ: $(A, U) \to (C, W)$ имеет место равенство $\mu\gamma = 0$, то $\mu_A \gamma_A = 0$ и $\mu_U \gamma_U = 0$. Из определения ядра вытекает, что существует такой гомоморфизм групп γ'_B: $B \to C$ и такой гомоморфизм колец γ'_V: $V \to W$, что $\gamma_A = \theta_A \gamma_B$ и $\gamma_U = \theta_U \gamma'_V$. Легко проверить, что пара $\gamma' = (\gamma'_B, \gamma'_V)$ является гомоморфизмом модулей. Таким образом, $\gamma = \theta\gamma'$. Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. *Категория $\mathfrak{M}$ является бикатегорией с нормальными кообразами.*

Доказательство. Пусть θ: $(A, U) \to (B, V)$ — любой гомоморфизм модулей. Рассмотрим диаграмму (*). Имеем, $\theta = \pi\sigma$ и π — нормальный эпиморфизм в силу предложения 1.5.

Предложение 1.6 доказано.

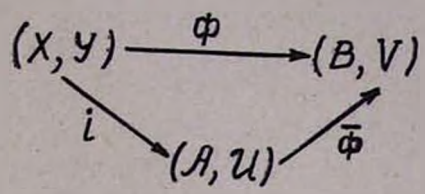
Предложение 1.7. *Пусть (A_1, U_1) — идеал модуля (A, U) и π: $(A, U) \to (B, V)$ — нормальный эпиморфизм. Тогда образ идеала (A_1, U_1) при отображении π является идеалом (B_1, V_1) в модуле (B, V).*

Доказательство. Так как θ — гомоморфизм „на“, то $\forall b \in B$ $\exists a_b \in A$ такое, что $a_b\theta_A = b$, и $\forall v_1 \in V_1$ существует такой элемент $u_1 \in U_1$, что $u_1\theta_U = v_1$. Поэтому $b \cdot v_1 = (a_b \pi_A) \cdot (u_1 \pi_U) = (a_b \cdot u_1)\,\pi_A \in B_1$, в силу того, что $A \cdot U_1 \subseteq A_1$. По той же причине, для $\forall b_1 \in B_1$ существует такой элемент $a_1 \in A_1$, что $a_1\pi_A = b_1$, и для $\forall v \in V_1$ существует такой элемент $u_v \in U$, что $u_v\theta_U = v$. Поэтому $b_1 \cdot v = (a_1 \pi_A) \cdot (u_v \pi_U) = (a_1 \cdot u_v)\,\pi_A \in B_1$, так как $A_1 \cdot U \subseteq A_1$.

Предложение 1.7 доказано.

Модуль (A, U) называется свободным с системой свободных образующих (X, Y), где $X \cap Y = \varnothing$, если для любого модуля (B, V) и произвольного однозначного отображения Φ: $(X, Y) \to (B, V)$, $(X\Phi \subset B, Y\Phi \subset V)$ существует единственное продолжение отображе-

ния Φ до гомоморфизма $\overline{\Phi}$: $(A, U) \to (B, V)$, при котором коммутативна диаграмма:



где i — отображение вложения.

В работе [2] приведено следующее построение свободного модуля над произвольной парой множеств (X, Y). Пусть (X, Y) — произвольная пара множеств, $X \cap Y = \varnothing$. Обозначим через U свободное ассоциативное кольцо с множеством Y свободных образующих. Аддитивная группа кольца U является свободной абелевой группой относительно множества свободных образующих M, которое, в свою очередь, является свободной мультипликативной полугруппой с множеством Y свободных образующих. Таким образом, U является полугрупповым кольцом над полугруппой M. Обозначим через A свободную абелеву группу со свободным базисом $X \cup X \cdot M$, где $X \cdot M = \{x \cdot m; x \in X, m \in M\}$. Естественным образом определяется отображение $A \times U \to A$, которое удовлетворяет аксиомам модуля. Модуль (A, U) является свободным модулем с системой свободных образующих (X, Y).

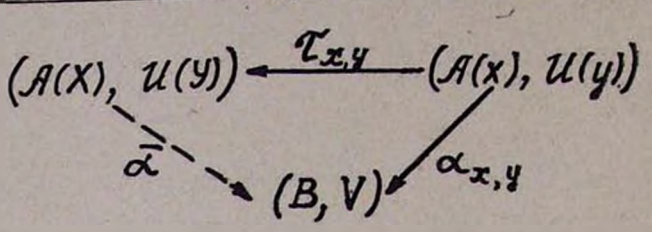
Предложение 1.8. *Любой свободный модуль* $(A(X), U(Y))$ *над парой множеств* (X, Y) *разлагается в свободное произведение свободных модулей* $(A(x), U(y))$ *над двуточечным множеством* (x, y)

$$(A(X), U(Y)) = \prod_{\substack{x \in X \\ y \in Y}}^{*} (A(x), U(y)).$$

Доказательство. Во-первых, вложение пары (x, y) в пару множеств (X, Y) однозначно продолжается до гомоморфизма

$$\tau_{x, y}: (A(x), U(y)) \to (A(X), U(Y)).$$

Пусть имеется любой модуль (B, V) и любая система гомоморфизмов $\alpha_{x, y}$: $(A(x), U(y)) \to (B, V)$. При этом гомоморфизме точка (x, y) переходит в некоторую пару $(\alpha_{x, y}(x), \alpha_{x, y}(y))$. Тем самым определено отображение α: $(X, Y) \to (B, V)$, которое по определению однозначно продолжается до гомоморфизма $\bar{\alpha}$: $(A(X), U(Y)) \to (B, V)$. Легко проверить, что имеет место коммутативная диаграмма:



Предложение 1.8 доказано.

Из предложений 1.1, 1.6, 1.8 и теоремы 3.1 работы [6] вытекает

Предложение 1.9. *Категория* $\mathfrak{M}$ *является категорией с прямыми и свободными произведениями.*

Прямым произведением семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ будет модуль $(A, U) = (\prod^x_{\alpha\in I} A_\alpha, \prod^x_{\alpha\in I} U_\alpha)$, в котором операция $A \times U \to A$ определяется по формуле $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \cdot (u_\alpha)_{\alpha\in I} = (a_\alpha \cdot u_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Свободное произведение семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ определяется следующим образом. Сначала построим свободное произведение семейства ассоциативных колец $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Для этого возьмем всевозможные слова конечной длины $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ такие, что $u_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$ и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$. Аддитивным порядком элемента $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ будем считать наибольший общий делитель аддитивных порядков всех элементов u_{α_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$, входящих в это слово (рассматриваемых в соответствующих кольцах U_{α_i}). Если порядок элемента $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ равен единице, то $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ — пустое слово.

Построим абелеву группу $U^+ = \sum\limits_{\alpha\in I} U^+_\alpha + \sum\limits^{\cdot}_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_n \\ n>1}} \{u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$, где $\sum^{\cdot}$ — прямая сумма, U^+_α — аддитивная группа кольца U_α $(\alpha \in I)$, а $\{u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$ — циклическая группа, порожденная элементом $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$, порядок которого, как уже говорилось выше, равен наибольшему общему делителю аддитивных порядков всех элементов u_{α_i}, входящих в это слово. Произведение слов $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ и $\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$ определим таким образом: $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\cdot\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m} = u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$, причем, если $\alpha_n = \beta_1$, то в полученном слове $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$ вместо $u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}$ подставляется произведение этих элементов в кольце U_{α_n}. Произведение сумм слов определяется по дистрибутивности. Легко проверить, что получили ассоциативное кольцо, которое обозначим $\hat{U}$.

Профакторизуем кольцо $\hat{U}$ по идеалу, который обозначим $\bar{U}$, порожденному всеми элементами вида $n(u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_k}) - (n_{\alpha_1}u_{\alpha_1})\cdots(n_{\alpha_k}u_{\alpha_k})$, где $n = n_{\alpha_1}\cdots n_{\alpha_k}$. Полученное кольцо обозначим U^*, $U^* = \hat{U}/\bar{U}$. Легко проверить, что $U^* = \prod^*_{\alpha\in I} U_\alpha$. Далее, произвольный модуль (A_α, U_α) семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ следующим образом расширяем до мо-

дуля (A_α^+, U^*). Для этого рассмотрим всевозможные слова конечной длины вида $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1 1} \cdots u_{\alpha_1 n}$, где $a_{\alpha_1} \in A_{\alpha_1}$, $u_{\alpha_1 i} \in U_{\alpha_1 i}$, $\alpha \neq \alpha_1$ и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$. Аддитивным порядком элемента $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_1 n}$ будет наибольший общий делитель аддитивных порядков элементов $a_\alpha \in A_\alpha$, $u_{\alpha i} \in U_{\alpha i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, рассматриваемых соответственно в абелевой группе A_α и в кольцах $U_{\alpha i}$. Если порядок элемента $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_1 n}$ равен единице, то $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_1 n}$ — пустое слово.

