ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КЛАССОВ E_p $(1<p<\infty)$

Пусть $G^{(+)}$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, а $G^{(-)}$ — дополнение замыкания области $G^{(+)}$.

Через $w=\Phi(z)$ $(z=\psi(w))$ обозначим функцию Римана, отображающую область $G^{(-)}$ на область $D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}$ с условиями нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$.

Если $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(\omega_k\in G^{(-)})$ — произвольная последовательность *отличных друг от друга* точек, то, как хорошо известно, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-2})<+\infty \qquad (A)$$

замыкание системы функций $\{1/(\omega_k-z)\}_1^\infty$ в известных классах $E_p(1<p<\infty)$, аналитических в области $G^{(+)}$ функций [1], по метрике $L_p(\Gamma)$, является собственным подпространством E_p.

В работах [2], [3] была дана полная внутренняя характеристика линейной оболочки $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}\subset E_p$ $(1<p<\infty)$ такого рода незамкнутой системы.

В настоящей статье исследуется вопрос о базисности системы

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k-z},\quad k=1,\ 2,\cdots$$

в подпространстве $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, где $q=p/(p-1)>1$.

В работе М. М. Джрбашяна [4] было установлено, что при условии (A) система функций

$$\rho_k^{(1/q)}(z)=\frac{[\Phi'(z)]^{1/q}}{B[\Phi(z)][1-\Phi(z)\ \overline{\alpha_k(\omega)}]\ \overline{B'(\alpha_k(\omega))}}\ (k=1,\ 2,\cdots), \qquad (4)$$

где $\alpha_k(\omega)=[\Phi(\omega_k)]^{-1}$ $(0<|\alpha_k(\omega)|<1)$ и

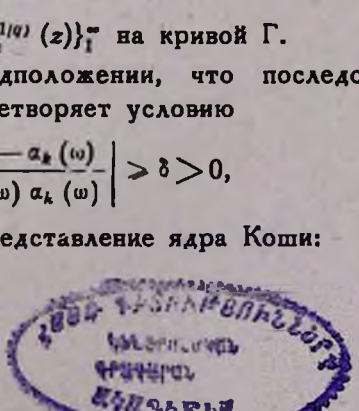
$$B(\zeta)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(\omega)-\zeta}{1-\overline{\alpha_k(\omega)}\,\zeta}\,\frac{|\alpha_k(\omega)|}{\alpha_k(\omega)}$$

биортогональна с системой $\{m_k^{(1/q)}(z)\}_1^\infty$ на кривой Γ.

В настоящей работе в предположении, что последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$ $(0<|\alpha_k(\omega)|<1)$ удовлетворяет условию

$$\inf_k\prod_{l\neq k}\left|\frac{\alpha_l(\omega)-\alpha_k(\omega)}{1-\overline{\alpha_l(\omega)}\,\alpha_k(\omega)}\right|>\delta>0, \qquad (B)$$

устанавливается следующее представление ядра Коши:



$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\, m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B(\Phi(\zeta))} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \frac{B(\Phi(\eta))\,[\Phi'(\eta)]^{1/p}}{(\eta - z)(\Phi(\zeta) - \Phi(\eta))}\, d\eta \quad (z \in G^{(+)},\ \zeta \in G^{(-)}), \qquad (C)$$

где ряд сходится по метрике L_p на кривой Г.

Отметим, что биортогональность систем $\{m_k^{(1/q)}(z),\ \rho_k^{(1/q)}(z)\}_1^{\infty}$ на кривой Г является лишь специальным случаем более общих результатов такого же рода, установленных М. М. Джрбашяном [4], впервые рассмотревшим такие системы, когда числа последовательности $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in G^{(-)}$, вообще говоря, не отличны друг от друга. В свою очередь, представление (C) является предельным случаем теоремы, установленной в той же работе на тот случай, когда последовательность $\{\omega_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (B). При доказательстве (C) мы используем одно утверждение из работы [10], которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема А. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |\alpha_k| < 1)$ *удовлетворяет условию* (B), *тогда любую функцию* $f(z) \in H_p$ $(1 < p < \infty)$ *можно представить в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t - z}, \quad |z| < 1,$$

где

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_k z}\ (k = 1, 2, \cdots), \quad B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

и

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\, \overline{\Omega_k(t)}\, |dt|, \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z - \alpha_k) B'(\alpha_k)},$$

причем ряд сходится по метрике L_p *на окружности* $|z| = 1$.

