ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. Г. КАЗАРЯН

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

0°. Основные определения и результаты

Пусть R_n и E_n—n-мерные евклидовы пространства действительных векторов (точек) $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ и $x=(x_1,\cdots,x_n)$, A_n — n-мерное евклидово пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где все $\alpha_i\,(i=1,\cdots,n)$— целые неотрицательные числа. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in A_n$, то положим

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\ |\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}=i^{-|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}\cdot$$

Обозначим еще

$$R_n^{(0)}=\left\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \prod_{i=1}^n\xi_i\neq 0\right\}\cdot$$

Определение 0.1. (См., например, [1], определение 4.1.1). Полином $P(\xi)=\sum\limits_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$, где γ_α — вообще говоря комплексные числа, называется гипоэллиптическим, если для всех $\nu\in A_n$, $|\nu|\neq 0$

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)|\to 0 \text{ при } |\xi|\to\infty. \tag{0.1}$$

Цель настоящей работы—найти условия гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ в терминах обобщенно-однородных частей характеристического многогранника этого полинома.

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего определения.

Определение 0.2. Характеристическим многогранником (х. м.) данного полинома $P(\xi)=\sum\limits_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ назовем минимальный выпуклый многогранник в A_n, содержащий все точки $\alpha\in A_n$, для которых $\gamma_\alpha\neq 0$ в полиноме $P(\xi)$.

Определение 0.3. Многогранник $\mathfrak{M}$ назовем вполне правильным (в. п.), если а) $\mathfrak{M}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и в) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней х.м. $\mathfrak{M}$ положительны.

Обозначим k-мерные $(0\leqslant k<n-1)$ грани данного х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)=\sum\limits_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ через $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k)$.

Определение 0.4. Грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k,\ k=0,\cdots,n-1)$ х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)$ назовем P-регулярной, если полином $P^{i,k}(\xi)=$

$= \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0$, при $\xi \in R_n^{(0)}$. Грани не являющиеся P-регулярными будем называть P-нерегулярными.

Определение 0.5. Полином $Q(\xi) = \sum\limits_\alpha q_\alpha \xi^\alpha$ называется обобщенно-однородным (λ-однородным) порядка d, если существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ такой, что $(\lambda, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = d$ для всех α, для которых $q_\alpha \neq 0$. Если $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, то полином $Q(\xi)$ называется однородным порядка d.

Л. Хермандеру [1] принадлежит следующий результат:

Теорема ([1], теорема 4.1.8). Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda, \alpha) \le d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Если $P^0(\xi) = \sum\limits_{(\lambda, \alpha) = d} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0$ на $R_n \setminus \{0\}$, то $P(\xi)$ гипоэллиптичен.

В случае, когда $P^0(\xi)$ — однородный полином и $P^0(\xi) \neq 0$ в $R_n \setminus \{0\}$, полином $P(\xi)$ называется эллиптическим. Л. Хермандером доказано, что эллиптические полиномы являются единственными гипоэллиптическими полиномами, однородная часть которых не имеет кратных вещественных характеристик.

Заметим в этой связи, что из результатов настоящей заметки следует, что полином с обобщенно-однородной, но не однородной главной частью может быть гипоэллиптическим, в то время как λ-однородная часть этого полинома имеет вещественные простые характеристики. Например, $P(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^5 + i\xi_1\xi_2^3$. Отметим, что пример такого рода можно найти также в работе [3], где гипоэллиптичность полинома такого рода доказывается непосредственно.

Задача о нахождении условий гипоэллиптичности рассматривалась многими авторами. Отметим некоторые из них: прежде всего уже упомянутая книга Л. Хермандера, а также работы С. М. Никольского [2], Бруно Пини [3], Йорана Фриберга [4], Л. Каттабрига [5], Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [6] и других.

В работе [2] доказывается гипоэллиптичность полинома, посредством которого оцениваются все мономы, входящие в этот полином. В работе [6] даются условия, при которых через данный полином оцениваются входящие в него все мономы и, тем самым, получаются достаточные условия гипоэллиптичности. В работах [4], [5], также как в работах [2] и [6], получены достаточные условия гипоэллиптичности в „эллиптическом" случае, когда все мономы, входящие в данный полином, оцениваются через него. Наиболее общий результат в этом направлении принадлежит Л. Р. Волевичу и С. Г. Гиндикину [6].

Другой достаточный признак гипоэллиптичности легко следует из одного результата В. П. Михайлова [7].

В работе [3] рассмотрены полиномы с обобщенно однородными главными частями, но и в том случае, когда рассматриваемый полином не является эллиптическим, причем условие гипоэллиптичности одного полинома сводится к условию гипоэллиптичности другого.

Таким образом, в отмеченных работах либо условия гипоэллиптичности одного полинома сводятся к гипоэллиптичности другого (см. [3]), либо рассматриваются полиномы, которые в некотором смысле эллиптичны—они или их части не обращаются в нуль в $R_n^{(0)}$. (См. [4], [5], [6]).

В настоящей работе даются условия, при которых неэллиптический полином $P(\xi)$ является гипоэллиптическим. В 0° приводятся основные результаты работы. В 1°—4° содержатся доказательства этих утверждений. В 4° приводятся также примеры полиномов, иллюстрирующих полученные результаты.

Нетрудно доказать (см., например, [4], [5], [6]), что для гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ необходимо, чтобы х.м. точек $\{\alpha\} \cup \{0\}$ был в.п., где $\{\alpha\}$ — множество мультииндексов, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$ в полиноме $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что х.м. $\mathfrak{M}$ рассматриваемого полинома является в.п.

Рассмотрим сначала полиномы с вещественными постоянными коэффициентами. Приведем еще несколько определений и обозначений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 0.6. $(n-1)$-мерную грань $\mathfrak{M}_i^{n-1}$ $(i=1,\cdots, M_{n-1})$ х.м. $\mathfrak{M}$ будем называть главной, если внешняя (относительно $\mathfrak{M}$) нормаль этой грани имеет хотя бы одну положительную координату; k-мерную грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots, M_k,\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-2)$ х.м. $\mathfrak{M}$ будем называть главной, если среди $(n-1)$-мерных граней, пересечением которых образуется грань $\mathfrak{M}_i^k$, существует хотя бы одна главная грань.

Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. полинома $P(\xi)$, $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Lambda_{i_0}^{k_0}$ множество единичных внешних нормалей грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ ($\Lambda_{i_0}^{k_0}$ состоит из одного элемента при $k_0 = n-1$).

Пусть $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, тогда полином $P(\xi)$ можно представить в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{0.2}$$

где $d_0(\lambda) > d_1(\lambda) > \cdots > d_{N_\lambda} \geqslant d_{N_\lambda+1} = 0$,

$$P_{d_0(\lambda)}(\xi) \equiv P^{i_0,k_0}(\xi) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$\Sigma^{i_0,k_0} \equiv \Sigma_{d_0(\lambda)}^{i_0,k_0} = \{\eta;\ \eta \in R_n^{(0)},\ P^{i_0,k_0}(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma_{d_j(\lambda)}^{i_0,k_0} = \{\eta;\ \eta \in \Sigma_{d_{j-1}(\lambda)}^{i_0,k_0},\ P_{d_j(\lambda)}(\eta) = 0\},\ j = 1,\cdots, N_\lambda.$$

Положим еще для $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, $\eta \in \Sigma_{d_j(\lambda)}^{i_0,k_0}$

$$A^{i_0,k_0}_{\ldots}(\eta) = \{\nu;\ \nu \in A_n,\ D^\nu P_{d_j(\lambda)}(\eta) \neq 0\},$$

$$\bigcup_{\nu\in\bar{d}_j^{l_0,k_0}(\lambda)} \mathbf{A}^{l_0,k_0}_{d_j(\lambda)}(\eta)=\mathbf{A}^{l_0,k_0}_{d_j(\lambda)}\ (j=1,\cdots,N_\lambda),\ \mathbf{A}^{l_0,k_0}_{d_0(\lambda)}\equiv\mathbf{A}^{l_0,k_0}.$$

Основными результатами настоящей заметки являются следующие:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. полинома $P(\xi)$, $\mathfrak{M}^{k_0}_{l_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$.*

Если для $\lambda\in\Lambda^{k_0}_{l_0}$ $\sum^{l_0,k_0}_{d_{m_\lambda}}\neq\varnothing$, $\sum^{l_0,k_0}_{d_{m_\lambda+1}}=\varnothing$ для некоторого числа m_λ, $1\leqslant m_\lambda<N_\lambda$, то для того чтобы полином $P(\xi)$ был гипоэллиптическим необходимо выполнение следующего условия:

$$\max_{\substack{\nu^j\in A^{l_0,k_0}_{d_j(\lambda)}\\ 1\leqslant j\leqslant m_\lambda}} |d_j(\lambda)-(\lambda,\nu^j)|<d_{m_\lambda+1}.$$

Достаточные условия гипоэллиптичности дают нижеприведенные теоремы 2—4. В теоремах 2 и 3 коэффициенты γ_α предполагаются действительными.