Построим абелеву группу $A_\alpha^1 = A_\alpha \dot{+} \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \{a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n}\}$, где $\dot{\sum}$ — прямая сумма, а $\{a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n}\}$ — циклическая группа, порожденная словом $a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n}$. Элементами абелевой группы A_α' будут всевозможные конечные суммы вида $a_\alpha' = k_\alpha \bar{a}_\alpha + l_\alpha \bar{a}_\alpha a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n} + \cdots$, где $k_\alpha, l_\alpha, \cdots \in N$; $\bar{a}_\alpha, a_\alpha, \cdots \in A_\alpha$; $u_{\alpha i} \in U_{\alpha i}$. Определим умножение элементов абелевой группы A_α' на элементы кольца $\hat{U}$ (которое рассматривалось на стр. 216) таким образом:

$$(k_\alpha \bar{a}_\alpha + l_\alpha a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n} + \cdots)\left(\sum_{i=1}^{m} k_{\delta_i} u_{\delta_i} + p_{\alpha_0} u_{\beta_1} \cdots u_{\beta_r} + \cdots\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} k_\alpha k_{\delta_i} \bar{a}_\alpha u_{\delta_i} + k_\alpha p_{\alpha_0} \bar{a}_\alpha u_{\beta_1} \cdots u_{\beta_r} + \sum_{i=1}^{m} l_\alpha k_{\delta_i} a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha n} u_{\delta_i} +$$

$$+ l_\alpha p_{\alpha_0} a_\alpha u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n} u_{\beta_1} \cdots u_{\beta_r} + \cdots,$$

причем, если для некоторых i, $\alpha = \delta_i$ или $\alpha = \beta_1$, то в соответствующих словах вместо $\bar{a}_\alpha u_{\delta_i}$, $\bar{a}_\alpha u_{\beta_1}$ подставляются произведения $\bar{a}_\alpha u_{\delta_i}$, $\bar{a}_\alpha u_{\beta_1}$, рассматриваемые в модуле A_α над кольцом U_α, а если для некоторых i, $\alpha_n = \delta_i$, или же $\alpha_n = \beta_1$, то в соответствующих словах вместо $u_{\alpha_n} u_{\delta_i}$, $u_{\alpha_n} u_{\beta_1}$ подставляются произведения $u_{\alpha_n} u_{\delta_i}$, $u_{\alpha_n} u_{\beta_1}$, рассматриваемые в кольце U_{α_n}. Если в произведении двух слов $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_1 n} \in A_\alpha'$ и $\bar{u}_{\beta_1} \cdots \bar{u}_{\beta_m} \in \hat{U}$ получается пустое слово, то по определению $a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n} \bar{u}_{\beta_1} \cdots \bar{u}_{\beta_m} = 0$. Ясно, что $A_\alpha' \cdot \hat{U} \subseteq A_\alpha'$. Легко проверить, что получили $\hat{U}$-модуль A_α'. Профакторизуем $\hat{U}$-модуль A_α' по подмодулю, который обозначим $\bar{A}_\alpha$, порожденному всеми элементами вида $n(a_{\alpha_1} u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_k}) - (n_\alpha a_\alpha)(n_{\alpha_1} u_{\alpha_1}) \cdots (n_{\alpha_k} u_{\alpha_k})$, где $n = n_\alpha n_{\alpha_1} \cdots n_{\alpha_k}$.

Получим $\hat{U}$-модуль $A_\alpha^+ = A_\alpha' / \bar{A}_\alpha$. Легко проверить, что $A_\alpha^+ \cdot \bar{U} = O$. Следовательно, $\hat{U}$-модуль A_α^+ является модулем над кольцом $U^* = \hat{U}/\bar{U}$. Обозначим полученный U^*-модуль A_α^+ через (A_α^+, U^*). Сво-

бодным произведением семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ будет прямая сумма семейства U^*-модулей

$$\{A_\alpha^+\}_{\alpha\in I}, \text{ т. е. } \prod_{\alpha\in I}^{*}(A_\alpha, U_\alpha)=\left(\sum_{\alpha\in I}\dot{A}_\alpha^+, U^*\right).$$

Таким образом, категория $\mathfrak{M}$ удовлетворяет всем тем условиям, что и категория, рассматриваемая в [1], т. е. условиям:

1. Существуют нулевые морфизмы, роль которых в $\mathfrak{M}$ играют нулевые гомоморфизмы.

2. Для любого семейства объектов существует прямое и свободное произведение.

3. Каждый морфизм обладает нормальным кообразом.

4. Произведение $\mu\nu$ любого нормального мономорфизма μ: $(A,U)\to$ $\to(B, V)$ и любого нормального эпиморфизма ν: $(B, V)\to(C, W)$ представим в виде $\mu\nu=\nu_1\mu_1$, где ν_1 — нормальный эпиморфизм, а μ_1 — нормальный мономорфизм.

5. Совокупность всех подобъектов любого объекта составляет множество.

§ 2. Многообразия в категории $\mathfrak{M}$

Если дан модуль $(A, U)\in Ob\mathfrak{M}$, то мы можем сказать, что задано представление ассоциативного кольца U эндоморфизмами абелевой группы A. Точно так же, как это сделано в „Добавлении" книги [5] для категории пар (G, Γ) ((G, Γ)—представление группы Γ автоморфизмами алгебраической системы G), докажем аналог теоремы Биркгофа для категории $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим свободный модуль $(A(X_0), U(Y_0))$ с системой свободных образующих (X_0, Y_0), где X_0 и Y_0 — счетные множества. Будем рассматривать пары множеств (Λ_1, Λ_2), где Λ_1 — некоторый набор элементов $U(Y_0)$-модуля $A(X_0)$, а Λ_2 — некоторый набор элементов ассоциативного кольца $U(Y_0)$. Множество Λ_2 определяет многообразие ассоциативных колец $K=K(\Lambda_2)$, состоящее из всех ассоциативных колец, в любом из которых элементы из Λ_2 тождественно обращаются в нуль. Каждый элемент $a_0\in A(X_0)$ выражается через конечное число некоторых элементов $x_1,\cdots, x_m\in X_0$ и $y_1, y_2,\cdots, y_n\in Y_0$. Если дан модуль (A, U), то, подставляя вместо $x_1,\cdots, x_m$ и $y_1,\cdots,y_n$ соответственно элементы модуля A и кольца U, мы получим некоторый элемент из A, значение a_0 в A. Если $a_0\in A(X_0)$, то теперь ясно как понимать, что в некотором модуле (A, U) выполняется тождество $a_0\equiv 0$. Всему множеству слов Λ_1 мы сопоставим такую полную подкатегорию $L=L(\Lambda_1)$ категории $\mathfrak{M}$, что в любом модуле этой подкатегории выполнено $a_0\equiv 0$ для всех $a_0\in\Lambda_1$.

Определение 2.1. Полная подкатегория $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ категории $\mathfrak{M}$, состоящая из всех таких модулей $(A, U)\in Ob\mathfrak{M}$, что $(A,$

$U) \in L(\Lambda_1)$ и кольцо $U' \in K(\Lambda_2)$, называется многообразием модулей категории $\mathfrak{M}$.

Легко видеть, что любое многообразие модулей категории $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений модулей.

Паре множеств (Λ_1, Λ_2) мы сопоставили многообразие $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Если, с другой стороны, $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, то этой полной подкатегории естественно отвечает пара множеств Λ_1 и Λ_2, где Λ_1 и Λ_2, соответственно, множество всех таких элементов $U(Y_0)$-модуля $A(X_0)$ и множество всех таких элементов кольца $U(Y_0)$, что для любого модуля $(B, V) \in \mathbf{N}$ каждый элемент из Λ_1 обращается тождественно в нуль на V-модуле B и любой элемент из Λ_2 обращается тождественно в нуль на кольце V.

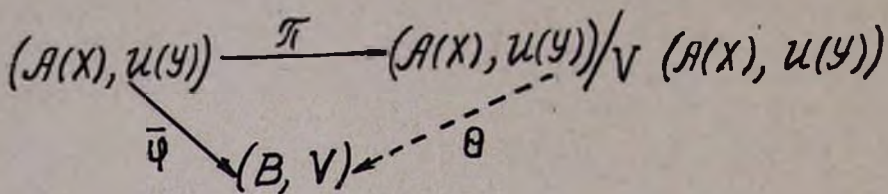
Определение 2.2. Идеал $(\overline{A}, \overline{U})$ модуля (A, U) называется вполне характеристическим идеалом, если он инвариантен относительно всех эндоморфизмов модуля (A, U), т. е. для любого эндоморфизма $\eta = (\eta_A, \eta_U)$ модуля (A, U) имеют место включения $\overline{A}\eta_A \subseteq \overline{A}$ и $\overline{U}\,\eta_U \subseteq \overline{U}$.

Пусть $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений. Если $(A, U) \in Ob\mathfrak{M}$, то обозначим через $V_{\mathbf{N}}(A, U) = (V_{\mathbf{N}}(A), V_{\mathbf{N}}(U))$ пересечение всех таких идеалов (A_α, U_α) модуля (A, U), для которых $(A, U)/(A_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{N}$. Ясно, что идеал $V_{\mathbf{N}}(A, U)$ совпадает со значением вербала (см. [3], стр. 225) полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ (замкнутой относительно вышеназванных трех операций), на модуле (A, U). Поэтому фактор-модуль $(A, U)/V_{\mathbf{N}}(A, U) \in \mathbf{N}$, и идеал $V_{\mathbf{N}}(A, U)$ является вполне характеристическим идеалом.