В предположении, что контур Г является кривой специального типа и последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (B), применением соотношения (C) доказывается следующее утверждение (теоремы 2, 3):

Для любой функции $f(z) \in \lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ $(1 < p < \infty)$ *имеет место представление*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z), \quad z \in CK,$$

где K *есть замыкание множества точек* $\{\omega_k\}_1^{\infty}$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)\, \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\, d\zeta \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

причем ряд сходится по метрике L_p *на кривой* Г.

1 (а). Пусть $G^{(+)}$ —односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Г. Дополнение замыкания этой области обозначим через $G^{(-)}$. Таким образом, контур Г является общей полной границей для обеих взаимно-дополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$.

Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)} = \{z; |z| < 1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_p Харди, а через $H_p(D^{-1})$ — класс голоморфных в $D^{(-)} = \{z; |z| > 1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z) = \tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Пусть функция

$$w = \Phi(z) \quad (z = \psi(w)), \tag{1}$$

подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, конформно отображает область $G^{(-)}$ на область $D^{(-)}$.

Пусть далее $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(\omega_k \neq \infty)$ — произвольная последовательность *отличных друг от друга* комплексных чисел, лежащих в области $G^{(-)}$. Определим другую последовательность также отличных друг от друга комплексных чисел $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$ $(0 < |\alpha_k(\omega)| < 1)$, полагая

$$\alpha_k(\omega) = [\Phi(\omega_k)]^{-1} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что последовательность чисел $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\Phi^{-1}(\omega_k)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\alpha_k(\omega)|^2) < +\infty, \tag{3}$$

$$\prod_{\substack{l \neq k \\ l=1}}^{\infty}\left|\frac{\Phi^{-1}(\omega_l) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_l)\,\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}}\right| = \prod_{\substack{l \neq k \\ l=1}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_l(\omega) - \alpha_k(\omega)}{1 - \overline{\alpha_l(\omega)}\,\alpha_k(\omega)}\right| \geqslant \delta > 0, \quad k \geqslant 1, \tag{4}$$

где δ $(0 < \delta < 1)$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k \geqslant 1$.

(б) Функцию $f(z)$ отнесем к классу $E_p(G^{(+)})$, если она голоморфна в $G^{(+)}$ и $f(\varphi(w))[\varphi'(w)]^{1/p} \in H_p(D^{(+)})$, где $\varphi(w)$ есть риманова функция, отображающая $D^{(+)}$ на $G^{(+)}$. Класс $E_p(G^{(+)})$ при $1 \leqslant p < \infty$ будет банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |f(\zeta)|^p\,|d\zeta|\right\}^{1/p},$$

где $f(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $f(z)$ на границе Г области $G^{(+)}$.

Соответственно, функцию $F(z)$ отнесем к классу $E_p(G^{(-)})$, если она голоморфна в $G^{(-)}$ и $F(\psi(w))[\psi'(w)]^{1/p} \in H_p(D^{(-)})$. Класс $E_p(G^{(-)})$ при $(1 \leqslant p < \infty)$ также будет банаховым пространством с нормой

$$\|F\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |F(\zeta)|^p\,|d\zeta|\right\}^{1/p},$$

где $F(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $F(z)$ на границе Γ области $G^{(-)}$.