Теорема 2. *Пусть все главные грани в.п. х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)$, кроме одной главной $(n-1)$-мерной грани $\mathfrak{M}^{n-1}_{l_0}$, P-регулярны, а грань $\mathfrak{M}^{n-1}_{l_0}$ P-нерегулярна. Тогда полином $P(\xi)$ гипоэллиптичен при одновременном выполнении следующих условий:*

а) $$\max_{\nu\in A^{l_0,n-1}}\{d_0-(\lambda,\nu)\}<d_1,$$

где $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ — внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}^{n-1}_{l_0}$, $d_0\equiv d_0(\lambda)$, $d_1\equiv$ $\equiv d_1(\lambda)$.

в) *для каждой точки $\eta\in\sum^{l_0,n-1}$ существуют аналитические в $R^{(0)}_n$ функции $r(\eta,\xi)$ и $\mathbf{P}(\eta,\xi)$ такие, что в некоторой окрестности точки η полином $P^{l_0,n-1}(\xi)$ представляется в виде*

$$P^{l_0,n-1}(\xi)=[r(\eta,\xi)]^{k(\eta)}\mathbf{P}(\eta,\xi)>0\ (\leqslant 0), \tag{0.3}$$

где $k(\eta)$ — натуральное число $\mathbf{P}(\eta,\eta)\neq 0$, $\dfrac{\partial r(\eta,\eta)}{\partial\xi_i}\neq 0$, $(i=1,\cdots,n)$,

с) $$P_{d_1}(\eta)>0\quad(<0)\quad\forall\eta\in\textstyle\sum^{n-1}_{l_0}.$$

Замечание 0.1. Легко видеть, что при наличии представления (0.3) условие а) можно сформулировать так:

а) $d_0-(\lambda,\nu)<d_1$ для всех $\nu\in A_n$, для которых $|\nu|>k(\eta)$. С другой стороны, очевидно из этого условия следует, что $d_0-(\lambda,\nu)<d_1$ для всех $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$, где все $\nu_i\ (i=1,\cdots,n)$ действительные числа.

Замечание 0.2. Необходимость условия а) следует из теоремы 1. Существенность требований неотрицательности (положительности) полиномов $P^{l_0,n-1}(\xi)$ и $P_{d_1}(\eta)$ в условиях в) и с) будет показана на примерах (см. примеры 5 и 12). Необходимость представления (0.3) в случае $n=2$ следует из леммы 2.1 (см. п°. 2).

В случае, когда для некоторой точки $\eta \in \sum^{l_0, n-1}$ также $P_{d_1}(\eta) = 0$, т. е. когда $\sum_{d_1}^{l_0, n-1} \neq \varnothing$, достаточные условия дает

Теорема 3. *Пусть, как и в теореме 2, $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$ — единственная главная P-нерегулярная грань в.п. х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)$, причем*

$$\sum_{d_1}^{l_0, n-1} \neq \varnothing, \quad \sum_{d_2}^{l_0, n-1} = \varnothing.$$

Тогда полином $P(\xi)$ является гипоэллиптическим при одновременном выполнении следующих условий:

а)
$$\max_{\substack{\nu^j \in A_{d_j}^{l_0, n-1} \\ j=0,\,1}} \{d_j - (\lambda, \nu^j)\} < d_2;$$

в) *если $\eta \in \sum^{l_0, n-1}$, но $\eta \overline{\in} \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$, то выполняются условия* в) *и* с) *теоремы* 2, *а для всех точек $\eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta, \xi)$, $\mathrm{P}(\eta, \xi)$, $\tilde{r}(\eta, \xi)$, $\tilde{\mathrm{P}}(\eta, \xi)$ такие, что в некоторой окрестности η полиномы $P^{l_0, n-1}(\xi)$ и $P_{d_1}(\xi)$ представляются в виде*

$$P^{l_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)}\, \mathrm{P}(\eta, \zeta) > 0 \ (\leqslant 0),$$

$$P_{d_1}(\xi) = [\tilde{r}(\eta, \xi)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathrm{P}}(\eta, \xi) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

где функции r, $\tilde{r}$, P, $\tilde{\mathrm{P}}$ и числа k, $\tilde{k}$ удовлетворяют условиям, аналогичным условиям в) *теоремы* 2;

с) *в точках* $\eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$ $P_{d_2}(\eta) > 0 \ (< 0)$.

Замечание 0.3. Легко видеть, что при наличии представления в), условие а) можно сформулировать так:

$$\text{а}')\ \max\, \{d_0 - (\lambda, \nu^0),\ d_1 - (\lambda, \nu^1)\} < d_2$$

для всех $\nu^0, \nu^1 \in A_n$ таких, что $|\nu^0| > k(\eta)$, $|\nu^1| \geqslant \tilde{k}(\eta)$.

Замечание 0.4. Если $\sum_{d_2}^{l_0, n-1} \neq \varnothing$, то можно сформулировать теорему, дающую достаточные условия гипоэллиптичности, поставив соответственные условия на полиномы $P_{d_2}(\xi)$, аналогичные условию в) теоремы 2 и условия на $P_{d_3}(\xi)$, аналогичные условию с) теоремы 2 и т. п.

Замечание 0.5. Теоремы 2 и 3 можно было объединить в одну теорему. Но мы это не сделали по двум соображениям: во-первых, чтобы подчеркнуть значение теоремы 1 и, во-вторых, чтобы по возможности упростить доказательства.

Пусть теперь $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ — полином с переменными (вообще говоря комплексными) коэффициентами, причем функции $\gamma_\alpha(x)$ определены в некоторой области $\Omega \subset E_n$.

Определение 0.7. Полином $P(x, \xi)$ будем называть гипоэллиптическим в точке $x^0 \in \Omega$, если гипоэллиптическим является полином $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами. Полином $P(x, \xi)$ будем называть гипоэллиптическим в Ω, если $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен в каждой точке $x \in \Omega$.

Пусть $\mathfrak{M}(x)$ — х.м. полинома $P(x, \xi)$, имеющий в точке $x^0 \in \Omega$ $P(x^0, \xi)$-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$.

Положим (λ — внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$)

$$K(x, \xi) = \overline{P^{i_0, n-1}(x, \xi)} \cdot \sigma^{i_0, n-1}(x, \xi) + P^{i_0, n-1}(x, \xi) \cdot \overline{\sigma^{i_0, n-1}(x, \xi)},$$

где

$$\sigma^{i_0, n-1}(x, \xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha, \ 2d_1 - d_0 \leqslant (\lambda, \alpha) < d_0,$$

$\overline{R}$ — комплексно сопряженное R.

Следующее предложение дает достаточный признак гипоэллиптичности полинома $|P(x, \xi)|^2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}(x^0)$ — в.п. х.м. полинома $P(x^0, \xi)$, $x^0 \in \Omega$, имеющий единственную главную $(n-1)$-мерную P-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$. Тогда полином $|P(x, \xi)|^2$ является гипоэллиптическим в точке $x^0 \in \Omega$ при одновременном выполнении следующих условий:*

a) $$\max_{\nu \in \Lambda^{i_0, n-1}} \{d_0 - (\lambda, \nu)\} < d_1,$$

в) *в некоторой окрестности каждой точки* $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$ $K(x^0, \eta) > 0$ *и полином* $P(x^0, \xi)$ *представляется в виде* (0.3),

с) $P_{d_1}(x^0, \eta) \neq 0$ *для всех* $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$.

Замечание 0.6. Признак гипоэллиптичности полинома $P(x, \xi)$ в Ω можно получить, если ставить условия а) — с) теоремы 4 для всех точек $x \in \Omega$. Другой признак гипоэллиптичности в Ω можно получить, если исходить из теоремы 4.1.6 работы [1], из теоремы 4 настоящей работы и из теоремы 3 работы [8]. Из отмеченных результатов следует, что если полином $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω (см. [1], определение 7.1.1) и гипоэллиптичен в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, то $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен в Ω. В теореме 3.1 работы [8] получены условия постоянства силы в Ω полинома $P(x, \xi)$.