Если, в частности, $(A(X), U(Y))$ — некоторый свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, и $\mathbf{N}$ — некоторое многообразие в категории $\mathfrak{M}$, то фактор-модуль $(A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ называется (приведенным) свободным модулем многообразия $\mathbf{N}$.

Предложение 2.1. *Каждый модуль из многообразия* $\mathbf{N}$ *является гомоморфным образом некоторого свободного модуля этого многообразия.*

Доказательство. Пусть модуль $(B, V) \in \mathbf{N}$. Возьмем множества X и Y, равномощные соответственно образующим V-модуля B и образующим кольца V и рассмотрим свободный модуль $(A(X), U(Y))$ над парой множеств (X, Y). Отображение φ, ставящее в соответствие множеству X образующие V-модуля B и множеству Y образующие кольца V, продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi}$: $(A(X), U(Y)) \to (B, V)$. Ясно, что $\overline{\varphi}$ — гомоморфизм „на“. Из свойства рефлектора (см. [3], стр. 209) следует, что существует гомоморфизм θ: $(A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) \to (B, V)$, при котором коммутативна диаграмма



где π — естественный эпиморфизм. Из леммы 1.4.7* работы [3] следует, что θ — гомоморфизм „на". Предложение 2.1 доказано.

Пусть снова $(A(X), U(Y))$ — некоторый свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, порожденный парой множеств (X, Y), и $(B, V) \in Ob\mathfrak{M}$. Обозначим через $M = M(B, V)$ множество всех однозначных отображений $\mu\colon (X, Y) \to (B, V)$. Каждое такое отображение продолжается до гомоморфизма модулей $\bar{\mu}\colon (A(X), U(Y)) \to (B, V)$. Обозначим $(A(X)_M, U(Y)_M) = (\bigcap\limits_{\mu \in M} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}, \bigcap\limits_{\mu \in M} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{U(Y)})$. Из определения видно, что элемент $a \in A(X)$ тогда и только тогда принадлежит $U(Y)_M$-модулю $A(X)_M$, когда этот элемент тождественно обращается в нуль в V-модуле B, и элемент $u \in U(Y)$ тогда и только тогда принадлежит идеалу $U(Y)_M$ кольца $U(Y)$, когда этот элемент тождественно обращается в нуль в кольце V. Идеал $(A(X)_M, U(Y)_M)$ — вполне характеристический идеал модуля $(A(X), U(Y))$. Действительно, для

$$\forall a \in A(X)_M,\ \forall \eta \in End(A(X), U(Y)),\ \forall \mu \in M$$

имеем, что

$$(a\eta_{A(X)})\bar{\mu}_{A(X)} = a(\eta_{A(X)}\bar{\mu}_{A(X)}) = 0, \text{ так как } \eta\mu \in M.$$

Аналогично для

$$\forall u \in U(Y)_M,\ \forall \eta \in End(A(X), U(Y)),\ \forall \mu \in M$$

имеем, что $(u\eta_{U(Y)})\bar{\mu}_{U(Y)} = 0$.

Далее, пусть $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений. Обозначим через $V'_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ пересечение всех $(A(X)_{M(B,V)}, U(Y)_{M(B,V)})$ по всем модулям $(B, V) \in \mathbf{N}$. Легко доказать, что имеет место

Предложение 2.2. *Идеал $V'_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ модуля $(A(X), U(Y))$ совпадает со значением вербала полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ (замкнутой относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений), на модуле $(A(X), U(Y))$.*

Предложение 2.3. *Пара множеств (Λ_1, Λ_2) $((\Lambda_1, \Lambda_2) \subseteq (A(X_0), U(Y_0)))$ тогда и только тогда определяется некоторой полной подкатегорией $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$, замкнутой относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений,*

когда (Λ_1, Λ_2) *является вполне характеристическим идеалом модуля* $(A(X_0), U(Y_0))$.

Доказательство. Если (Λ_1, Λ_2) определяется некоторым **N**, то легко доказать, что

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\bigcap_{(B, V)\in \mathbf{N}} A(X_0)_{M(B, V)}, \bigcap_{(B, V)\in \mathbf{N}} U(Y_0)_{M(B, V)}) = V_{\mathbf{N}}(A(X_0), U(Y_0)).$$

Обратно. Пусть (Λ_1, Λ_2)—некоторый вполне характеристический идеал в модуле $(A(X_0), U(Y_0))$. Мы покажем, что если паре (Λ_1, Λ_2) отвечает многообразие **N**, а затем по этому многообразию будем восстанавливать соответствующие тождества (Λ_1', Λ_2'), то мы вернемся к исходным (Λ_1, Λ_2). Действительно, согласно предыдущему (Λ_1', Λ_2') — вполне характеристический идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$ и, кроме того, этот идеал совпадает с идеалом $V_{\mathbf{N}}(A(X_0), U(Y_0))$ модуля $(A(X_0), U(Y_0))$. Опираясь на полную характеристичность идеала (Λ_1, Λ_2), нетрудно доказать, что фактор-модуль $(A(X_0), U(Y_0))/(\Lambda_1, \Lambda_2)$ принадлежит полной подкатегории **N** и, следовательно, имеет место включение

$$(\Lambda_1', \Lambda_2') \subseteq (\Lambda_1, \Lambda_2), \text{ так как } (\Lambda_1', \Lambda_2') = V_{\mathbf{N}}(A(X_0), U(Y_0))$$

—это наименьший идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$, фактор-модуль по которому принадлежит подкатегории **N**. Обратное включение содержится в определениях. Предложение 2.3 доказано.

Перед тем, как доказать аналог теоремы Биркгофа для категории $\mathfrak{M}$, скажем еще несколько слов по поводу идеала, определяемого многообразием в свободном модуле этой категории.

Пусть $(A(X), U(Y))$ — свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, а **N** — некоторое многообразие, определенное тождеством (Λ_1, Λ_2) ((Λ_1, Λ_2)— вполне характеристический идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$), и пусть $V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) = (V_{\mathbf{N}}(A(X)), V_{\mathbf{N}}(U(Y)))$ — значение вербала многообразия **N** на модуле $(A(X), U(Y))$. Если $a_0 \in \Lambda_1$ и $\mu: (X_0, Y_0) \to (A(X), U(Y))$—некоторое однозначное отображение (отображение μ продолжается до гомоморфизма $\bar{\mu}: (A(X_0), U(Y_0)) \to (A(X), U(Y))$), то при таком отображении элемент $a_0 \in \Lambda_1$ принимает определенное значение в $A(X)$, скажем $\bar{a}_0$. Обозначим через $A_1 U(Y)$-подмодуль $U(Y)$-модуля $A(X)$, порожденный всевозможными $\bar{a}_0$ по всем $a_0 \in \Lambda_1$ и всевозможным μ. Так как для любого модуля $(B, V) \in \mathbf{N}$ и для $\forall \mu \in M(B, V)$, $A_1 \subseteq \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}$, то $A_1 \subseteq \bigcap_{\substack{\mu \in M(B, V) \\ (B, V)\in \mathbf{N}}} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)} = V_{\mathbf{N}}(A(X))$.

Пусть далее $\bar{U}$ — идеал кольца $U(Y)$, порожденный всеми значениями слов из идеала Λ_2 кольца $U(Y_0)$ в кольце $U(Y)$. $\bar{U}$—вполне характеристический идеал кольца $U(Y)$, и так как для любого модуля $(B, V) \in \mathbf{N}$ и для $\forall \mu \in M(B, V)$, $\bar{U} \subseteq \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{U(Y)}$, то $\bar{U} \subseteq V_{\mathbf{N}}(U(Y))$. Обозначим через $(\bar{A}, \bar{U})$ идеал модуля $(A(X), U(Y))$, порожденный

подмодулем $(A_1, \overline{U})$. Очевидно, что $\overline{A} \subseteq V_{\mathbf{N}}(A(X))$ и что $(A(X), U(Y))/(\overline{A}, \overline{U}) \in \mathbf{N}$. Отсюда следует, что $\overline{A} = V_{\mathbf{N}}(A(X))$ и $\overline{U} = V_{\mathbf{N}}(U(Y))$.

Теорема 2.1. *Полная подкатегория* $\mathbf{N}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда является многообразием, когда эта полная подкатегория замкнута относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что любое многообразие модулей категории $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно этих трех операций. Обратно. Пусть полная подкатегория $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ обладает этим свойством замкнутости и этой подкатегории $\mathbf{N}$ в модуле $(A(X_0), U(Y_0))$ соответствует пара множеств (Λ_1, Λ_2). Эта пара множеств (Λ_1, Λ_2) определяет некоторое многообразие $\overline{\mathbf{N}}$. Очевидно, что $\mathbf{N} \subseteq \overline{\mathbf{N}}$. Для того чтобы показать, что $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}$, достаточно показать, что в подкатегории $\mathbf{N}$ содержится любой свободный модуль многообразия $\overline{\mathbf{N}}$.

Пусть $(A(X), U(Y))$ — любой свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, $V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) = (V_{\mathbf{N}}(A(X)), V_{\mathbf{N}}(U(Y)))$ — значение вербала полной подкатегории $\mathbf{N}$ на модуле $(A(X), U(Y))$, и $V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) = (V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X)), V_{\overline{\mathbf{N}}}(U(Y)))$ — значение вербала многообразия $\overline{\mathbf{N}}$ на модуле $(A(X), U(Y))$. Так как $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$, то $V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) \subseteq V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$. Докажем обратное включение.