Известно [1], что

$$\psi'(w) \in H_1(D^{(-)}) \text{ и } \Phi'(z) \in E_1(G^{(-)}). \tag{5}$$

Следуя М. М. Джрбашяну [3], рассмотревшему общий случай произвольной последовательности $\{\omega_k\}_1^\infty \in G^{(-)}$ при данном $1<p<\infty$, введем в рассмотрение системы функций

$$m_k^{(1/q)}(z) = \frac{\Phi(\omega_k)\,[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k - z} \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{6}$$

$$\rho_k^{(1/q)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1/q}}{B[\Phi(z)][1-\Phi(z)\overline{a_k(\omega)}]\,\overline{B'(a_k(\omega))}} \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{7}$$

где $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ и

$$B(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\omega) - w}{1 - \overline{a_k(\omega)}\,w}\,\frac{|a_k(\omega)|}{a_k(\omega)}.$$

Заметив, что функция $1/B[\Phi(z)](1-\Phi(z)\,a_k(\omega))$ голоморфна и ограничена в области $G^{(-)}$ из (5) заключаем, что $\rho_k^{(1/q)}(z) \in E_p(G^{(-)})$. Справедлива теорема, являющаяся частным случаем теоремы 2 работы [4].

Теорема B. *Система функций* $\{m_k^{(1/q)}(\zeta),\ \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\}_1^\infty$ *биортогональна на кривой* Γ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma m_k^{(1/q)}(\zeta)\,\rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta = \delta_{k,\nu} = \begin{cases} 1, & k=\nu \\ 0, & k\neq\nu, \end{cases} \tag{8}$$

где $\rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)$ *есть угловые граничные значения функции* $\rho_k^{(1/q)}(z)$ *на кривой* Γ.

Действительно, поскольку функции $\rho_\nu^{(1/q)}(z) \in E_p(G^{(-)})$ и обращаются в нуль в бесконечности, то по формуле Коши имеем

$$\rho_\nu^{(1/q)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G^{(-)},$$

откуда при $z=\omega_k$ непосредственно следует утверждение (8) леммы.

(в) При данном p $(1<p<\infty)$ рассмотрим голоморфную в $D^{(-)} = \{w;\ |w|>1\}$ функцию

$$\chi_{1/q}(w;\ z) = \frac{[\psi'(w)]^{1/q}}{\psi(w) - z}, \quad z \in G^{(+)}, \tag{9}$$

где $q = p/(p-1)$.

Следующая лемма и ее следствие являются предельными случаями теоремы установленной М. М. Джрбашяном (см. [4], теорему 4), на тот случай, когда последовательность $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (3) и (4).

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{\omega_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (3), (4). *Тогда при каждом* $z \in G^{(+)}$ *справедливо представление*

$$\chi_{1/q}(w;\ z) = [\psi'(w)]^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/q)}\ (\psi(w))\ m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{w\,B(w)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\chi_{1/q}(t;\ z)\,B(t)}{w-t}\,dt, \tag{10}$$

где ряд сходится равномерно относительно w *внутри* $D^{(-)}$ *и по* L_q*-метрике на окружности* $|w| = 1$.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в круге $D^{(+)}$ функцию

$$\chi_{1/q}^{*}(\zeta;\ z) = \frac{1}{\zeta}\overline{\chi_{1/q}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}};\ z\right)}\,. \tag{11}$$

Докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$, как функция от ζ, $\chi_{1/q}^{*}(\zeta;\ z) \in H_q(D^{(+)})$. В самом деле, обозначив

$$d(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z| > 0,$$

для любого $|w| = \rho \geqslant 1$ будем иметь

$$|\psi(w) - z| > d(z).$$

Поэтому, учитывая (5), получаем

$$\limsup_{\rho \to 1+0} \int_0^{2\pi} |\chi_{1/q}(\rho e^{i\theta})|^q\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-q} \limsup_{\rho \to 1-0} \int_0^{2\pi} |\psi'(\rho e^{i\theta})|^q\,d\theta < \infty. \tag{12}$$

Однако, по (11) при $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\chi_{1/q}^{*}(re^{i\theta};\ z)|^q\,d\theta = \frac{1}{r^p} \int_0^{2\pi} \left|\chi_{1/q}\left(\frac{1}{r}\,e^{-i\theta};\ z\right)\right|^q d\theta,$$