1°. Доказательство теоремы 1

В. П. Михайловым в [7] доказана

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — х.м. полинома $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Тогда полином* $P^{i, k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ $(i = 1, \cdots, M_k, \ k = 0, \cdots, n-1)$ *является λ-однородным для любого $\lambda \in \Lambda_i^k$.*

Представим полином $P(\xi)$ в виде (см. (0.2), $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$ произвольно)

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{m_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi) + \sum_{j=m_\lambda+1}^{N_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi), \tag{1.1}$$

и положим в (1.1) $\xi_i = t^{\lambda_i}\eta_i$ ($i=1,\cdots,n$) при некоторой точке $\eta\in\Sigma_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}$ и некотором векторе $\lambda\in\Lambda_{l_0}^{k_0}$. Ввиду λ-однородности полиномов $P_{d_j(\lambda)}(\xi)$ (см. лемму 1.1 и представление (0.2)) получаем из (1.1)

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m_\lambda} t^{d_j(\lambda)} P_{d_j(\lambda)}(\eta) + \sum_{j=m_\lambda+1}^{N_\lambda} t^{d_j(\lambda)} P_{d_j(\lambda)}(\eta). \tag{1.2}$$

Если теперь $\Sigma_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}\neq\varnothing$ $\Sigma_{d_{m_\lambda+1}}^{l_0,k_0}=\varnothing$, то из (1.2) следует, что при $t\to\infty$

$$\sum_{j=m_\lambda+2}^{N_\lambda} t^{d_j(\lambda)}\cdot P_{d_j(\lambda)}(\eta) = o\left(t^{d_{m_\lambda+1}}\right).$$

Поэтому, используя еще тот факт, что $\eta\in\Sigma_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}$, получаем из (1.2) при достаточно больших t

$$|P(\xi)| \leqslant c\, t^{d_{m_\lambda}+1}. \tag{1.3}$$

Пусть условие теоремы 1 не выполняется, т. е. для некоторых

$$\bar\lambda\in\Lambda_{l_0}^{k_0},\quad \bar\nu\in A_{d_{j_0}}^{l_0,k_0}(\bar\lambda),\ 1\leqslant j_0\leqslant m_{\bar\lambda},$$

$$d_{j_0}(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)\geqslant d_{m_{\bar\lambda}+1}(\bar\lambda). \tag{1.4}$$

Представим полином $D^{\bar\nu}P(\xi)$ в виде (0.2) и положим $\xi = t^{\bar\lambda}\eta$, где η определяется как и выше, тогда

$$D^{\bar\nu}P(\xi) = \sum_{j=0}^{N_{\bar\lambda}} D^{\bar\nu}P_{d_j(\bar\lambda)}(\xi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m_{\bar\lambda}} t^{d_j(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)}\cdot D^{\bar\nu}P_{d_j(\lambda)}(\eta) + \sum_{j=m_{\bar\lambda}+1}^{N_{\bar\lambda}} t^{d_j(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)}\cdot D^{\bar\nu}P_{d_j(\lambda)}(\eta). \tag{1.5}$$

По определению $A_{d_{j_0}(\bar\lambda)}^{l_0,k_0}$, $D^{\bar\nu}P_{d_{j_0}(\lambda)}(\eta)\neq 0$, поэтому при достаточно больших t получаем из (1.5)

$$|D^{\bar\nu}P(\xi)|\geqslant Ct^a,\ \text{где}\ \ a > d_{j_0}(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu). \tag{1.6}$$

(1.3) при $\lambda=\bar\lambda$ и (1.6) вместе показывают, что $|D^{\bar\nu}P(\xi)|/|P(\xi)|\not\to 0$ при $t\to\infty$ (следовательно при $\xi\to\infty$).

Тем самым полином $P(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

2°. Доказательство теоремы 2

Докажем одно простое предложение, из которого видно, что при $n=2$ полином $P^{l_0,n-1}(\xi)$ всегда представляется в виде (0.3).

Отметим, что подобное предложение в частном случае можно найти в [3].

Лемма 2.1. *Пусть $n=2$, $Q(\xi)$ — λ-однородный полином порядка d, т. е. $Q(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha \xi^\alpha$. Тогда при $\xi\neq 0$ полином $Q(\xi)$ представляется в виде*

$$Q(\xi)=[q_1(\xi)]^{k_1}\cdots[q_r(\xi)]^{k_r}\cdot Q_0(\xi), \tag{2.1}$$

где а) *$Q_0(\xi)$, $q_i(\xi)$ $(i=1,\cdots,r)$ — аналитические функции переменных $(\xi_1,\xi_2)\in R_2^{(0)}$, k_i $(i=1,\cdots,r)$ — натуральные числа,* в) *если $q_i(r)=0$ в некоторой точке $\eta\in R_2^{(0)}$, то $q_j(\eta)\neq 0$ при $j\neq i$ и*

$$\prod_{k=1}^{r}\frac{\partial q_i(\eta)}{\partial\xi_k}\neq 0\ (i=1,\cdots,r).$$

Доказательство. Пусть $\xi_2\neq 0$, тогда

$$Q(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\,\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2}=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\,\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2-d/\lambda_2}=$$

$$=\xi_2^{d/\lambda_2}\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1}=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\,\tau^{\alpha_1}, \tag{2.2}$$

где мы обозначили $\xi_1/\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}=\tau$.

Положим $\tilde{Q}(\tau)=\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\tau^{\alpha_1}$ и пусть $\tau_1,\cdots,\tau_r$ — действительные корни полинома $\tilde{Q}(\tau)$ кратности $k_1,\cdots,k_r$. Тогда, обозначив $m=\max\limits_{q_\alpha\neq 0}\alpha_1$, получим

$$\tilde{Q}(\tau)=\tilde{Q}_0(\tau)\cdot\prod_{l=1}^{r}(\tau-\tau_l)^{k_l}, \tag{2.3}$$

причем $\sum\limits_{l=1}^{r}k_l+\operatorname{ord}\tilde{Q}_0(\tau)=m$. Вернувшись к старым обозначениям, имеем из (2.2)

$$Q(\xi)=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\tilde{Q}(\tau)=\xi_2^{d/\lambda_2}\prod_{l=1}^{r}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}}-\tau_l\right)^{k_l}\cdot\tilde{Q}_0\left(\frac{\xi_1}{\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}}\right)=$$

$$=\xi_2^{d/\lambda_2-m\,\lambda_1/\lambda_2}\cdot\tilde{Q}_0(\xi_1,\xi_2)\cdot\prod_{l=1}^{r}(\xi_1-\tau_l\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{k_l}=Q_0(\xi)\cdot\prod_{l=1}^{r}[q_l(\xi)]^{k_l}.$$

Очевидно $q_l(\xi)=\xi_1-\tau_l\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}$ $(i=1,\cdots,r)$, $Q_0(\xi)=\xi_2^{\frac{d-m\lambda_1}{\lambda_2}}\cdot\tilde{Q}_0(\xi_1,\xi_2)$ удовлетворяют условиям а) и в) леммы. Лемма доказана.

Заметим, что если $\lambda_1=\lambda_2$, т. е. полином $Q(\xi)$ — однородный, то $q_i(\xi)$ $(i=1,\cdots,r)$ и $Q_0(\xi)$ являются полиномами.

Доказательство теоремы 2. Мы должны доказать, что для всех $\nu \in A_n$, $|\nu| \neq 0$ $|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Пусть, наоборот: существует вектор $\nu \in A_n$, $|\nu| \neq 0$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $\xi^s \to \infty$, но

$$|P(\xi^s)|/|D^\nu P(\xi^s)| \leqslant C. \tag{2.4}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_i^s > 0$ ($i = 1, \cdots, n$, $s = 1, 2, \cdots$). Положим

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\ln \xi_k^s)^2}} \; (i=1, \cdots, n), \quad \rho_s = \exp \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\ln \xi_k^s)^2},$$

тогда $\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}$ ($\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$ $i = 1, \cdots, n$).

Так как для всех $s = 1, 2, \cdots$ векторы λ^s находятся на единичной сфере, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельная точка λ^∞ и, за счет, быть может, взятия подпоследовательности, можно считать, что $\lambda^s \to \lambda^\infty$.

Из выпуклости х.м. $\mathfrak{M}$ следует, что λ^∞ является внешней нормалью к одной и только одной грани х.м. $\mathfrak{M}$.

Возьмем в A_n какой-нибудь базис $(e^{1,1}, e^{1,2}, \cdots, e^{1,n})$, $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Тогда $\lambda^s = \sum_{l=1}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l}$, причем, так как $\lambda^s \to \lambda^\infty = e^{1,1}$, то $\varkappa_{1,1}^s \to 1$, а при $i = 2, 3, \cdots, n$ $\varkappa_{1,i}^s = o(\varkappa_{1,1}^s) = o(1)$. За счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при $s \to \infty$

$$\frac{\sum_{l=2}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l}}{\left| \sum_{l=2}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l} \right|} \to e^{2,2}.$$

Перейдем в подпространстве, натянутом на $(e^{1,2}, \cdots, e^{1,n})$, к новому базису $(e^{2,2}, \cdots, e^{2,n})$, тогда $\lambda^s = \varkappa_{1,1}^s e^{1,1} + \sum_{l=2}^{n} \varkappa_{2,l}^s e^{2,l}$, причем очевидно $\varkappa_{2,2}^s = o(\varkappa_{1,1}^s)$, $\varkappa_{2,l}^s = o(\varkappa_{2,2}^s)$, $i=3, \cdots, n$.

Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{2,3}, \cdots, e^{2,n})$, и т. д. получим (после переобозначений) $\lambda^s = \sum_{l=1}^{n} \varkappa_l^s e^l$, $\varkappa_1^s \to 1$, $\varkappa_{l+1}^s = o(\varkappa_l^s)$, $i = 1, \cdots, n-1$. При этом существует номер s_0 такой, что для всех $s > s_0$ $\varkappa_i^s > 0$ ($i = 1, \cdots, m$), $\varkappa_i^s = 0$ ($i = m+1, \cdots, n$), $m \leqslant n$.

Рассмотрим грани х.м. $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}, \mathfrak{M}_{j_2}^{l_2}, \cdots, \mathfrak{M}_{j_m}^{l_m}$, удовлетворяющие тем условиям, что $\mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}$ лежит в опорной гиперплоскости к $\mathfrak{M}$ с внешней нормалью e^1 (т. е. является гранью х.м. $\mathfrak{M}$, $e^1 \in \Lambda^{l_1}_{j_1}$), а каждая грань $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ $(i = 2, \cdots, m)$ лежит в опорной гиперплоскости к (рассматриваемой изолированно) предыдущей с нормалью e^i. При этом, если существуют несколько подграней грани $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ с нормалью e^{i+1}, то в качестве $\mathfrak{M}^{l_{i+1}}_{j_{i+1}}$ условимся брать ту, для точек α которой (e^{i+1}, α) больше.

Из построения граней $\mathfrak{M}^{l_1}_{j_1}, \cdots, \mathfrak{M}^{l_m}_{j_m}$ видно, что для размерностей этих граней выполнено соотношение $k_1 > k_2 > \cdots \geqslant k_m$.

Пусть, как и выше, $P^{j_i, l_i}(\xi)$ обозначает часть полинома $P(\xi)$, мультииндексы которой сосредоточены на $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ и α— произвольная точка, принадлежащая всем $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ $(i = 1, \cdots, m)$, т. е. $\alpha \in \mathfrak{M}^{l_m}_{j_m}$. Изучим при $\rho_s \to \infty$, $\xi^s = \rho_s^{\sum_{l=1}^{n} x_l^s e^l}$ поведение полиномов $P(\xi^s)$ и $D^\nu P(\xi^s)$. Ради простоты записи опустим индекс s в обозначениях. За счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ $\rho^{x_r} \to \infty$, $\rho^{x_{r+1}} \to b \geqslant 1$ (при $r = n$ положим по определению $x_{n+1} = 0$).

Тогда из e^l-однородности полиномов $P^{j_l, l_l}(\xi)$ (лемма 1.1), из выпуклости х.м. $\mathfrak{M}$ и его граней, получаем при некоторых $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$, $1 \leqslant r \leqslant m$ (e^{n+1}— какой-нибудь единичный вектор, $x_{n+1} = 0$)

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, x_1 e^1)}\left[P^{j_1, l_1}\left(\rho^{\sum_{l=2}^{n} x_l e^l}\right) + o\left(\rho^{-\sigma_1 x_1}\right)\right] =$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= \rho^{\left(\alpha, \sum_{l=1}^{r-1} x_l e^l\right)}\left[P^{j_{r-1}, l_{r-1}}\left(\rho^{\sum_{l=r}^{n} x_l e^l}\right) + o\left(\rho^{-l_{r-1} x_{r-1}}\right)\right] =$$

$$= \rho^{\left(\alpha, \sum_{i=1}^{r} x_l e^l\right)}\left[P^{j_r, l_r}\left(\rho^{\sum_{l=r+1}^{n+1} x_l e^l}\right) + o\left(\rho^{-\sigma_r x_r}\right)\right]. \qquad (2.5)$$

Так как $\rho^{x_{r+1}} \to b$, то $\rho^{\sum_{l=r+1}^{n+1} x_l e^l} \to b^{e^{r+1}} \equiv \eta$. Очевидно, при всех $i=1, \cdots, n$, $0 < \eta_i < \infty$ (в соответствии с определением, η_i —конечные степени положительного числа).

Рассмотрим два возможных случая а) $(e^1, \alpha) > 0$, в) $(e^1, \alpha) = 0$. Случай $(e^1, \alpha) < 0$ исключается, что следует из того, что если $\vec{n}$ — внешняя нормаль к опорной гиперплоскости х.м., то уравнение этой гиперплоскости можно записать в виде $(\vec{n}, \alpha) = d$, где $d \geqslant 0$ — расстояние от начала координат до данной гиперплоскости, α—текущая точка.

Случай а). Очевидно, в этом случае e^1— внешняя нормаль главной грани. Поэтому для всех точек β, для которых $\gamma_\beta \neq 0$ в полиноме

$D^{\nu} P(\xi) = \sum_{\beta} \gamma_{\beta}^{\nu} \xi^{\beta}$ $(e^1, \beta) < (e^1, \alpha)$, где $\alpha \in \mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}$. Пусть сначала выполнено условие $a \cdot 1)$ $P^{j_r, l_r}(\eta) \neq 0$. Так как $(e^1, \alpha) > 0$, $\varkappa_1 \to 1$, $\varkappa_{i+1} = o(\varkappa_i)$, $i = 1, \cdots, n$, то при всех достаточно больших ρ

$$\left(\alpha, \sum_{l=1}^{r} \varkappa_l e^l \right) > 0.$$

Тогда при $\rho \to \infty$ получается из (2.5)

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, e^1)} P^{j_r, l_r}(\eta)(1 + o(1)). \tag{2.6}$$

Для полинома $D^{\nu} P(\xi)$ аналогично получаем при $\rho \to \infty$

$$|D^{\nu} P(\xi)| \leqslant c\rho^{a}, \text{ где } a < (e^1, \alpha). \tag{2.7}$$

Представления (2.6), (2.7) вместе противоречат (2.4).

а. 2) Пусть теперь $P_{\alpha}^{j_r, l_r}(\eta) = 0$. Это значит, что грань $\mathfrak{M}_{j_r}^{l_r}$ совпадает с P-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$, $r = m = 1$, $l_r = n-1$, $e^1 = \lambda$ является внешней нормалью грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$, $\eta \in \sum^{i_0, n-1}$. Тогда по условию (0.3)

$$P^{i_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot P(\eta, \xi). \tag{2.8}$$

Представим в этом случае $P(\xi)$ и $D^{\nu} P(\xi)$ соответственно в виде $(d_k(\lambda) \equiv d_k)$, используя (2.8)

$$P(\xi) = P^{i_0, n-1}(\xi) + P_{d_1}(\xi) + q(\xi) =$$

$$= [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot P(\eta, \xi) + P_{d_1}(\xi) + q(\xi), \tag{2.9}$$

$$D^{\nu} P(\xi) = D^{\nu} P^{i_0, n-1}(\xi) + D^{\nu} P^{d_1}(\xi) + D^{\nu} q(\xi). \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.9), (2.10) значение $\xi = \rho^{\sum_{l=1}^{n} \varkappa_l e^l}$, используя λ-однородность полиномов $P^{i_0, n-1}(\xi)$, $D^{\nu} P^{i_0, n-1}(\xi)$, $P_{\lambda_1}(\xi)$, $D^{\nu} P_{\lambda_1}(\xi)$, получаем (обозначим $\sum_{j=2}^{n} \varkappa_j e^j = h$)

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1)} [r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \mathbf{P}(\eta, \rho^h) +$$

$$+ \rho^{(\beta, \varkappa_1 e^1)} P_{d_1}(\rho^h) + q(\xi), \tag{2.11}$$

$$D^{\nu} P(\xi) = \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1) - (\nu, \varkappa_1 e^1)} \cdot D^{\nu} [[r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \rho^h)] +$$

$$+ \rho^{(\beta, \varkappa_1 e^1) - (\nu, \varkappa_1 e^1)} D^{\nu} P_{d_1}(\rho^h) + D^{\nu} q(\xi). \tag{2.12}$$

Рассмотрим сначала случай $|\nu| < k(\eta)$. В этом случае

$$D^{\nu} P^{i_0, n-1}(\xi) = D^{\nu} [[r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \xi)] = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot D^{\nu} \mathbf{P}(\eta, \xi) +$$

$$+ \cdots + D^{\nu} [r(\eta, \xi)] k(\eta) \cdot \mathbf{P}(\eta, \xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot D^{\nu} \mathbf{P}(\eta, \xi) +$$

$$+ \cdots + [r(\eta, \xi)]^{k - |\nu|} \cdot \bar{\mathbf{P}}(\eta, \xi) = [r(\eta, \xi)]^{k - |\nu|} \cdot R(\eta, \xi). \tag{2.13}$$

Пусть при $\rho \to \infty$, $\rho^h \to \eta \in \sum^{i_0, n-1}$.