Пусть $\bar{a} \in V_{\mathbf{N}}(A(X))$. В записи этого элемента $\bar{a}$ участвует лишь конечное число элементов $x \in X$ и $y \in Y$, поэтому в $U(Y_0)$-модуле $A(X_0)$ можно найти такое a_0, что $\bar{a}$ является значением этого a_0 в $U(Y)$-модуле $A(X)$. При этом, так как $V_{\mathbf{N}}(A(X)) = \bigcap_{\substack{\mu \in M(B, V) \\ (B, V) \in \mathbf{N}}} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}$, то можно утверждать, что во всех модулях подкатегории $\mathbf{N}$ имеет место тождество $a_0 \equiv 0$ и, следовательно, $a_0 \in \Lambda_1$. Поэтому, вспоминая строение $\overline{U}$-модуля $\overline{A}$ (см. стр. 221), можно утверждать, что $\bar{a} \in \overline{A} = V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X))$. Значит $V_{\mathbf{N}}(A(X)) \subseteq V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X))$. Аналогично устанавливается включение $V_{\mathbf{N}}(U(Y)) \subseteq V_{\overline{\mathbf{N}}}(U(Y))$.

Мы получили, что $V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) = V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y))$. Из этого следует, что $(A(X), U(Y))/V_{\overline{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) = (A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) \in \mathbf{N}$. Значит, в полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ содержатся все свободные модули многообразия $\overline{\mathbf{N}}$ и поэтому $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}$. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем теперь к описанию многообразий категории $\mathfrak{M}$.

Зафиксируем некоторую тройку вида (n, T, T'), где n — натуральное число или бесконечность, а T и T' — некоторые, может быть, тривиальные многообразия ассоциативных колец, и рассмотрим те модули $(A, U) \in \mathfrak{M}$, для которых выполнены условия:

1) $\forall a \in A,\ na = 0$,

2) $U \in T$,

3) $\forall a \in A\ \forall u \in V_{T'}(U)$ ($V_{T'}(U)$ — это вербал многообразия T'), $a \cdot u = 0$.

Покажем, что такие модули образуют многообразие в категории $\mathfrak{M}$, которое мы обозначим $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Действительно

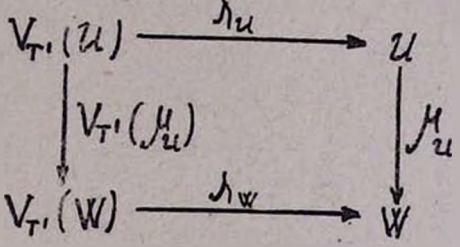
а) Пусть μ: $(A, U) \to (C, W)$ — мономорфизм и модуль $(C, W) \in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Тогда

1) $\forall a \in A$, $(na)\mu = n(a\mu_A) = 0 \Rightarrow na = 0$.

2) $U \in T$, так как μ_U: $U \to W$-мономорфизм и $W \in T$.

3) $\forall a \in A$, $\forall u \in V_{T'}(U)$, $(a \cdot u)\,\mu_A = (a\,\mu_A) \cdot (u\mu_U) = 0$, так как имеет место следующая коммутативная диаграмма:



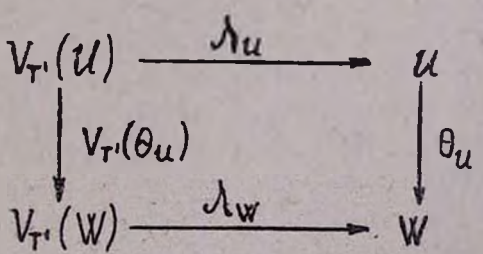
и, следовательно, $u\,\mu_U \in V_{T'}(W)$. Значит, модуль $(A, U) \in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

б) Пусть θ: $(A, U) \to (C, W)$ — нормальный эпиморфизм и модуль $(A, U) \in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$. Тогда

1) $\forall c \in C\ \exists\ a_c \in A$ такое, что $a_c\,\theta_A = c$. Поэтому $nc = n(a_c\,\theta_A) = (na_c)\,\theta_A = 0$.

2) $W \in T$, так как θ_U: $U \to W$ является нормальным эпиморфизмом и $U \in T$.

3) Так как $V_{T'}$ — вербал многообразия T', то имеет место следующая коммутативная диаграмма:



где $V_{T'}(\theta_U)$: $V_{T'}(U) \to V_{T'}(W)$ является нормальным эпиморфизмом (см. [3], теорема IV.5.10). Поэтому $\forall c \in C\ \exists a_{c_1} \in A$ такое, что $a_c\,\theta_A = c$ и $\forall w \in V_{T'}(W)\ \exists\ u_w \in V_{T'}(U)$ такое, что $u_w V_{T'}(\theta_U) = w$ и, значит,

$c \cdot w = (a_c \cdot u_w)\,\theta_A = 0$. Получили, что модуль $(C, W) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$.

в) Пусть $(A_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$ $(\alpha \in I)$. Покажем, что модуль

$$(A, U) = \prod_{\alpha \in I}^{\times} (A_\alpha, U_\alpha)(\pi_\alpha = (\pi_{A_\alpha}, \pi_{U_\alpha})) =$$

$$= (\prod_{\alpha \in I}^{\times} A_\alpha\,(\pi_{A_\alpha}), \prod_{\alpha \in I}^{\times} U_\alpha\,(\pi_{U_\alpha})) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}.$$

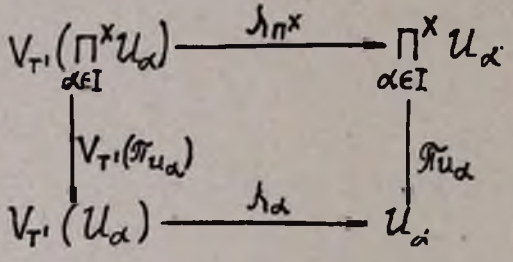
Действительно

1) $\forall a \in \prod_{\alpha \in I}^{\times} A_\alpha$, $a = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$, $na = (na_\alpha)_{\alpha \in I} = (0)_{\alpha \in I}$.

2) $\prod_{\alpha \in I}^{\times} U_\alpha \in T$, так как для $\forall \alpha \in I$, $U_\alpha \in T$.

3. $\forall \alpha \in I$, $\forall a_\alpha \in A_\alpha$, $\forall u_\alpha \in V_{T'}(U_\alpha)$, $a_\alpha \cdot u_\alpha = 0$. Покажем, что $\forall a \in A$, $\forall u \in V_{T'}(U)$, $a \cdot u = 0$.

Действительно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:



Из этой диаграммы видно, что для $\forall \alpha \in I \forall a \in A$ и $\forall u \in V_{T'}(U)$,

$$(a \cdot u)\,\pi_{A_\alpha} = (a\pi_{A_\alpha}) \cdot (u\,\pi_{U_\alpha}) = a_\alpha \cdot u_\alpha = 0.$$

Это равенство имеет место для $\forall \alpha \in I$. Значит,

$$\forall a \in A\ \forall u \in V_{T'}(U),\ a \cdot u = 0, \text{ так как } A = \prod_{\alpha \in I}^{\times} A_\alpha\,(\pi_{A_\alpha}).$$

Получили, что модуль $\prod_{\alpha \in I}^{\times} (A_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$.

Мы показали, что для любой фиксированной тройки вида (n, T, T'), где n — натуральное число, или же $n = \infty$, а T и T' — некоторые, может быть тривиальные многообразия категории ассоциативных колец, $\mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$ является многообразием категории $\mathfrak{M}$.

Замечание 2.1. Заранее можно считать, что $T' \subseteq T$. Действительно, так как кольцо $U \in T$, то $V_{T'}(U) = V_{T' \cap T}(U)$.

Замечание 2.2. Обозначим многообразие ассоциативных колец с одним тождеством $\{kx = 0\}$ $(k \in N)$, P_k. Так как для любого модуля $(A, U) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$, $A \cdot (nU) = (nA) \cdot U = 0$, то $nU \subseteq V_{T'}(U)$. Значит $V_{P_n}(U) = nU \subseteq V_{T'}(U)$, т. е. $T' \subseteq P_n$.

Из замечаний 2.1 и 2.2 вытекает, что $T' \subseteq T \cap P_n$.

В дальнейшем, рассматривая многообразие $\mathbf{N}_{n,\,T,\,\nu_{T'}}$, мы всегда будем иметь в виду, что тройка $(n,\ T,\ T')$ удовлетворяет условиям замечаний 2.1 и 2.2.

Теорема 2.2. *Для любого многообразия* $\mathbf{N}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *существует такая фиксированная тройка вида* $(n,\ T,\ T')$ $(n \in N$ *или же* $n = \infty$; T *и* T' *— некоторые, может быть тривиальные многообразия категории ассоциативных колец, удовлетворяющие условию* $T' \subseteq T \cap P_n)$, *что* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{n,\,T,\,\nu_{T'}}$.