откуда, ввиду (12) следует, что $\chi_{1/q}^{*}(\zeta;\ z) \in H_q(D^{(+)})$. Теперь применяя теорему А, получим следующее разложение:

$$\chi^*_{1/q}(\zeta; z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B(\zeta)}{(\zeta - a_k) B'(a_k)} \chi^*_{1/q}(a_k; z) + \frac{B(\zeta)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\chi^*_{1/q}(t; z)}{B(t)} \frac{dt}{t - \zeta}, \quad (13)$$

где ряд сходится равномерно в области $D^{(+)}$ и по метрике L_q на окружности $|\zeta| = 1$. Замечая, что

$$\chi^*_{1/q}(a_k; z) = \overline{m_k^{(1/q)}(z)}$$

и переходя к сопряженным величинам в (13), учитывая что $\overline{B(\zeta)} = B(1/\zeta)^{-1}$ и при $|t|=1$ $\chi^*_{1/q}(t; z) = t\,\chi_{1/q}(t; z)$, а также заменяя ζ^{-1} на w, получим (10).

В качестве следствия леммы 2 отметим следующее разложение ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\, m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B(\Phi(\zeta))} \times$$

$$\times \int_\Gamma \frac{B(\Phi(\eta))\,[\Phi'(\eta)]^{1/p}}{(\eta - z)(\Phi(\zeta) - \Phi(\eta))}\, d\eta \quad (z \in G^{(+)},\ \zeta \in G^{(-)}, \quad (14)$$

которое получается из (13) после замены $\psi(w)$ на ζ. Ряд в (14) сходится равномерно относительно ζ внутри $G^{(-)}$ и по метрике L_q на Γ.

(г) Определение [6]. Сложным контуром Ляпунова будем называть контур Γ, состоящий из конечного числа ориентированных дуг Ляпунова* $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$, имеющих конечное число общих точек, при этом будем предполагать, что если Γ_j и Γ_k имеют общую точку, то либо кривая $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ является ляпуновской, либо в этой точке касательные к этим кривым не совпадают.

Теорема С. ([5], [6]). *Пусть кривая Γ является сложным контуром Ляпунова, тогда для любой функции $f(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ интегралы типа Коши*

$$\varphi_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in G^{(+)},\quad \varphi_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in G^{(-)},$$

обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_+(z) \in E_p(G^{(+)})$, $\varphi_-(z) \in E_p(G^{(-)})$.
2. *Имеют место неравенства вида*

$$\|\varphi_+\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,\ \|\varphi_-\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$$

где A_p — постоянная, не зависящая от f, причем

$$\|\varphi_+\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\varphi_+(\zeta)|^p\, |d\zeta| \right\}^{1/p},\quad \|\varphi_-\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\varphi_-(\zeta)|^p\, |d\zeta| \right\}^{1/p},$$

---

* Дугой Ляпунова будем называть ориентированную ограниченную разомкнутую линию Γ, если угол $\alpha(s)$, образованный касательной к Γ, удовлетворяет условию Гельдера.

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(\zeta)|^p \, |d\zeta| \right\}^{1/p}.$$

Лемма А. *Если последовательность точек* $\{\omega_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (3), (4), *то для любой функции* $f(z) \in E_p(G^{(-)})$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(\omega_k)|^p}{|\Phi'(\omega_k)|} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) \leqslant K_p \|f\|_p, \tag{16}$$

где K_p — *постоянная, не зависящая от* f.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в $D^{(+)}$ функцию

$$F(\zeta) = f\left[\psi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{1/p} \zeta \in D^{(+)}.$$

Заметив, что $F(\zeta) \in H_p(D^{(+)})$, согласно теореме Шапиро и Шилдза [7] для точек $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\alpha_k(\omega))|^p (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) \leqslant K_p \|F\|_p, \tag{17}$$

но учитывая, что

$$F(\alpha_k) = f(\omega_k)/[\Phi'(\omega_k)]^{1/p} \text{ и } \|F\|_p = \|f\|_p,$$

из (17) получим (16).

