ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. В. ВИРАБЯН

О ФАКТОРИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Как показано в работах М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1], [2], при изучении вопросов двукратной полноты системы собственных и присоединенных элементов квадратичного операторного пучка важное значение имеет исследование ассоциированного с этим пучком квадратного операторного уравнения, или, что то же самое, так называемая задача о факторизации соответствующего пучка.

В работе [3] с помощью теории возмущений доказана возможность факторизации для некоторого класса несамосопряженных квадратичных операторных пучков.

В данной работе приводится некоторое усиление основных результатов работы [3]. Предлагаемая нами методика значительно проще и опирается на классический принцип неподвижной точки.

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \tag{1}$$

где B, C — линейные ограниченные операторы, отображающие гильбертово пространство H в себя, причем оператор B имеет ограниченный обратный B^{-1}.

Задача факторизации пучка (1), т. е. представления его в виде

$$L(\lambda) = (\lambda I - \check{Z})(\lambda I - Z), \tag{2}$$

сводится [1] к доказательству существования решения ассоциированного с ним квадратного операторного уравнения

$$Z^2 + B \cdot Z + C = O. \tag{3}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если операторы B^{-1} и $B^{-1}C$ ограничены и выполняется условие*

$$\alpha = 4\|B^{-1}\| \cdot \|B^{-1}C\| < 1, \tag{4}$$

то квадратное операторное уравнение (3) *имеет решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\|Z\| < \sqrt{\|C\|}. \tag{5}$$

Если C — вполне непрерывный, то решение Z также является вполне непрерывным.

Доказательство. Применяя с обеих сторон оператор B^{-1}, запишем уравнение (3) в виде

$$Z = \Phi(Z), \tag{6}$$

где

$$\Phi(Z) = -B^{-1}Z^2 - B^{-1}C. \tag{7}$$

Через $R = R(H \to H)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, отображающих гильбертово пространство H в себя. Рассмотрим в этом пространстве замкнутый шар $\overline{S} = \{Z \in R: \|Z\| \leqslant 2\|B^{-1}C\|\}$ с центром в нуле и радиуса $2\|B^{-1}C\|$.

Покажем, что оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{S}$ в себя. В самом деле, пусть $Z \in \overline{S}$, тогда в силу условия (4) имеем

$$\|\Phi(Z)\| = \|B^{-1}Z^2 + B^{-1}C\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z^2\| + \|B^{-1}C\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z\|^2 + \|B^{-1}C\| \leqslant 4 \cdot \|B^{-1}\| \|B^{-1}C\|^2 + \|B^{-1}C\| = (\alpha+1)\|B^{-1}C\| < 2\|B^{-1}C\|, \tag{8}$$

что и означает $\Phi(Z) \in \overline{S}$.

Далее, для любых двух операторов $Z_1, Z \in \overline{S}$ имеем

$$\|\Phi(Z_1) - \Phi(Z_2)\| = \|-B^{-1}Z_1^2 + B^{-1}Z_2^2\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1^2 - Z_2^2\| =$$
$$= \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1^2 - Z_1Z_2 + Z_1Z_2 - Z_2^2\| = \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1 \cdot (Z_1 - Z_2) +$$
$$+ (Z_1 - Z_2)Z_2\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot (\|Z_1\| + \|Z_2\|) \cdot \|Z_1 - Z_2\| \leqslant$$
$$\leqslant 4 \cdot \|B^{-1}C\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1 - Z_2\| = \alpha\|Z_1 - Z_2\| \, (\alpha < 1). \tag{9}$$

Таким образом, оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{S}$ банахова пространства R в себя и является оператором сжатия. Поэтому в силу принципа сжатых отображений [4] у оператора Φ имеется единственная неподвижная точка Z в шаре $\overline{S}$. Эта неподвижная точка и является решением операторного квадратного уравнения (3).

Поскольку $Z \in \overline{S}$, то

$$\|Z\|^2 \leqslant 4\|B^{-1}C\|^2 \leqslant 4 \cdot \|B^{-1}C\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|C\| < \|C\|.$$

Таким образом

$$\|Z\| < \sqrt{\|C\|}. \tag{10}$$

Пусть $Z_0 = O$ и $Z_n = \Phi(Z_{n-1})$, тогда, как это следует из принципа сжатых отображений

$$\|Z_n - Z\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Очевидно, что если оператор C вполне непрерывный, то каждая из итераций Z_n также является вполне непрерывным оператором. Но тогда и оператор Z, как равномерный предел вполне непрерывных операторов, будет вполне непрерывным.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Последовательность операторов $Z_n = \Phi(Z_{n-1})$, $Z_0 = O$ приближает решение Z квадратного операторного уравнения с точностью

$$\|Z_n - Z\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|B^{-1} C\|. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если при наличии условия* (4) *оператор* $C > O$, *то у квадратного операторного уравнения* (3) *имеется решение* Z, *удовлетворяющее условию нормируемости, т. е.*

$$Z^* Z < C. \tag{13}$$

Доказательство. Покажем, что именно то решение Z квадратного операторного уравнения (3), существование которого гарантируется теоремой 1, удовлетворяет условию нормируемости (13).