Доказательство. Возьмем любое многообразие $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$. Рассмотрим все модули $(A,\ U) \in \mathbf{N}$. Модули $(A,\ O)$ и $(O,\ U)$ как подмодули модулей $(A,\ U) \in \mathbf{N}$ принадлежат многообразию $\mathbf{N}$. При сопоставлении каждому модулю вида $(A,\ O)$ абелевой группы A, получаем изоморфизм между полной подкатегорией $\mathbf{N}_0$ модулей вида $(A,\ O) \in \mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ и полной подкатегорией L категории абелевых групп. Аналогично, при сопоставлении каждому модулю вида $(O,\ U)$ ассоциативного кольца U, получаем изоморфизм между полной подкатегорией ${}_0N$ модулей вида $(0,\ U) \in \mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ и полной подкатегорией T категории ассоциативных колец. Поскольку $\mathbf{N}_0$ является многообразием в категории $\mathfrak{M}$, L является многообразием категории абелевых групп. Значит, либо существует такое натуральное число n, что $na = 0$ для любого элемента a абелевой группы $A \in \mathbf{L}$, либо подкатегория L совпадает со всей категорией абелевых групп. Отсюда вытекает, что модуль $(A,\ O) \in \mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда $na = 0$, для $\forall a \in A$, либо когда A — любая абелева группа. Аналогично, поскольку ${}_0\mathbf{N}$ является многообразием в категории $\mathfrak{M}$, T является многообразием категории ассоциативных колец.

Зафиксируем некоторое кольцо $U \in T$ и рассмотрим все модули $(A,\ U) \in \mathbf{N}$. Покажем, что модули такого вида составляют многообразие C_U в категории $\mathfrak{M}_U$ — правых модулей над кольцом U. Действительно, для подмодулей и эпиморфных образов модулей все ясно. Пусть дано некоторое семейство модулей $\{(A_\omega,\ U)\}_{\omega \in \Omega}$ таких, что $(A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$ $(\omega \in \Omega)$. Для $\forall \omega \in \Omega$, $(A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$, поэтому $\prod\limits_{\omega \in \Omega}{}^{\times} (A_\omega,\ U) = (\prod\limits_{\omega \in \Omega}{}^{\times} A_\omega,\ \prod\limits_{\omega \in \Omega}{}^{\times} U) \in \mathbf{N}$. Рассмотрим отображение

$$\sigma = (1,\ \sigma_U)\colon\ (\prod_{\omega \in \Omega}{}^{\times} A_\omega,\ U) \to (\prod_{\omega \in \Omega}{}^{\times} A_\omega,\ \prod_{\omega \in \Omega}{}^{\times} U),$$

определенное так:

$$\forall u \in U,\ u\sigma_U = (u)_{\omega \in \Omega}.$$

Легко видеть, что σ — гомоморфизм. Ясно, что σ — мономорфизм. Следовательно, U-модуль $(\prod\limits_{\omega \in \Omega}{}^{\times} A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$.

Значит, все модули вида $(A,\ U) \in \mathbf{N}$ $(U \in T$, кольцо U зафиксировано) составляют некоторое многообразие C_U в категории $\mathfrak{M}_U$. Поэтому существует такой двусторонний идеал $\overline{U}$ кольца U, что $A \cdot \overline{U} = O$ для $\forall A \in \mathbf{L}$ такого, что $(A,\ U) \in \mathbf{N}$.

Мы получили, что в любом кольце $U \in T$ зафиксирован такой двусторонний идеал $\overline{U}$, что для любой абелевой группы $A \in \mathbf{L}$ такой, что $(A, U) \in \mathbf{N}$, $A \cdot \overline{U} = O$. Покажем, что в многообразии T существует такое многообразие T', что $V_{T'}(U) = \overline{U}$. Тем самым, мы покажем (см. [3], следствие IV. 5.5), что в категории ассоциативных колец существует такое многообразие T', что значение вербала $V_{T'}$ на каждом кольце $U \in T$ совпадает с идеалом $\overline{U}$, $V_{T'}(U) = \overline{U}$.

Действительно, пусть $\varphi: U \to W$ $(U, W \in T)$ — некоторый гомоморфизм колец. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \uparrow{\scriptstyle \sigma_{\overline{U}}} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_{\overline{W}}} \\ V_{T'}(U) = \overline{U} & \xrightarrow{V_{T'}(\varphi)} & \overline{W} = V_{T'}(W) \end{array}$$

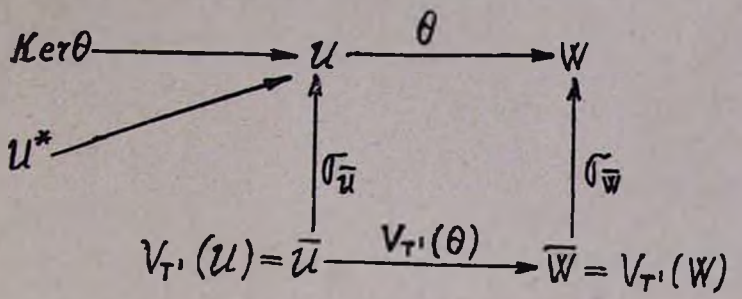
где $\sigma_{\overline{U}}$, $\sigma_{\overline{W}}$ — вложения идеалов $\overline{U}$, $\overline{W}$ соответственно в кольца U и W. Отображение $V_{T'}(\varphi)$: $\overline{U} \to \overline{W}$ определим так: $\forall \overline{u} \in \overline{U}$, $\overline{u}\, V_{T'}(\varphi) = \overline{u}\varphi$. Покажем, что $\operatorname{Im} V_{T'}(\varphi) \subseteq \overline{W}$.

Возьмем любой модуль $(A, W) \in \mathbf{N}$ и возьмем модуль $(O, U) \in \mathbf{N}$. Построим модуль (A, U), где отображение $A \times U \to A$ определено так: $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a \circ u = a \cdot (u\varphi)$. Покажем, что модуль $(A, U) \in \mathbf{N}$. Действительно, $(O, U) \in \mathbf{N}$ и $(A, W) \in \mathbf{N}$, поэтому $(O \times A, U \times W) \in \mathbf{N}$. Рассмотрим отображение $\tau = (\tau_A, \tau_U)$: $(A, U) \to (O \times A, U \times W)$, которое определено так: $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a\tau_A = (0, a)$, $u\tau_U = (u, u\varphi)$. Очевидно, что τ_A — гомоморфизм групп, τ_U — гомоморфизм колец, и так как для $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $(a \circ u)\tau_A = (0, a \cdot (u\varphi)) = (0, a)(u, u\varphi) = (a\tau_A) \cdot (u\tau_U)$, то τ — гомоморфизм модулей. Нетрудно заметить, что τ — мономорфизм, поэтому модуль $(A, U) \in \mathbf{N}$. Значит, для любой абелевой группы $A \in \mathbf{L}$ такой, что $(A, W) \in \mathbf{N}$, ввиду того, что $(A, U) \in \mathbf{N}$, имеем равенство $\forall a \in A\ \forall \overline{u} \in \overline{U}$, $a \cdot (\overline{u}\varphi) = a \circ \overline{u} = 0$. Следовательно, $\overline{U}\varphi = \operatorname{Im} V_{T'}(\varphi) \subseteq \overline{W}$.

Очевидно, что $V_{T'}(\varphi)$ — гомоморфизм колец, и диаграмма (*) коммутативна.

Мы показали, что $(V_{T'}, \sigma)$ — нормальный подфунктор (для любого кольца $U \in T$, $\sigma_{\overline{U}}$ — вложение идеала) (см. [3], стр. 155) тождественного функтора I_T категории T. Покажем, что $(V_{T'}, \sigma)$ — вербальный подфунктор. Для этого достаточно показать (см. [3], теорема IV. 5.10), что функтор $V_{T'}$ переводит нормальные эпиморфизмы в нормальные эпиморфизмы.

Пусть кольца U и W принадлежат многообразию T, и $\theta: U \to W$ — нормальный эпиморфизм. Рассмотрим диаграмму:



где U^* — полный прообраз идеала $\overline{W}$ при эпиморфизме θ. Покажем, что $V_{T'}(\theta)$ — нормальный эпиморфизм, т. е. $\operatorname{Im} V_{T'}(\theta) = \overline{W}$.

Предположим обратное, что $\bar{U}\, V_{T'}(\theta) \subset \overline{W}$. Рассмотрим идеал $\{\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U}\}$, порожденный множеством $\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U}$. Идеал $\{\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U}\} \subset U^*$. Построим кольцо с единицей $U^{(1)} = \{U, 1\}$, элементами которого являются пары вида (n, u) $(n \in N, u \in U)$. В этом кольце операции сложения и умножения определены по формулам:

$(n, u) + (m, u') = (n + m, u + u')$, $(n, u)\cdot(m, u') = (nm, uu' + nu' + mu)$.

Роль единицы этого кольца $U^{(1)}$ играет пара (1,0). Отметим, что сопоставление $u \to (0, u)$ является мономорфизмом кольца U в кольцо $U^{(1)}$ и при этом кольцо U так же, как и все идеалы кольца U, являются идеалами в кольце $U^{(1)}$.

Рассмотрим идеал $U' = \{\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U} \cup nU^{(1)}\}$ кольца $U^{(1)}$, порожденный множеством $\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U} \cup nU^{(1)}$ и возьмем U-модуль $\tilde{U}^{(1)} = U^{(1)}/U'$. Идеал $U' \neq U^{(1)}$, поэтому $\tilde{U}^{(1)}$ — ненулевой модуль. Обозначим этот модуль $(\tilde{U}, U)$. Имеем, что

1) $n\,\tilde{U}^{(1)} = O$.