Теорема Д [8]. *Пусть системы функций* $\{\varphi_n(\zeta)\}_1^\infty$, $\varphi_n(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, *и* $\{\psi_n(\zeta)\}_1^\infty$, $\psi_n(\zeta) \in L_q(\Gamma)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *составляют биортогональную систему на* Γ. *Тогда, если разложение каждой функции* $f(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ *типа*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(\zeta), \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \psi_k(\zeta) f(\zeta) \, d\zeta \tag{18}$$

слабо сходится, то для каждой функции $g(\zeta) \in L_q(\Gamma)$ *сопряженное разложение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(g) \psi_k(\zeta), \quad d_k(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi_k(\zeta) g(\zeta) \, d\zeta$$

будет сильно сходящимся, более того, разложение (18) *также будет сильно сходиться.*

2 (а). Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\omega_k\}_1^\infty \in G^{(-)}$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Тогда любая функция* $f(z) \in E_p(G^{(+)})$ *допускает разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/p}}{t \cdot B(t)} r\left(\frac{1}{t}, z\right) dt, \quad z \in G^{(+)}, \tag{19}$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\ \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta\quad(k=1,2,\cdots) \tag{20}$$

и

$$r(w;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{B(t)[\psi'(t)]^{1/q}}{\psi(t)-z}\frac{dt}{1-tw}\in H_1(D^{(+)}), \tag{21}$$

причем ряд в (19) *сходится равномерно внутри области* $G^{(+)}$.

Доказательство. Согласно формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

так что утверждение (19) следует из разложения (14). В свою очередь, утверждение (21) вытекает из теоремы Рисса [7] или же из теоремы А, если заметить, что при фиксированном $z\in G^{(+)}$ по (5) функция $B(t)[\psi'(t)]^{1/q}/(\psi(t)-z)\in L_q$ и произвести замену переменной t на $1/t$.

(б) Обозначим через $\lambda_p\{G^{(+)};\omega_k\}$ класс функций $f(z)\in E_p(G^{(+)})$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/p}}{tB(t)}\,r\left(\frac{1}{t};z\right)dt\equiv 0,\quad z\in G^{(+)}. \tag{22}$$

Отметим, что после того как докажем теорему 2, будет видно, что класс $\lambda_p\{G^{(+)};\omega_k\}$ есть замыкание системы функций $\{m_k^{(1/q)}(z)\}_1^\infty$ по метрике $L_p(\Gamma)$.

Лемма 3. $m_k^{(1/q)}(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\omega_k\}$.

Действительно, обозначая

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{m_k^{(1/q)}[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/p}}{tB(t)}\,r\left(\frac{1}{t};z\right)dt,\quad z\in G^{(+)},$$

будем иметь

$$F(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{[\psi'(t)]^{1/p}}{t[1-\overline{\Phi(\omega_k)}\,t]}\,\pi_k(t)\,r\left(\frac{1}{t};z\right)dt,\quad z\in G^{(+)},$$

где

$$\pi_k(z)=\frac{1}{\dfrac{|\alpha_k(\omega)|}{\alpha_k(\omega)}\displaystyle\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\frac{\alpha_l(\omega)-z}{1-\overline{\alpha_l(\omega)}\,z}\frac{|\alpha_l(\omega)|}{\alpha_l(\omega)}}\cdot\frac{\Phi(\omega_k)-t}{\omega_k-\psi(t)}.$$

Заменив переменную t через $1/w$, получим

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w-\overline{\Phi(\omega_k)}}\,\pi_k\left(\frac{1}{w}\right)r(w;\,z)\,dw,\quad z\in G^{(+)}.$$

Но по (5) и (20) имеем

$$\frac{\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w-\overline{\Phi(\omega_k)}}\,\pi_k\left(\frac{1}{w}\right)r(w;\,z)\in H_1(D^{(+)}),\quad z\in G^{(+)},$$

так что $F(z)\equiv 0$, $z\in G^{(+)}$. Лемма доказана.