За счет взятия подпоследовательности можно считать, что при $\rho \to \infty$ возможен один из следующих трех случаев:

I. Существуют числа $\delta_1 \geqslant \delta_2 > 0$ и $M_2 > M_1 > 0$ такие, что для всех достаточно больших ρ

$$M_1 \rho^{-\delta_1} \leqslant |r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_2 \rho^{-\delta_2},$$

при этом можно считать, что для любого наперед заданного числа $\sigma > 0$ $\delta_1 - \delta_2 < \sigma$;

II. для любого $\Delta > 0$ $|r(\eta, \rho^h)| > M_\Delta \cdot \rho^{-\Delta}$, $M_\Delta > 0$ или, что то же самое, $\rho^{-\Delta} = o(|r(\eta, \rho^h)|)$;

III. для любого $\Delta > 0$ $|r(\eta, \rho^h)| = o(\rho^{-\Delta})$.

Рассмотрим отдельно эти случаи. Заметим, что при $\rho \to \infty$

$$(\alpha, x_1 e^1) \to (\alpha, e^1) = d_0, \ (\beta, x_1 e^1) \to (\beta, e^1) = d_1.$$

Случай I в свою очередь разобьем на три подслучая:

I. 1 $\qquad d_0 - \delta_1 k(\eta) \leqslant d_0 - \delta_2 k(\eta) < d_1,$

I. 2 $\qquad d_0 - \delta_2 k(\eta) > d_0 - \delta_1 k(\eta) > d_1,$

I. 3 $\qquad d_0 - \delta_1 k(\eta) \leqslant d_1 \leqslant d_0 - \delta_2 k(\eta).$

В случае I.1 из (2.8) следует оценка при достаточно, больших ρ

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| > M_1^{k(\eta)} \cdot \rho^{d_0 - \delta_1 \cdot k(\eta)} \cdot |\mathrm{P}(\eta, \eta)| (1 + o(1)) =$$

$$= C_1 \rho^{d_0 - \delta_1 k(\eta)} \cdot (1 + o(1)). \qquad (2.14)$$

Соответственно для $P_{d_1}(\xi)$

$$|P_{d_1}(\xi)| > C_2 \rho_{d_1}. \qquad (2.15)$$

Так как по условиям в) и с) теоремы $P^{l_0, n-1}(\xi) \geqslant 0$, $P_{d_1}(\xi) > 0$ в некоторой окрестности η, то для достаточно больших ρ $P^{l_0, n-1}(\rho^h) > 0$, $P_{d_1}(\rho^h) > 0$. С другой стороны, из геометрических соображений очень видно, что при $\rho \to \infty$, $q(\xi) = o(\rho^{d_1})$, $D^\nu q(\xi) = o(\rho^{d_1 - (\lambda, \nu)})$. Тогда используя еще условие 1.1, получаем из (2.14), (2.15) и (2.11)

$$|P(\xi)| > C_3 \rho^{d_1}. \qquad (2.16)$$

Для $D^\nu P(\xi)$ аналогично получаем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant M_2^{k(\eta) - |\nu|} \cdot \rho^{d_0 - (\lambda, \nu) - \delta_2 (k(\eta) - |\nu|)} \cdot (1 + o(1)) =$$

$$= o(\rho^{d_1 - \delta_2 (k(\eta) - |\nu|)}) = o(\rho^{d_1}). \qquad (2.17)$$

Предпоследнее соотношение мы установили благодаря условию а) теоремы.

Соответственно для $D^\nu P_{d_1}(\xi)$, так как $(e^1, \alpha) > 0$, то

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \qquad (2.18)$$

Поэтому из (2.17) и (2.18) получаем

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \qquad (2.19)$$

(2.16) вместе с (2.19) противоречат (2.4).

Случай I.2. В этом случае как и выше имеем

$$|P^{l_0,\, n-1}(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)}(1+o(1)), \tag{2.20}$$

$$|P_{d_1}(\xi)| \leqslant C_2 \rho^{d_1} = o\,(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.21}$$

Поэтому

$$|P(\xi)| \geqslant C_3 \rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)}. \tag{2.22}$$

Для $D^{\nu} P(\xi)$ аналогично получается

$$|D^{\nu} P^{l_0,\, n-1}(\xi)| \leqslant C \rho^{d_0-(\lambda,\, \nu)-\delta_2(k(\eta)-|\nu|)}. \tag{2.23}$$

Покажем, что

$$d_0-(\lambda,\, \nu)-\delta_2(k(\eta)-|\nu|) < d_0-\delta_1 k(\eta), \tag{2.24}$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$(\delta_1-\delta_2)\cdot k(\eta)-(\lambda,\, \nu)+\delta_2|\nu| < 0. \tag{2.25}$$

Из условия 1.2 выводим

$$(\delta_1-\delta_2)\cdot k(\eta)-(\lambda,\, \nu)+\delta_2|\nu| < (\delta_1-\delta_2)\, k(\eta)-(\lambda,\, \nu)+\frac{d_0-d_1}{k(\eta)}\cdot|\nu| =$$

$$=(\delta_1-\delta_2)\, k(\eta)+\frac{|\nu|}{k(\eta)}(d_0-d_1-(\lambda,\, \nu^*)), \tag{2.26}$$

где

$$\nu^* = \left(\nu_1 \frac{k(\eta)}{|\nu|}, \ldots, \nu_n \frac{k(\eta)}{|\nu|}\right), \quad |\nu^*| = k(\eta).$$

Из условия а) следует (см. замечание 0.1), что $d_0-d_1-(\lambda,\, \nu^*) < 0$. С другой стороны, за счет взятия подпоследовательности можно считать, что

$$\delta_1-\delta_2 < \sigma = \frac{|\nu|}{k(\eta)^2}|d_0-d_1-(\lambda,\, \nu^*)|.$$

Из этих условий и из (2.26) получаем (2.25) и, тем самым, (2.24).

Из (2.24) и (2.23) следует, что

$$|D^{\nu} P^{l_0,\, n-1}(\xi)| = o\,(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.27}$$

Но очевидно

$$|D^{\nu} P_{d_1}(\xi)| = o\,(\rho^{d_1}) = o\,(\rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)}). \tag{2.28}$$

Окончательно из (2.27), (2.28) получаем

$$|D^{\nu} P(\xi)| = o\,(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.29}$$

(2.22) и (2.29) вместе противоречат (2.4).

Случай I.3. $d_0-\delta_1 k(\eta) \leqslant d_1 \leqslant d_0-\delta_2 k(\eta)$. В этом случае, как и выше, получаем

$$|P^{l_0,\, n-1}(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)},$$

$$|P_{d_1}(\xi)| \geqslant C_2 \rho^{d_1}.$$

Поэтому из условия 1 и из условий в) и с) теоремы следует, что

$$|P(\xi)| > C_3 \rho^{d_1}. \tag{2.30}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ соответственно имеем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant C\rho^{d_0 - (\lambda, \nu) - (k(\eta) - |\nu|)\delta_3} = o(\rho^{d_1}).$$

Последнее соотношение мы получили благодаря условию а) теоремы. Но очевидно

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}).$$

Поэтому

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.31}$$

(2.30) и (2.31) вместе противоречат (2.4).

Случай II. Взяв в этом случае

$$\Delta > \frac{d_0 - d_1}{k(\eta) - |\nu|} > \frac{d_0 - d_1}{k(\eta)},$$

получаем при $\rho \to \infty$

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}).$$

Поэтому при $\rho \to \infty$

$$|P(\xi)| > \rho^{d_1} P_{d_1}(\eta)(1 + o(1)). \tag{2.32}$$

Аналогично для $D^\nu P(\xi)$ имеем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}), \tag{2.33}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.34}$$

Из (2.33) и (2.34) следует

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.35}$$

(2.32) и (2.35) вместе противоречат (2.4), так как $P_{d_1}(\eta) > 0$.