2) $(O, U) \in \mathbf{N}$, потому что по условию кольцо $U \in T$.

3) U-модуль $\tilde{U}^{(1)}$ принадлежит многообразию C_U категории модулей $\mathfrak{M}_U$, так как $\tilde{U}^{(1)}\cdot\bar{U} = O$. Следовательно, модуль $(\tilde{U}^{(1)}, U) \in \mathbf{N}$, ввиду того, что многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули.

По условию, θ: $U \to W$ — нормальный эпиморфизм, поэтому $W \cong U/\operatorname{Ker}\theta$. Далее, $\tilde{U}^{(1)}\cdot\operatorname{Ker}\theta = O$, следовательно, пара $(\tilde{U}^{(1)}, W)$ является модулем, и существует гомоморфизм модулей $(1, \theta)$: $(\tilde{U}^{(1)}, U) \to (\tilde{U}^{(1)}, W)$. Мы получили, что модуль $(\tilde{U}^{(1)}, W) \in \mathbf{N}$, так как модуль $(\tilde{U}^{(1)}, U) \in \mathbf{N}$ и $(1, \theta)$ — нормальный эпиморфизм, в силу предложения 1.5. Значит, для любого $((n, u) + U') \in \tilde{U}^{(1)}$ и для любого $\bar{w} \in \overline{W}$ имеем, что $((n, u) + U')\cdot\bar{w} = (0, 0) + U'$.

По предположению, идеал $\{\operatorname{Ker}\theta \cup \overline{U}\}$ строго лежит в идеале U^*, поэтому найдется элемент $\bar{w} \in \overline{W}$, для которого не существует эле-

мента $u \in \{\mathrm{Ker}\ \theta \cup \overline{U}\}$, такого, что $u\theta = \overline{w}$. Но кольцо $W \cong U/\mathrm{Ker}\ \theta$, значит существует такой элемент $u^* \in U^*$, что $\overline{w} = u^* + \mathrm{Ker}\ \theta$. Из сказанного выше следует, что $u^* \overline{\in} \{\mathrm{Ker}\ \theta \cup \overline{U}\}$.

Для любого модуля $(A, U) \in \mathbf{N}$ имеем, что $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a \cdot (nu) = (na) \cdot u = 0$. Поэтому $nU \subseteq \overline{U}$ и, следовательно, $u^* \overline{\in} nU$, так как $u^* \overline{\in} \overline{U}$. Значит, не существует такого элемента $u \in U$, для которого выполнялось бы равенство $u^* = nu$, поэтому не существует такого элемента $(k, u) \in U^{(1)}$, который удовлетворял бы равенству $u^* = n(k, u) = (nk, nu)$. Мы получили, что $u^* \overline{\in} nU^{(1)}$, а так как $u^* \overline{\in} \{\mathrm{Ker}\ \theta \cup \overline{U}\}$, то $u^* \overline{\in} U'$. Отсюда вытекает, что для элемента $((1,0) + U') \in \overline{U}^{(1)}$, $((1,0) + U') \cdot \overline{w} = ((1,0) + U')(u^* + \mathrm{Ker}\ \theta) = (0, u^*) + U' \neq (0,0) + U'$.

Получили противоречие. Значит, $\mathrm{Im}\ V_{T'}(\theta) = \overline{W}$, т. е. $V_{T'}$ является вербалом некоторого многообразия T' категории T и, следовательно, как уже отмечали выше, является вербалом многообразия T' категории всех ассоциативных колец.

Мы показали, что для любого многообразия $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ существует такая тройка вида (n, T, T') ($n \in N$, или же $n = \infty$, T и T' некоторые многообразия категории ассоциативных колец такие, что $T' \subseteq T \cap P_n$), что $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$. Обратно. Возьмем любой модуль $(B, W) \in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$. Модуль $(O, W) \in \mathbf{N}$, так как многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули. Далее, $B \cdot V_{T'}(W) = B \cdot \overline{W} = O$, поэтому W-модуль B принадлежит многообразию C_W категории $\mathfrak{M}_W$. Следовательно, модуль $(B, W) \in \mathbf{N}$, так как многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули. Мы получили, что $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Теорема 2.2 доказана.

Тройки (n_1, T_1, T_1') и (n_2, T_2, T_2') считаются равными, если

$$n_1 = n_2,\ T_1 = T_2,\ T_1' = T_2'.$$

Предложение 2.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между всеми тройками вида* (n, T, T'), *где* $T' \subseteq T \cap P_n$ *и всеми многообразиями* $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Доказательство. а) Пусть $n_1 \neq n_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $n_1 > n_2$. Тогда модуль $(Z_{n_1}, O) \in \mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}$, но $(Z_{n_1}, O) \overline{\in} \mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_1'}}$, так как $n_2 Z_{n_1} \neq O$.

б) Пусть $n_1 = n_2$, но $T_1 \neq T_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $T_1 \overline{\subset} T_2$. Тогда существует такое кольцо $U \in T_1$, что $U \overline{\in} T_2$. Ясно, что модуль $(O, U) \in \mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}$, но $(O, U) \overline{\in} \mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$.

в) Пусть $n_1 = n_2$, $T_1 = T_2$, но $T_1' \neq T_2'$. Ввиду того, что $T_1' \subseteq T_1$, $T_2' \subseteq T_2$ и $T_1 = T_2$, существует такое кольцо $U \in T_1$, что $V_{T_1'}(U) \neq$

$\neq V_{T_2'}(U)$. Не нарушая общности, можно считать, что $V_{T_2'}(U) \subseteq V_{T_1'}(U)$. Поэтому существует такой элемент $u_2' \in V_{T_2'}(U)$, что $u_2' \overline{\in} V_{T_1'}(U)$. Рассмотрим модуль $(Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U)), U)$, где операция $(Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U))) \times U \to Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U))$ определена так:

$$\forall (k + n_1 Z) \in Z_{n_1},\ \forall (u + V_{T_1'}(U)) \in U/V_{T_1'}(U),\ \forall u' \in U,$$

$$(k + n_1 Z,\ u + V_{T_1'}(U)) \cdot u' = (0 + n_1 Z,\ (uu' + ku') + V_{T_1'}(U)).$$

Легко проверить, что этот модуль принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}$, но не принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$, так как для элемента

$$(1 + n_1 Z,\ 0 + V_{T_1'}(U)) \in (Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U)))$$

имеем, что

$$(1 + n_1 Z,\ 0 + V_{T_1'}(U)) \cdot u_2' = (0 + n_1 Z,\ u_2' + V_{T_1'}(U)) \neq$$

$$\neq (0 + n_1 Z,\ 0 + V_{T_1'}(U)), \quad \text{ибо} \quad u_2' \overline{\in} V_{T_1'}(U).$$

Предложение 2.4 доказано.

Предложение 2.5. *Для данного многообразия* $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ *значение вербала и рефлектора на любом модуле* $(A,\ U) \in \mathfrak{M}$ *имеют вид*

$$V_{\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}}(A,\ U) = (\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U)),$$

$$R_{\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}}(A,\ U) = (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ U/V_T(U)),$$

где $\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}$ — *подгруппа абелевой группы* A, *порожденная множеством* $nA \cup A \cdot V_{T'}(U)$, *и имеет место следующая короткая точная последовательность*:

$$(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U)) \xrightarrow{\sigma} (A,\ U) \xrightarrow{\theta} (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ U/V_T(U)).$$

Доказательство. Возьмем произвольный модуль $(A,\ U) \in \mathfrak{M}$. Легко видеть, что пара $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U)) \in Ob\mathfrak{M}$. Подмодуль $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U))$ модуля $(A,\ U)$ является идеалом модуля $(A,\ U)$, так как $V_T(U) \subseteq V_{T'}(U)$, в силу замечания 2.1. Значит, можно рассмотреть следующую короткую точную последовательность:

$$(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U) \xrightarrow{\sigma} (A,\ U) \xrightarrow{\theta} (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ U/V_T(U)).$$

Нетрудно заметить, что модуль

$$(A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ U/V_T(U)) \in \mathbf{N}_{n\ T,\ V_{T'}}.$$

Из свойства коядра легко следует, что этот модуль совпадает со значением рефлекторного фактор-функтора многообразия $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ на модуле $(A,\ U)$ и, значит, идеал $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U))$ совпадает со значением вербального подфунктора многообразия $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ на модуле $(A,\ U)$. Предложение 2.5 доказано.

Из теорем 2.1, 2.2 и предложений 2.3, 2.5 получаем

Следствие 2.6. *Для любого вполне характеристического идеала* $(\bar{A},\ \bar{U})$ свободного модуля $(A(X),\ U(Y))$ категории $\mathfrak{M}$ с системой свободных образующих $(X,\ Y)$, где X и Y—счетные множества, существует такая фиксированная тройка вида $(n,\ T,\ T')$ $(n \in N$, или же $n = \infty$; T и T'—некоторые многообразия категории ассоциативных колец, удовлетворяющие условию $T' \subseteq T \cap P_n)$, что

$$(\bar{A},\ \bar{U}) = (\{nA(X) \cup A(X) \cdot V_{T'}(U(Y))\},\ V_T(U(Y))).$$

Замечание 2.3. Пусть T_1 и T_2—некоторые многообразия ассоциативных колец. Для любого ассоциативного кольца U, $V_{T_1}(U) \times V_{T_2}(U)$ является идеалом этого кольца. Легко доказать, что существует такое многообразие ассоциативных колец, обозначим его $[T_1,\ T_2]$, что для любого ассоциативного кольца U, $V_{T_1}(U) \cdot V_{T_2}(U) = V_{[T_1,\ T_2]}(U)$.