(в) Лемма 4. *Пусть* $f(z)\in E_p(G^{(+)})$, *тогда*

$$c_k(f)=F(\overline{a_k}(\omega))\,/\,\overline{B'(a_k(\omega))}\quad(k=1,\,2,\cdots),\tag{23}$$

где $F(z)$ — *некоторая функция из класса* $H_p(D^{(+)})$.

Доказательство. Согласно (19) и (7) имеем

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\,\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B[\Phi(\zeta)]\,[1-\Phi(\zeta)\,\overline{a_k}(\omega)]}\,\frac{}{\overline{B'(a_k(\omega))}}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f[\psi(w)][\psi'(w)]^{1/p}}{B(w)\,[1-w\,\overline{a_k}(\omega)]\,\overline{B'(a_k(\omega))}}\,dw.$$

Заменив переменную w через $1/w$, получим

$$c_k(f)=\frac{1}{\overline{B'(a_k(\omega))}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w\,B\left(\frac{1}{w}\right)(w-a_k(\omega))}\,dw.$$

Теперь заметив, что $g\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}\Big/ w\,B\left(\frac{1}{w}\right)\in L_p$ и обозначив

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w\,B\left(\frac{1}{w}\right)}\,\frac{dw}{w-z},$$

получим формулу (23).

Если обозначим через K замыкание множества точек $\{\omega_k\}_1^\infty$, то будет иметь место

Лемма 5. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(z)$$

сходится абсолютно и равномерно вне K.

Доказательство. Пусть $E \subset CK$ — некоторое замкнутое множество. Обозначим через ρ расстояние между множеством E и K. Учитывая лемму 4 и условие (5), будем иметь

$$|c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z)| \leqslant \frac{C}{\rho} \frac{|F(\overline{\alpha}_k(\omega))|}{|B'(\alpha_k(\omega))|} |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} =$$

$$= \frac{C}{\rho} \cdot \frac{1-|\alpha_k(\omega)|^2}{\prod\limits_{l \neq k} \left| \frac{\alpha_l(\omega) - \alpha_k(\omega)}{1 - \overline{\alpha}_l(\omega)\, \alpha_k(\omega)} \right|} |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} \leqslant \tag{24}$$

$$\leqslant \frac{C}{\rho\delta} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2 |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q},$$

где $C = \sup\limits_{k \geqslant 1} |\Phi(\omega_k)|$.

Но в силу леммы А и того, что $1 \in E_p(G^{(-)})$, заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2)\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1} \leqslant K_q. \tag{25}$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера, согласно (24) и (25) для любого $N > 1$ получаем

$$\sum_{k=1}^{N} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2)\, |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{N} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2)\, |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|^p \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{N} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2)\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1} \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant K_q^{1/q}\, K_p^{1/p}\, \|F\|_p,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть кривая* Γ *является сложным контуром Ляпунова. Тогда, если последовательность комплексных чисел* $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in G^{(-)}$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для произвольной функции* $f(z) \in \lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ *последовательность функций*

$$S_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, m_k^{1/q}(\zeta) \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{26}$$

является слабо сходящейся в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Доказательство. На основании теоремы 1 в силу слабой компактности пространств L_p $(1 < p < \infty)$ достаточно установить ограниченность норм последовательности $\{S_m(\zeta)\}_1^{\infty}$ в L_p.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(\zeta)\|_p = \sup_{\substack{g(\zeta) \in L_q(\Gamma) \\ \|g\|_q \leqslant 1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S_m(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta \right|, \tag{27}$$

где $q = p/(p-1)$. Но по (26) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\{\sum_{k=1}^m c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(\zeta)\right\}g(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\sum_{k=1}^m c_k(f)\,\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\omega_k-\zeta}d\zeta=\sum_{k=1}^m c_k(f)\,\Phi(\omega_k)\,\frac{g^*(\omega_k)}{[\Phi'(\omega_k)]^{1/q}},\tag{28}$$