Случай III. Взяв в этом случае $\Delta < \frac{d_0 - d_1}{k(\eta)}$, получаем при достаточно больших ρ

$$|P(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0 - \Delta \cdot k(\eta)}, \quad d_0 - \Delta \cdot k(\eta) > d_1, \tag{2.36}$$

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| > C_2 \rho^{d_0 - (\lambda, \nu)}, \tag{2.37}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| \leqslant C_3 \rho^{d_1 - (\lambda, \nu)} = o(\rho^{d_1}). \tag{2.38}$$

Выберем Δ еще и так, чтобы $\Delta \cdot k(\eta) < (\lambda, \nu)$. Тогда из (2.37) следует при $\rho \to \infty$

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_0 - \Delta \cdot k(\eta)}). \tag{2.39}$$

Из (2.39) и (2.38) вытекает, что при $\rho \to \infty$

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0 - \Delta \cdot k(\eta)}). \tag{2.40}$$

(2.36) вместе с (2.40) противоречат (2.4).

В случае а. 2), когда $|\nu| > k$ (τ_i), по условию а) теоремы $d_0 - (\lambda, \nu) < d_1$, и этот случай рассматривается аналогично.

Случай в) $(\lambda, \alpha) = 0$. В рассматриваемом случае грань $\mathfrak{M}^{l}_{j_1}$, внешней нормалью к которой является e^1, проходит через начало координат A_n, т. е. она не является главной гранью х.м. $\mathfrak{M}$. Следовательно $e^1_i \leqslant 0$ $(i=1, \cdots, n)$, Причем, если эта неглавная грань (с внешней нормалью e^1) имеет размерность k, то среди чисел e^1_i $(i = 1, \cdots, n)$ k штук равны нулю, а остальные отрицательны.

Не умаляя общности, можно считать, что $e^1_1 = \cdots = e^1_k = 0$, $e^1_{k+1} < 0, \cdots, e^1_n < 0$. Так как $e^1_j < 0$ $(j = k+1, \cdots, n)$ и

$$e^1_j = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\ln \xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}},$$

то переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что для достаточно больших $|\xi|$, $\xi_j \to \overline{\xi}_j$, $0 \leqslant \overline{\xi}_j < 1$ $(j = k+1, \cdots, n)$. Причем $\overline{\xi}_j = 0$ хотя бы для одного j, $k+1 \leqslant j \leqslant n$. В самом деле, в предположении противного имеем (после возможного перехода к подпоследовательности)

$$\frac{\ln \xi_i}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}} \to \lambda_i > 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty,$$

хотя бы для одного i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, для которого скорость роста $\ln \xi_i$ — наибольшая.

Пусть (после перенумерации) $\xi_1 \to \infty, \cdots, \xi_l \to \infty$

$$(l \leqslant k), \ \xi_{l+1} \to 0, \cdots, \xi_{l+m} \to 0 \quad (l + m \leqslant n).$$

Положим $\psi(\xi) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} \xi_j$, тогда, очевидно

$$\frac{\ln \psi(\xi)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}} \to 0. \tag{2.41}$$

С другой стороны, очевидно

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}{(\ln \psi(\xi))^2} \leqslant l. \tag{2.42}$$

Поэтому из (2.41), (2.42) получаем

$$\frac{\sum\limits_{k=l+1}^{n} (\ln \xi_k)^2}{[\ln \psi(\xi)]^2} \to \infty. \tag{2.43}$$

Отсюда, переходя, в случае необходимости к подпоследовательности, получаем, что для некоторого j, $l+1 \leqslant j \leqslant n$

$$|\ln \xi_j|/|\ln \psi(\xi)| \to \infty, \tag{2.44}$$

т. е. $|\ln \xi_j| \to \infty$ „быстрее", чем $|\ln \psi(\xi)| \to \infty$. Значит для любого $\sigma > 0$ $\xi_j = o([\psi(\xi)]^{-\sigma})$ или, что то же самое, для любых $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

$$\xi_j^{\alpha_1} [\psi(\xi)]^{\alpha_2} \to 0. \tag{2.45}$$

Положим $\check{\xi} = (\check{\xi}_1, \cdots, \check{\xi}_n)$, где $\check{\xi}_j = 0$, если j удовлетворяет условию (2.44), $\check{\xi}_j = \xi_j$ — в противном случае.

Из леммы 3.1 работы [9] следует, что $P(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Поэтому, ввиду (2.45), из (2.4) следует, что при $\xi \to \infty$

$$\frac{|D^{\nu} P(\check{\xi})|}{|P(\check{\xi}))} > C > 0 \tag{2.46}$$

по той последовательности, для которой верно (2.45).

Очевидно, размерность х.м. $\mathfrak{M}(P(\check{\xi})) = \check{\mathfrak{M}}$ меньше размерности х.м. $\mathfrak{M}$ и главными гранями х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ являются те и только те грани, которые одновременно являются и главными гранями х.м. $\mathfrak{M}$. Но так как размерность этих граней меньше $n-1$, то все они P-регулярны.

Таким образом, в ходе доказательства теоремы либо (2.4) приводит к противоречию, либо к отношению (2.46), аналогичному (2.4), но соответствующему меньшей чем n размерности пространства A_n.

Повторяя приведенные выше в доказательстве этой теоремы рассуждения по отношению теперь к х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ и полиному $P(\check{\xi})$, придем, очевидно, после конечного числа шагов либо к противоречию, либо к отношению (2.46) для одномерного многогранника $\check{\mathfrak{M}}$. Но в одномерном случае вполне правильность х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ означает, что полином $P(\check{\xi})$ имеет ненулевой свободный член и некоторый ненулевой порядок. Но в этом случае (2.46), очевидно, не может иметь места.

Тем самым теорема 2 доказана.

3°. Доказательство теоремы 3

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 2. Мы остановимся только на случае а.2), так как остальные случаи рассматриваются буквальным повторением уже приведенных рассуждений.

Будем, как и в теореме 2, вести доказательство от противного. Предположим, что полином $P(\xi)$, удовлетворяющий условиям теоремы 3, не является гипоэллиптическим, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \to \infty$ и вектор $\nu \in A_n$ такие, что выполняется соотношение (2.4).

Итак, пусть $\xi = \rho^{\sum_{l=1}^{n} x_l e^l}$, причем $x_1 \to 1$, $\rho^{\sum_{l=2}^{n} x_l e^l} = \rho^h \to \eta \in \sum_{d_1}^{l_n, n-1}$.

Тогда по условию в) теоремы в окрестности η

$$P^{l_n, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \xi) \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$P_{d_1}(\xi) = [\tilde{r}(\eta, \xi)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\eta, \xi) \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Представим в этом случае полиномы $P(\xi)$ и $D^\nu P(\xi)$ соответственно в виде

$$P(\xi) = P^{l_n, n-1}(\xi) + P_{d_1}(\xi) + P_{d_2}(\xi) + q(\xi), \tag{3.3}$$

$$D^\nu P(\xi) = D^\nu P^{l_n, n-1}(\xi) + D^\nu P_{d_1}(\xi) + D^\nu P_{d_2}(\xi) + D^\nu q(\xi). \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.3), (3.4) значение $\xi = \rho^{\sum_{l=1}^{n} x_l e^l}$, используя представления (3.1), (3.2), получаем при $\rho \to \infty$

$$P(\xi) = \rho^{d_0}[r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \rho^h) +$$

$$+ \rho^{d_1}[\tilde{r}(\eta, \rho^h)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\eta, \rho^h) + \rho^{d_2} P_{d_2}(\rho^h) + q(\xi). \tag{3.5}$$

Аналогично для $D^\nu P(\xi)$

$$D^\nu P(\xi) = \rho^{d_0 - (\lambda, \nu)} : D^\nu P^{l_n, n-1}(\rho^h) +$$

$$+ \rho^{d_1 - (\lambda, \nu)} \cdot D^\nu P_{d_1}(\rho^h) + \rho^{d_2 - (\lambda, \nu)} \cdot D^\nu P_{d_2}(\rho^h) + D^\nu q(\xi). \tag{3.6}$$

Так как при $\rho \to \infty$, $\rho^h \to \eta \in \sum_{d_1}^{l_n, n-1}$, то по условию с) теоремы для достаточно больших ρ

$$P_{d_2}(\rho^h) > 0. \tag{3.7}$$

С другой стороны, из геометрических соображений ясно, что при $\rho \to \infty$

$$q(\xi) = o(\rho^{d_2}), \quad D^\nu q(\xi) = o(\rho^{d_2 - (\lambda, \nu)}). \tag{3.8}$$

За счет взятия подпоследовательности можно считать, что при $\rho \to \infty$ $r(\eta, \rho^h)$ и $\tilde{r}(\eta, \rho^h)$ удовлетворяют одному из условий I, II, III, полученных при доказательстве теоремы 2. Причем мы должны брать возможные комбинации этих случаев для $r(\eta, \rho^h)$ и $\tilde{r}(\eta, \rho^h)$. Рассмотрим в отдельности эти случаи. Причем будем предполагать сначала, что $|\nu| < \min\{k(\eta), \tilde{k}(\eta)\}$.

I. Существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$, такие, что $\delta_1 \geqslant \delta_2$, $\tilde{\delta}_1 \geqslant \tilde{\delta}_2$ и

$$M_1 \rho^{-\delta_1} \leqslant |r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_2 \rho^{-\delta_2},$$

$$\tilde{M}_1 \rho^{-\tilde{\delta}_1} \leqslant |\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_2 \rho^{-\tilde{\delta}_2}.$$

Причем за счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\delta_1-\delta_2\leqslant\sigma$, $\tilde{\delta}_1-\tilde{\delta}_2\leqslant\sigma$ для любого наперед заданного числа $\sigma>0$. Поэтому, как было видно при доказательстве теоремы 2, можно просто считать, что $\delta_1=\delta_2$, $\tilde{\delta}_1=\tilde{\delta}_2$. Итак положим $\delta_1=\delta_2=\delta$, $\tilde{\delta}_1=\tilde{\delta}_2=\tilde{\delta}$. Случай I в свою очередь разбивается на несколько подслучаев

I.1 $d_0-k(\eta)\cdot\delta=d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}=d_2$,

I.2 $d_0-k(\eta)\cdot\delta>d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}\geqslant d_2$ или

$d_0-k(\eta)\cdot\delta<d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}\leqslant d_2$,

I.3 $d_0-k(\eta)\cdot\delta<d_2\leqslant d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}$ или

$d_0-k(\eta)\cdot\delta\geqslant d_2\geqslant d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}$.

В случае I.1, как и в теореме 2 получаем

$$|P(\xi)|\geqslant C_1\rho^{d_2}, \tag{3.9}$$

$$|D^\nu P^{l_0,n-1}(\xi)|\leqslant C_2\rho^{d_0-(\lambda,\nu)-\delta(k(\eta)-|\nu|)}, \tag{3.10}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)|<C_3\rho^{d_1-(\lambda,\nu)-\tilde{\delta}(\tilde{k}(\eta)-|\nu|)}, \tag{3.11}$$

$$|D^\nu P_{d_2}(\xi)|\leqslant C_4\rho^{d_2-(\lambda,\nu)}. \tag{3.12}$$

Как и при доказательстве теоремы 2 показывается, что

$$d_0-(\lambda,\nu)-\delta(k(\eta)-|\nu|)<d_2,$$

$$d_1-(\lambda,\nu)-\tilde{\delta}(\tilde{k}(\eta)-|\nu|)<d_2.$$

Поэтому из (3.10) — (3.12) и из условия $(\lambda,\nu)>0$ получаем

$$|D^\nu P(\xi)|=o(\rho^{d_2}). \tag{3.13}$$

(3.13) вместе с (3.9) противоречат (2.4).

Случай I.2. В этом случае при $\rho\to\infty$

$$|P(\xi)|\geqslant C_1\rho^{d_0-k(\eta)\cdot\delta}, \tag{3.14}$$

$$|D^\nu P(\xi)|=o(\rho^{d_0-k(\eta)\cdot\delta}), \tag{3.15}$$

либо

$$|P(\xi)|\geqslant C_2\rho^{d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}}, \tag{3.14}$$

$$|D^\nu P(\xi)|=o(\rho^{d_1-\tilde{k}(\eta)\cdot\tilde{\delta}}). \tag{3.15}$$

В обоих случаях противоречие с (2.4) очевидно.

Случай I.3 рассматривается аналогично.

Случай II. Существует число $\delta>0$ такое, что

$$M_1\cdot\rho^{-\delta}\leqslant|r(\eta_i,\rho^h)|\leqslant M_2\cdot\rho^{-\delta},\ M_1\leqslant M_2,$$

и для любого $\Delta > 0$

$$|\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_\Delta \rho^{-\Delta}.$$

Либо существует число $\tilde{\delta} > 0$ такое, что

$$\tilde{M}_1 \cdot \rho^{-\tilde{\delta}} \leqslant |\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_2 \cdot \rho^{-\tilde{\delta}}, \quad \tilde{M}_1 \leqslant \tilde{M}_2,$$

и для любого $\Delta > 0$

$$|r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_\Delta \cdot \rho^{-\Delta}.$$

Взяв в первом случае $\Delta > \max\left\{\dfrac{d_1 - d_2}{\bar{k}(\eta)};\ \dfrac{d_0 - d_1 + k(\eta)\cdot\delta}{\bar{k}(\eta)}\right\}$, получаем

$$|P(\xi)| > C_1 \rho^{d_0 - k(\eta)\cdot\delta}, \quad \text{если} \quad \delta\cdot k(\eta) < d_0 - d_2, \tag{3.16}$$

$$|P(\xi)| > C_2 \rho^{d_2}, \qquad \text{если} \quad \delta\cdot k(\eta) > d_0 - d_2. \tag{3.17}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ имеем аналогично

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0 - k(\eta)\cdot\delta}) \tag{3.18}$$

и соответственно

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_2}), \tag{3.19}$$

(3.16) и (3.18) в случае $\delta\cdot k(\eta) < d_0 - d_2$, а (3.17), (3.19) — в противном случае противоречат (2.4).

Второй из случаев II и остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

Наконец, если $\nu > \min\{k(\eta), \bar{k}(\eta)\}$, то противоречие с (2,4) получается благодаря условию а) теоремы. Теорема 3 доказана.

4°. Доказательство теоремы 4 и примеры

Доказательство теоремы 4 проводится по схеме доказательства теоремы 2, если вместо полиномов $P(x^0, \xi)$ и $D^\nu P(x^0, \xi)$ брать полиномы $|P(x^0, \xi)|^2$ и $|D^\nu P(x^0, \xi)|^2$ с вещественными коэффициентами и воспользоваться леммой 4.2 работы [6] (см. также [4] и [8]), утверждающей, что х.м. полиномов $P(x^0, \xi)$ и $|P(x^0, \xi)|^2$ подобны, причем $P(x^0, \xi)$-регулярным граням соответствуют $|P(x^0, \xi)|^2$-регулярные грани и наоборот. Здесь роль $P_{d_1}(\xi)$ играет полином $K(x^0, \xi) + |P_{d_1}(x^0, \xi)|^2$. Теорема 4 доказана.

Следующие примеры иллюстрируют доказанные теоремы.

Пусть сначала $n = 2$.

Пример 1. $P_1(\xi) = 1 + \xi_1^{22} + \xi_2^{22} + \xi_1^{16}\cdot\xi_2^{16}(\xi_1 - \xi_2)^4$. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_1(\xi)$ в.п. пятиугольник в A_2 с вершинами (0,0), (22,0), (20,16), (16,20), (0.22).

P_1-регулярность всех главных граней х.м. $\mathfrak{M}$, кроме $(n-1)$-мерной (одномерной в данном случае) грани $\mathfrak{M}_1^1 \equiv \{(20,16)-(16,20)\}$ очевидна.

Полином $P_1^{1,1}(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{M}_1^1$, обращается в нуль в точках вида $\eta = (t, t) \in R_2^{(0)}$. Выполняются все условия теоремы 2, кроме условия а).

В самом деле

$$\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad d_0 = \frac{36}{\sqrt{2}}, \quad d_1 = \frac{22}{\sqrt{2}},$$

$$k(\eta) = k = 4, \quad d_0 - (\lambda, \mu) = \frac{32}{\sqrt{2}} \quad \forall \mu \in A_n, \ |\mu| = 4.$$

Поэтому для таких μ $d_0 - (\lambda, \mu) > d_1$. Следовательно по теореме 1 полином $P_1(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 2. С другой стороны, если рассматривать полином $P_2(\xi) = P_1(\xi) + \xi_1^{16} \cdot \xi_2^{16}$, где $P_1(\xi)$—полином из примера 1, то для полинома $P_2(\xi)$ уже выполняются все условия теоремы 2 и полином $P_2(\xi)$ гипоэллиптичен.

Итак, добавление некоторого члена к негипоэллиптическому полиному $P_1(\xi)$ примера 1, превращает его в гипоэллиптический полином. Но добавленный „младший“ член положителен в $R_2^{(0)}$. Следующие два примера показывают, что добавление к негипоэллиптическому полиному члена, даже меняющего знак, может превратить его в гипоэллиптический.

Пример 3. $P_3(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4 + 1$. Х.м. этого полинома является треугольником в A_2 с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$ с единственной P_3-нерегулярной одномерной гранью $\mathfrak{M}^1 = \{(4,0), (0,4)\}$.

Легко видеть, что выполняются все условия теоремы 2, за исключением условия а), поэтому по теореме 1 полином $P_3(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 4. $P_4(\xi) = P_3(\xi) + \xi_2(2\xi_2 - \xi_1)$. В точках $\eta \in \Sigma^{0,1}$ $P_{4,d_1}(\eta) > 0$, так как точки $\eta \in \Sigma^{0,1}$ имеют вид $\eta = (t, t)$, $t \neq 0$, а в таких точках $P_{4,p_1}(\eta) = t^2 > 0$. Условие а) проверяется легко.