При доказательстве теоремы 1 одновременно было показано, что решение Z уравнения (3) представляет равномерный предел последовательности операторов

$$Z_0 = 0, \ Z_n = \Phi(Z_{n-1}), \ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Для оператора Z_1 имеем

$$\|Z_1 x\| = \|B^{-1} Cx\| < 2\|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{14}$$

Предположим, что мы доказали, что

$$\|Z_{n-1} x\| < 2\|B^{-1} Cx\| \quad \text{для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{15}$$

Тогда, в силу $Z_{n-1} \in \overline{S}$ и (15)

$$\|Z_{n-1}^2 x\| \leqslant \|Z_{n-1}\| \cdot \|Z_{n-1} x\| < 4\|B^{-1} C\| \cdot \|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) и из условия (4) имеем

$$\|Z_n x\| = \|B^{-1} Z_{n-1}^2 x + B^{-1} Cx\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z_{n-1}^2 x\| + \|B^{-1} Cx\| <$$
$$< 4\|B^{-1}\| \cdot \|B^{-1} C\| \cdot \|B^{-1} Cx\| + \|B^{-1} Cx\| < 2\|B^{-1} Cx\|, \tag{17}$$

для $\forall x \neq 0 \in H$.

Таким образом, с помощью математической индукции мы доказали, что неравенства

$$\|Z_n x\| < 2 \cdot \|B^{-1} Cx\| \quad \forall x \neq 0 \in H \tag{18}$$

выполняются при любом n.

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах (18), получим

$$\|Zx\| < 2\|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{19}$$

Отсюда уже следует условие нормируемости (13).

В самом деле, для произвольного отличного от нуля элемента x гильбертова пространства H имеем

$$(Z^* Zx, x) = (Zx, Zx) = \|Zx\|^2 < 4\|B^{-1} Cx\|^2 = 4(B^{-1} Cx, B^{-1} Cx) =$$
$$= 4(B^{*-1} B^{-1} Cx, Cx) = 4(C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2} C^{1/2} x, C^{1/2} x) \leqslant$$
$$\leqslant 4\|C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2}\| \cdot \|C^{1/2} x\|^2 \leqslant 4 \cdot \|B^{*-1} B^{-1} C\| \cdot \|C^{1/2} x\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\|B^{*-1}\| \cdot \|B^{-1} C\| \cdot \|C^{1/2} x\|^2 = 4\|B^{-1}\| \cdot \|B^{-1} C\| \cdot (C^{1/2} x, C^{1/2} x) < (Cx, x).$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2}\| \leqslant \|B^{*-1} B^{-1} C\|,$$

которое выполняется в силу леммы 2 работы [3], поскольку оператор $B^{*-1} B^{-1}$ самосопряженный, а оператор $C^{1/2} > O$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В работе [3] нормируемость оператора Z ($Z^* Z < C$) доказана при дополнительном условии $B > O$, $C > O$, при которых пучок (1) становится сильно демпфируемым [1].

Замечание 3. Аналогично тому, как это сделано в работе М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1], при условии $B = B^*$, $C > O$ можно доказать, что оператор Z симметризуется положительным оператором $G = C - Z^* \cdot Z$.

Поэтому на основании вышедоказанных теорем 1, 2 имеет место следующая

Теорема 3. *Если C — вполне непрерывный положительный оператор, $B = B^*$ и выполняется условие*

$$4\|B^{-1}\| \cdot \|B^{-1} C\| < 1,$$

то у квадратичного операторного пучка (1) *существует полная система собственных элементов, которая образует базис Рисса во всем гильбертовом пространстве H.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.XII.1973

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Քառակուսային օպերատորային փնջի ֆակտորիզացիայի մասին *(ամփոփում)*

Օպերատորային քառակուսային փնջերի մի դասի համար ապացուցված է ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը և ստացված է թեորեմ սեփական վեկտորների լրիվության վերաբերյալ։

G. V. VIRABIAN. *On the factorization of a quadratic bunch of operators*
(summary)

For a certain class of quadratic bunches of operators the possibility of factorization is proved. A theorem about the completeness of eigenvectors is proved as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, Изд. „Наука", 1965.
2. *H. K. Langer.* Math. and Mech. Vol. 17, № 7, 1968.
3. *И. В. Горюк.* О факторизации квадратичного операторного пучка, Вестник МГУ, „Математика", т. 5, 1970.
4. *А. Н. Колмогоров. С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа, 1972.