где

$$g^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta\in E_q(G^{(-)}).$$

Заметим теперь, что ввиду условий (3) и (4)

$$\overline{|B'(\alpha_k(\omega))|}=\frac{1}{1-|\alpha_k(\omega)|^2}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_l(\omega)-\alpha_k(\omega)}{1-\bar\alpha_l(\omega)\,\alpha_k(\omega)}\right|\geqslant\frac{\delta}{1-|\alpha_k(\omega)|^2},$$

так, что из (28) и (23) получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\delta}\sum_{k=1}^m(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\,|F(\bar\alpha_k(\omega))|\,\frac{|g^*(\omega_k)|}{|\Phi'(\omega_k)|^{1/q}},$$

где $C=\sup\limits_{k>1}|\Phi(\omega_k)|<\infty$. Применяя неравенство Гельдера, в силу леммы A и теоремы B будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant\frac{C}{\delta}\left\{\sum_{k=1}^m|F(\bar\alpha_k(\omega))|^p(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^m\frac{|g^*(\omega_k)|^q}{|\Phi'(\omega_k)|}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\right\}^{1/q}\leqslant C\delta^{-1}K_p^{1/p}K_q^{1/q}\|F\|_p\,\|g^*\|_q.$$

Отсюда, учитывая теорему C, из (27) получим неравенство

$$\|S_m(\zeta)\|_p\leqslant\delta^{-1}M_{p,q}\|F\|\quad(m=1,2,\cdots),$$

где $M_{p,q}=CK_p^{1/p}K_q^{1/q}A_q$, и лемма доказана.

(г) Прежде чем перейти к основной теореме докажем еще одну лемму.

Лемма 7. *Предположим, что выполняются условия леммы* 6. *Тогда для каждой функции* $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)(1<p<\infty)$ *существуют функции* $f_1(z)\in\lambda_p[G^{(+)};\omega_k]$, $f_2(z)\in E_p(G^{(+)})$, $f_3(z)\in E_p(G^{(+)})$ *такие, что*

$$f(\zeta)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta)+f_3(\zeta)\tag{29}$$

и $c_k(f)=c_k(f_1)$, *где*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta,\quad (k=1,2,\cdots).$$

Доказательство. Пользуясь теоремой C и известными свойствами интегралов типа Коши [1], легко убедиться, что любая функция $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ допускает представление вида

$$f(\zeta)=F(\zeta)+f_2(\zeta),\ \zeta\in\Gamma,$$

где $F(z)\in E_p(G^{(+)})$, $f_2(z)\in E_p(G^{(-)})$ и $f_2(\infty)=0$. Из этого представления функции $f(\zeta)$ следует, что

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_2(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta. \tag{30}$$

Теперь, учитывая, что $f_2(z)\,\rho_k^{(1/q)}(z)\in E_1(G^{(-)})$ и при $|z|\to\infty$ имеет порядок $O(1/|z|^2)$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_2(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta=0\quad (k=1,2,\cdots).$$

Отсюда и из (30) следует

$$c_k(f)=c_k(F)\ (k=1,2,\cdots). \tag{31}$$

Теперь, согласно теореме 1 и леммам 6, 3, 1, имеем

$$F(z)=f_1(z)+f_2(z),$$

где

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,\omega_k(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\},\ f_2(z)\in E_p(G^{(+)})$$

и $c_k(f_1)=c_k(F)$ $(k=1,2,\cdots)$. Отсюда и из (31) следует утверждение леммы.

Следствие. В условиях леммы 6 биортогональный ряд каждой функции $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(z)$$

совпадает с биортогональным рядом некоторой функции $f(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$.

Теорема 2. *Если кривая* Γ *является сложным контуром Ляпунова и последовательность комплексных чисел* $\{\omega_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для произвольной функции* $f(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ $(1<p<\infty)$

$$\lim_{m\to\infty}\left\|f(\zeta)-\sum_{k=1}^{m}c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(\zeta)\right\|_p=0,$$

где $c_k(f)$ *определяются по формулам* (20).