Итак, полином $P_4(\xi)$ гипоэллиптичен, несмотря на то, что полином $P_{4,d_1}(\xi)$ может принимать любые значения в $R_2^{(0)}$.

Пример 5. Для полинома $P_5(\xi) = P_3(\xi) - \xi_2(2\xi_2 - \xi_1)$ не выполняется условие с) теоремы 2. Покажем, что полином $P_5(\xi)$ не гипоэллиптичен. В самом деле, положим $\xi_1 = t^4(1 + t^{-2})$, $\xi_2 = t^4$. Тогда простой подсчет показывает, что

$$P_5(\xi) = t^6 + 1, \quad \frac{\partial P_5}{\partial \xi_1} = 4t^6 - t^4, \quad \text{т. е.} \quad \left|\frac{\partial P_5}{\partial \xi_1}\right| \Big/ |P_5(\xi)| \not\to 0$$

при $t \to \infty$, т. е. при $\xi \to \infty$.

Итак, полином $P_5(\xi)$ не гипоэллиптичен. Этот пример показывает существенность условия $P^{l_0, n-1}(\xi) > 0$ (< 0), $P_{d_1}(\xi) > 0$ (< 0) в окрестности $\Sigma^{l_0, n-1}$.

Пример 6. $P_6(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^6 + (\xi_1 - \xi_2)^6 + \xi_1^2 + 1$. Х.м. этого полинома является треугольником в A_2 с единственной главной P_6-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_1^1 \equiv \{(8,0) - (0,8)\}$. Полиномы

$$P_6^{0,1}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^6 \geqslant 0, \quad P_{6,\, d_1}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 > 0$$

обращаются в нуль в точках $\eta \in R_2^{(0)}$ вида $\eta = (t, t)$, $t \neq 0$, $P_{6,\, d_2}(\xi) = \xi_1^2 > 0$ в точках $\xi \in R_2^{(0)}$, поэтому выполняются все условия теоремы 3, кроме условия а), и потому по теореме 1 полином $P_6(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 7. $P_7(\xi) = P_6(\xi) + \xi_1^2(2\xi_1^2 - \xi_2^2)$. Легко видеть, что для полинома $P_7(\xi)$ уже выполняются все условия теоремы 3 и полином $P_7(\xi)$ является гипоэллиптическим.

Пример 8. $P_8(\xi) = \xi_1^8 \xi_2^8 (\xi_1 - \xi_2)^4 + \xi_1^8 \xi_2^8 (\xi_1 - \xi_2)^2 + \xi_1^{16} + 1$. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_8(\xi)$ является в. п. пятиугольником в A_2 с одномерной главной P_8-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_1^1 = \{(12,8) - (8,12)\}$, $\sum_{d_1}^{1,1} \neq \varnothing$. Выполняются все условия теоремы 3, кроме условия а) ($\max\{d_0 - (\lambda, \alpha), d_1 - (\lambda, \beta)\} = d_2$), и по теореме 1 полином $P_8(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

Пример 9. Для полинома

$$P_9(\xi) = \xi_1^6 \xi_2^6 (\xi_1 - \xi_2)^8 + \xi_1^6 \cdot \xi_2^6 (\xi_1 - \xi_2)^6 + \xi_1^{16} + 1$$

уже выполняются все условия теоремы 3 и полином $P_9(\xi)$ гипоэллиптичен.

Пример 10. $P_{10}(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + i\xi_2 + 1$. $P_{10}(\xi)$ не является гипоэллиптическим. В самом деле, пусть $\xi_1 = \xi_2 = t \to \infty$, тогда $|P_{10}(\xi)| \leqslant C_1 t$,

$$\left|\frac{\partial P_{10}(\xi)}{\partial \xi_2}\right| \geqslant C_2 t \text{ и } \left|\frac{\partial P_{10}(\xi)}{\partial \xi_2}\right| \Big/ |P_{10}(\xi)| \not\to 0, \quad \xi \to \infty.$$

Легко видеть, что выполняются все условия теоремы 4, кроме условия а).

Пример 11. $P_{11}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + i\xi_2 + 1$. Для этого полинома выполняются все условия теоремы 4, так что полином $|P_{11}(\xi)|^2$ является гипоэллиптическим.

Отметим в связи с примерами 10)—11), что в то время, как волновой оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ не становится гипоэллиптическим после прибавления „младших“ членов (ср. с примером 10), оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ уже превращается в гипоэллиптический (после прибавления, например, члена $\frac{\partial}{\partial x}$ оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x}$ становится гипоэллиптическим).

Примеры 12, 13, 14. Легко видеть, что для всех $(x_1, x_2) \in E_2$ полином $|P_{12}(x, \xi)|^2$

$$P_{12}(x, \xi) = [(1 + x_1^2)\xi_1 - (1 + x_2^2)\xi_2]^2 + i(1 + x_1^2 + x_2^2)\xi_1 + 1$$

является гипоэллиптическим, а полином $\overline{P}_{12}(x, \xi) = [(1+x_1^2)\xi_1 - (1+x_2^2)\xi_2]^2 + (1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$ — не гипоэллиптическим в точке $(0,0)$ (не выполняется условие в) теоремы 4).

Полиномы

$$P_{13}(x, \xi) = (1+x_1^2)\xi_1^2 - (1+x_2^2)\xi_2^2 + i(1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$$

$$\text{и } P_{14}(x, \xi) = [(1+x_1^2)\xi_1 - (1+x_2^2)\xi_2]^2 + i(1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$$

не являются гипоэллиптическими соответственно ни в одной точке $x \in E_2$ и в точке $(0,0) \in E_2$. Отметим, что полином $|P_{14}(x, \xi)|^2$ является гипоэллиптическим во всех точках $x \in E_2 \setminus \{0\}$.

Рассмотрим примеры в случае $n>2$.

Пример $15_\alpha (n=3)$. $P_{15}(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3)^4 + \xi_1^{14} + 1$.

Легко видеть, что $P_{15}(\xi)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и, следовательно, является гипоэллиптическим. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_{15}(\xi)$ имеет единственную $(n-1)$-мерную (двумерную) P_{15}-нерегулярную грань. С другой стороны, для полинома

$$P_{16}(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3)^4 + \xi_1^8 + 1$$

уже не выполняется условие а) теоремы 2 и по теореме 1 полином $P_{16}(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

Во всех приведенных примерах, заменяя, например, ξ_1 на ξ_1^2, ξ_1^3 и т. п., мы получаем аналогичные примеры для полиномов с заведомо неоднородными, но обобщенно однородными главными P-регулярными (P-нерегулярными) гранями.

Приношу свою благодарность О. В Бесову за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.VI.1973

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Հիպոէլիպտիկ բազմանդամների մի ընտանիքի մասին *(ամփոփում)*

Տված շատ փոփոխականի բազմանդամների համար ստացված են հիպոէլիպտիկության անհրաժեշտ պայմաններ այն դեպքում, երբ բազմանդամի բնութագրիչ բազմանիստի մի քանի նիստեր «ռեգուլյար» չեն։

Ստացված են նաև հիպոէլիպտիկության բավարար պայմաններ այն դեպքում, երբ բազմանդամի բնութագրիչ բազմանիստի ($n-1$) —չափանի նիստերից մեկը «ռեգուլյար» չէ։

H. G. KAZARIAN. *On a family of hypoelliptic polynoms* (summary)

The paper gives necessary conditions for hypoellipticity of a polynom in the case, when the characteristic polyhedron of the polynom possesses so called „nonregular" faces. Sufficient conditions are obtained for the case when the characteristic polyhedron possesses a $(n-1)$-dimensional nonregular face.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", М., 1965.
2. *С. М. Никольский.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
3. *B Pini.* Osservazoni sulla ipoellitticitá, Boll Un. Mat. Jtal., (3), 18, 1963, 420—432,
4. *Jöran Friberg.* Multi-quasielliptic polinomials, Annali della senola Normale Sup, di Pisa, serie III, XXI, 1967, 239—260.
5. *L. Cattabriga.* Su una classi di polinomi ipoellittici, Rend. Sem. Mat. Univ., Padova 36, 1966, 285—309.
6. *А. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Матем. сб., 75 (117), № 3, 1968, 400—416.
7. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 91, 59—81.
8. *Г. Г. Казарян.* Сравнение дифференциальных операторов и дифференциальные операторы постоянной силы, ДАН СССР, 208, № 6, 1973, 1272—1275.
9. *Г. Г. Казарян.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов, Дифф. уравнения, V, № 5, 1969, 911—921,