Ясно, что $T_1 \subseteq [T_1,\ T_2]$ и $T_2 \subseteq [T_1,\ T_2]$.

Теорема 2.3. *Произведение любых двух многообразий* $\mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}$ *и* $\mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$ *определяется по формуле*

$$\mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}} \cdot \mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}} = \mathbf{N}_{n_1 n_2,\ T_1 T_2,\ V_{T'}},$$

где

$$T' = T_1' P_{n_2} \cap (T_1 T_2') P_d \cap [T_1,\ T_1 T_2'] \cap T_1 T_2 \cap P_{n_1 n_2},$$

$$d = (n_1,\ n_2), \quad \text{а} \quad P_k \ (k \in N)$$

обозначает многообразие ассоциативных колец с одним тождеством $\{kx = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$(\{n_1 A \cup A \cdot V_{T_1'}(U)\},\ V_{T_1}(U)) \xrightarrow{\theta_1} (A,\ U) \xrightarrow{\theta_1} (A/\{n_1 A \cup A \cdot V_{T_1'}(U)\},\ U/V_{T_1}(U)), \qquad (*)$$

где

$$(A/\{n_1 A \cup A \cdot V_{T_1'}(U)\},\ U/V_{T_1}(U)) = R_{\mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}}(A,\ U) \in \mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}}.$$

Модуль $(A,\ U) \in \mathbf{N}_{n_1,\ T_1,\ V_{T_1'}} \cdot \mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$, тогда и только тогда, когда в точной последовательности $(*)$ модуль

$$(\{n_1 A \cup A \cdot V_{T_1'}(U)\},\ V_{T_1}(U)) \in \mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$$

(см. [3], лемма IV. 6.5),а для того чтобы модуль $([n_1A \cup A \cdot V_{T_1'}(U)]_{\cdot}$ $V_{T_1}(U))$ принадлежал бы многообразию $\mathbf{N}_{n_2,\ T_2,\ V_{T_2'}}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $n_1 n_2 A = O$,
(2) $V_{T_1}(U) \in T_2$,
(3) $n_2 A \cdot V_{T_1'}(U) = O$,
(4) $n_1 A \cdot V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) = O$,
(5) $A \cdot V_{T_1'}(U) \cdot V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) = O$.

Так как $T_1' \subseteq T_1$ в силу замечания 2.1, то $V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) \subseteq V_{T_1}(U) \subseteq$ $\subseteq V_{T_1'}(U)$. Поэтому $A \cdot V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) \subseteq A \cdot V_{T_1'}(U)$. В силу условия (3) имеем, что

$$n_2 A \cdot V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) = O. \qquad (4'')$$

Из условий (4) и (4″) следует, что

$$dA \cdot V_{T_2'}(V_{T_1}(U)) = O, \qquad (4''')$$

где $d = (n_1,\ n_2)$.

Условия (2), (3), (4″), (5) соответственно эквивалентны условиям:

(2′) $U \in T_1 T_2$,

(3′) $A \cdot V_{T_1' P_{n_2}}(U) = O$,

(4′) $A \cdot V_{(T_1 T_2') P_d}(U) = O$,

(5′) $A \cdot V_{[T_1',\ T_1 T_2']}(U) = O$.

Вспоминая замечания 2.1 и 2.2, видим, что теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.4. Пусть дано многообразие $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$. В случае, когда $T' = T$, мы вместо $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ будем писать $\mathbf{N}_{n,\ T}$, так как в этом случае $V_{T'}(U) = O$.

Рассмотрим частный случай теоремы 2.3, когда $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$. В этом частном случае

$$T' = T_1 P_{n_2} \cap (T_1 T_2) P_d \cap [T_1,\ T_1 T_2] \cap T_1 T_2 \cap P_{n_1 n_2} = T_1 T_2,$$

ибо $[T_1,\ T_1 T_2] \supseteq T_1 T_2$, как это уже отмечали в конце замечания 2.3,

$(T_1 T_2) P_d \supseteq T_1 T_2$, $T_1 P_{n_2} \supseteq T_1 T_2$, так как $P_{n_2} \supseteq T_2' = T_2$,

и умножение многообразий монотонно (см. замечание 2.1 и [3], стр. 237), $P_{n_1 n_2} \supseteq T_1 T_2$, так как из того, что $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$ и из замечаний 2.1 и 2.2 следует включения $T_1 \subseteq P_{n_1}$ и $T_2 \subseteq P_{n_2}$.

Значит, в этом частном случае формула умножения многообразий принимает такой вид, $\mathbf{N}_{n_1, T_1} \cdot \mathbf{N}_{n_2, T_2} = \mathbf{N}_{n_1 n_2, T_1 T_2}$.

§ 3. Бимногообразия в категории $\mathfrak{M}$

В работе [1] при выполнении условий 1)—5) (см. § 1) рассматривалось понятие бимногообразия.

Определение 3.1. Многообразие B категории K называется бимногообразием, если выполнены следующие условия:

г) Для любого семейства объектов $A_i \in B$, $i \in I$, свободное произведение $\prod^*_{i \in I} A_i \in B$.

д) Если к B принадлежит подобъект $\langle U, \sigma \rangle$ некоторого объекта A, то к B принадлежит и идеал объекта A, порожденный подобъектом $\langle U, \sigma \rangle$.

В работе [1] доказано, что условия г) и д) эквивалентны условию

е) Каждый объект A категории K обладает наибольшим идеалом $\langle S_A, \mu_A \rangle$, принадлежащим многообразию B и содержащим все подобъекты объекта A, принадлежащие B.

Теорема 3.1. *Многообразие* $\mathbf{N}_{n, T, \nu_T}$, *категории* $\mathfrak{M}$ *является бимногообразием тогда и только тогда, когда* $T = T' = P_m$, *где* m — *делитель* n, *если* $n \in N$; *или* m — *любое натуральное число, если* $n = \infty$; *или же* $n = \infty$, $m = \infty$.

Доказательство. Покажем, что любое многообразие вида $\mathbf{N}_{n, P_m}$, где число m удовлетворяет условиям теоремы, является бимногообразием, которое мы обозначим $B_{n, m}$.

Возьмем любой модуль $(A, U) \in \mathfrak{M}$ и рассмотрим его подмодуль $(S_n(A), S_m(U))$, где $S_n(A)$—это множество всех тех элементов $a \in A$, для которых выполнено равенство $na = 0$, а $S_m(U)$ — это множество всех тех элементов $u \in U$, для которых выполнено равенство $mu = 0$. Легко доказать, что $(S_n(A), S_m(U))$ является идеалом модуля (A, U), удовлетворяющим условию е). Мы получили, что $B_{n, m}$ — бимногообразие категории $\mathfrak{M}$. Обратно. Пусть многообразие $\mathbf{N}_{n, T, \nu_T}$ является бимногообразием категории $\mathfrak{M}$. Докажем, что существует такое число m, удовлетворяющее условиям теоремы, что $T' = T = P_m$.

Рассмотрим все ассоциативные кольца U такие, что $(A, U) \in \mathbf{N}_{n, T, \nu_T}$ по крайней мере для одного модуля (A, U), т. е. рассмотрим все такие ассоциативные кольца U, что модули вида (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n, T, \nu_T}$. Эти кольца образуют многообразие T в категории ассоциативных колец. Из построения свободного произведения модулей следует, что для любого семейства колец $U_i \in T$, $i \in I$, свободное произведение $\prod^*_{i \in I} U_i \in T$.

Пусть U — такое подкольцо некоторого ассоциативного кольца W, что модуль вида $(O, U) \in \mathbf{N}_{n, T, \nu_T}$. Для любого модуля $(B, W) \in$

$\in Ob\mathfrak{M}$, идеал, порожденный в этом модуле подмодулем (O, U), принадлежит бимногообразию $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$. Поэтому модуль $(O, \overline{U})$, где $\overline{U}$ — идеал, порожденный подкольцом U в кольце W, принадлежит бимногообразию $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Мы получили, что многообразие T является бимногообразием. Из результатов работы [1] следует, что $T = P_m$, где m — либо натуральное число, либо бесконечность. Покажем, что если $n \in N$, то m — делитель n. Возьмем такую абелеву группу A, что $\forall a \in A$, $na = 0$, и такое ассоциативное кольцо U с единицей 1, что $m \cdot 1 = 0$. Модули (A, O) и (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}} = \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$, так как это бимногообразие содержит все такие модули. Рассмотрим модуль (A, U), для которого операция умножения определена по формуле $a \cdot u = 0$ для $\forall a \in A$ и $\forall u \in U$. Обозначим его $(A, U)_0$. Построим далее модуль $(A \times U, U)$, где операция умножения определена по формуле $(a, u) \cdot u' = (0, uu')$ и построим отображение σ: $(A, U)_0 \to (A \times U, U)$, которое определяется так: $\forall a \in A$, $a^{\sigma_A} = (a, 0)$ и $\forall u \in U$, $u^{\sigma_U} = u$. Для

$$\forall a \in A,\ \forall u \in U,\ (a \cdot u)^{\sigma_A} = (a \cdot u,\ 0) = (0,0) = (a,\ 0) \cdot u = (a^{\sigma_A}) \cdot (u^{\sigma_U}),$$

поэтому σ — гомоморфизм модулей. Ясно, что σ — мономорфизм.