Доказательство. Согласно следствиям леммы 7 и теореме Д, достаточно доказать слабую сходимость последовательности

$$S_m(\zeta)=\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z) \quad (m=1, 2, \cdots).$$

Но последнее утверждение установлено в лемме 6, так что теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ и выполняется условие теоремы 2, тогда существует функция $F(z)\in E_p(G^{(-)})$, $F(\infty)=0$ такая, что почти всюду на кривой Γ имеет место равенство

$$f(\zeta)=B(\Phi(\zeta))F(\zeta),\ \zeta\in\Gamma. \tag{32}$$

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в области $G^{(-)}$ последовательность функций

$$T_m(z)=\frac{1}{B(\Phi(z))}S_m(z).$$

Согласно теореме 2

$$\lim_{m\to\infty}\left\|T_m(\zeta)-\frac{f(\zeta)}{B(\Phi(\zeta))}\right\|_p=0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ сходится равномерно внутри области $G^{(-)}$ к некоторой функции $F(z)\in E_p(G^{(-)})$, $F(\infty)=0$, и почти всюду на кривой Γ выполняется тождество

$$F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{B(\Phi(\zeta))},\ \zeta\in\Gamma.$$

Отсюда и следует утверждение (32).

Таким образом, функции класса $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ характеризуются тем свойством, что каждую из них можно продолжить в CK в смысле, отмеченном в следствии 1. Иначе говоря, можно дать следующее определение класса $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, эквивалентное первоначальному.

Определение. Функция $f(z)$ определена и голоморфна в CK и принадлежит классу $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ в том и только том случае, если выполняются следующие условия:

1. $f(z)\in E_p(G^{(+)})$, $z\in G^{(+)}$,
2. $f(z)=B(\Phi(z))F(z)$, $F(\infty)=0$, $F(z)\in E_p(G^{(-)})$,
3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне кривой Γ почти всюду совпадают.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 2 *любая функция* $f(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ *разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z),\ z\in CK,$$

где $c_k(f)$ $(k=1, 2, \cdots)$ *определяются единственным образом.*

В заключение выражаю признательность моему научному руководителю, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.XII. 1973

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. $E_p(1<p<\infty)$ դասերի ենթատարածություններում ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին (ամփոփում)

Դիցուք $G^{(+)}$ միակապ տիրույթ է սահմանափակված բարդ Լյապունովի կոնտուրով, $G^{(-)}$-ով նշանակենք $\overline{G}^{(+)}$-ի լրացումը։

Հոդվածում ապացուցված է, որ $\{\omega_k\}_1^\infty$, $\omega_k \in G^{(-)}$ հաջորդականության վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k - z},\ k=1,\ 2,\cdots,$$

որտեղ $\Phi(z)$ ֆունկցիան կոնֆորմ արտապատկերում է $G^{(-)}$-ը $|z|>1$-ի վրա, $E_p(1<p<\infty)$ դասերում իրենց գծային թաղանթի մեջ կազմում է բազիս։

H. M. HAIRAPETIAN. *On the basis of rational functions in subspaces of E_p classes $(1<p<\infty)$* (summary)

Let $G^{(+)}$ be a simply connected domain bounded by a complicated Liapunov curve Denote by $G^{(-)}$ the complement of $\overline{G}^{(+)}$. The paper proves that under some conditions imposed on the $\{\omega_k\}_1^\infty$, $\omega_k \in G^{(-)}$ sequence the system of functions

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k - z},\ k=1,\ 2,\cdots,$$

forms a basis in their linear shell in E_p $(1<p<\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
2. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат.наук 14, № 1, 1961, 9—31.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системе рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
4. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
5. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисского матем. ин-та АН Груз.ССР, XXIII, 1956, 3—158.
6. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, 1973.
7. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On some interpolation problems for analitic functions, Amer. J. Math., vol. 83, № 3, 1961, 513—532.
8. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
9. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1958.
10. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в пространствах классов Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.