Модуль $(A, U)_0 \in \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$, так как из $(A, O) \in \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$ и $(O, U) \in \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$ следует, что $(A, O) \times (O, U) \cong (A, U)_0 \in \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$.

По условию $\mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$ — бимногообразие, поэтому идеал, порожденный подмодулем $(A, U)_0$ в модуле $(A \times U, U)$, должен принадлежать $\mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$. Идеалом, порожденным подмодулем $(A, U)_0$ в модуле $(A \times U, U)$ будет $(A \times U, U)$, так как подгруппой $\overline{D}$, порожденной в абелевой группе $A \times U$ множеством

$$D = A \cup A \cdot U \cup (A \times U) \cdot U = A \cup (A \times U) \cdot U$$

будет

$$\overline{D} = \{A \cup (A \times U) \cdot U\} \cong |(A, O) \cup (O, U)| = A \times U.$$

Но если m не является делителем n, то $n(a, u) = (0, nu) \neq (0, 0)$. Это противоречит тому, что модуль $(A \times U, U) \in \mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$. Следовательно, n делится на m.

Мы знаем, что $T' \subseteq T = P_m$. Докажем, что $T' = P_m$. Предположим обратное, что $T' \subset P_m$. Это значит, что существует такое кольцо $U \in P_m$, что $V_{T'}(U) \neq O$. Построим кольцо $U^{(1)} = \{U, 1\}$ (см. стр. 227) и рассмотрим ненулевой правый U-модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$. Модули $(U^{(1)}/nU^{(1)}, O)$ и (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$, потому что $\mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$ содержит все такие модули. Так как $\mathbf{N}_{n,\ P_m,\ V_{T'}}$ —

бимногообразие, то модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U) \in \mathfrak{M}$ обладает наибольшим идеалом, принадлежащим $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ и содержащим все подмодули модуля $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$, принадлежащие $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$. В частности, этот идеал должен содержать подмодули $(U^{(1)}/nU^{(1)}, O)$ и (O, U). Следовательно, этот идеал совпадает с самим модулем $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$. Мы получили, что модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U) \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$. Из этого следует, что для любого элемента $(k, u) + nU^{(1)}$ абелевой группы $U^{(1)}/nU^{(1)}$ и для $\forall u' \in V_{T'}(U)$ должно выполняться равенство $((k, u) + nU^{(1)}) \cdot u' = (0, 0) + nU^{(1)}$.

Мы предположили, что $T' \subset P_m$ и уже доказали, что m — делитель n. Отсюда следует, что $nU \subseteq mU \subset V_{T'}(U)$. Значит существует элемент $\bar{u} \in V_{T'}(U)$ такой, что $\bar{u} \in nU$, и поэтому элемент $(0, \bar{u}) \in nU^{(1)}$. Для элемента $((1, 0) + nU^{(1)}) \in U^{(1)}/nU^{(1)}$ произведение $((1,0) + nU^{(1)}) \cdot \bar{u} = (0, \bar{u}) + nU^{(1)} \neq (0, 0) + nU^{(1)}$. Получили противоречие. Теорема 3.1 доказана.

Из замечания 2.4 следует

Теорема 3.2. *Для любых двух бимногообразий B_{n_1, m_1} и B_{n_2, m_2} категории $\mathfrak{M}$ имеет место следующая формула умножения бимногообразий, $B_{n_1, m_1} \cdot B_{n_2, m_2} = B_{n_1 n_2, m_1 n_2}$.*

Теорема 3.3. *Коммутативная полугруппа $B(\mathfrak{M})$ всех бимногообразий категории $\mathfrak{M}$ представляет собой пополненную нулем $B_{\infty, \infty}$ и единицей $B_{1,1}$ связку, состоящую из свободной полугруппы $B_{\infty}(\mathfrak{M})$ бимногообразий вида $B_{\infty, m}$ $(m \in N)$, изоморфной мультипликативной полугруппе натуральных чисел и являющейся идеалом в полугруппе $B(\mathfrak{M})$, и свободной коммутативной полугруппы $B_N(\mathfrak{M})$ бимногообразий вида $B_{n, m}$ $(n, m \in N$ и $n \neq 1)$, свободными образующими которой являются бимногообразия вида $B_{p, 1}$ и $B_{p, p}$, где p — простое число.*

Доказательство. Легко показать, что если $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители, а $m = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ $(\beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \cdots, k)$ — разложение числа m на простые множители, то имеем следующие формулы:

$$B_{n, m} = \prod_{i=1}^{k} (B_{p_i, 1})^{\alpha_i - \beta_i} (B_{p_i, p_i})^{\beta_i} \text{ и } B_{\infty, m} = \prod_{i=1}^{k} (B_{\infty, p_i})^{\beta_i}.$$

Теорема 3.3 доказана.

Так как бимногообразия составляют полную полуструктуру относительно пересечений (см. [1]), и существует наибольшее бимногообразие $B_{\infty, \infty}$, то бимногообразия категории $\mathfrak{M}$ составляют полную структуру. Легко проверить, что пересечение и объединение любого множества бимногообразий $B_{n_1, m_1}, \cdots, B_{n_k, m_k}, \cdots$ определяется следующим образом:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_{n_i,\, m_i} = B_{(n_1,\cdots,\, n_k,\cdots),\, (m_1,\cdots,\, m_k,\cdots)},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{n_i,\, m_i} = B_{[n_1,\cdots,\, n_k,\cdots],\, [m_1,\cdots,\, m_k,\, \cdots]},$$

где $(n_1,\cdots,\, n_k,\cdots)$—это общий наибольший делитель чисел $n_1,\cdots,\, n_k,\, \cdots$, а $[n_1,\cdots,\, n_k,\, \cdots]$—общее наименьшее кратное этих чисел.

Легко показать, что имеет место

Теорема 3.4. *Структура бимногообразий категории* $\mathfrak{M}$ *дистрибутивна.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.III.1973

Գ. Գ. ԷՄԻՆ. Բազմանևություններ և երկբազմանևություններ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է $\mathfrak{M}$ *կատեգորիան՝ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիան, որի օբյեկտներն են հանդիսանում բոլոր հնարավոր (A,U) զույգերը, որտեղ U-ն ասոցիատիվ օղակ է, A-ն աջ U-մոդուլ, ընդհանրապես ասած ոչ ունիտար, իսկ* $\mathfrak{M}$ *կատեգորիայի մորֆիզմները, դրանք կիսագծային հոմոմորֆիզմներն են (նայիր [2] և [4]):*

Բացահայտ ձևով ցույց է տրված, թե ինչպես է կառուցված $\mathfrak{M}$ *կատեգորիայի ցանկացած օբյեկտների ընտանիքի ազատ արտադրյալը և բացի այդ բացահայտված են* $\mathfrak{M}$ *կատեգորիայի մի շարք հատկություններ: Ապացուցված է, որ* $\mathfrak{M}$ *կատեգորիայի վրա տարածվում է բազմանևությունների մասին Բիրկհոֆի հայտնի թեորեմը: Տրված է* $\mathfrak{M}$ *կատեգորիայի բազմանևությունների և երկբազմանևությունների լրիվ նկարագրությունը: Գտնված են բազմանևությունների և երկբազմանևությունների բազմապատկման բանաձևերը:*

G. G. EMIN. *Varieties and bivarieties in the category of modules over all rings* (summary)

The category $\mathfrak{M}$ — modules over all rings, is considered. The objects of the category are all possible pairs $(A,\, U)$, U is an associative ring, A is the right U — module, nonunitary in general case, while the morphisms of the category $\mathfrak{M}$ are semi—linear homomorphisms (see [2] and [4]).

It is shown in an explicit form how the free product of any family of objects of the category $\mathfrak{M}$ is constructed and some other properties of the category $\mathfrak{M}$ are also established. Birkhoff's theorem about the varieties is proved for the category $\mathfrak{M}$. A complete description of varieties and bivarieties of the category $\mathfrak{M}$ is given. The formulas of multiplication of varieties and bivarieties are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Г. Шульгейфер.* Бимногообразия в категориях, Сибирский матем. журнал, XI, № 6, 1970, 1362—1389.
2. *Б. М. Рудык.* Расширение модулей, Труды ММО, 21, 1970, 209—244.
3. *М. С. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Лекции по теории категорий, М., Изд. МГУ, 1970.
4. *Е. Л. Горбачук.* Радикалы в модулях над разными кольцами, Математические исследования, VII, вып. 1 (23), 1972, 44—59.
5. *Б. И. Плоткин.* Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., Изд. „Наука", 1966.
6. *М. С. Цаленко.* Критерий полноты бикатегории, Математические исследования, принято к печати.