ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН, Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, задача Коши для уравнения в частных производных поставлена корректно, если начальное многообразие—нехарактеристическое, а характеристики действительны и различны (гиперболичность, [1], [2]).

В двухмерном случае в работе [3] получены достаточные условия корректности задачи Коши для гиперболических внутри области уравнений произвольного порядка с совпадающими на начальной кривой характеристиками (слабая гиперболичность, вырождение). Общий случай нарушения гиперболичности на начальной кривой исследован в работе [4]. Эти результаты применением преобразования Радона могут быть перенесены на многомерный случай при условии, что коэффициенты уравнения не зависят от пространственных переменных, а начальные данные заданы на гиперплоскости $t = \text{const}$ (см. [5]).

Ниже результаты работы [3] переносятся на многомерный случай без этого жесткого ограничения.

Доказательство основной теоремы 1 о существовании, единственности и устойчивости решения вырождающегося на начальной гиперплоскости гиперболического уравнения основано на получении энергетического неравенства (13). Используется идея Лере о разделяющем операторе и метод обращения мажорантного интегрального уравнения с неинтегрируемым ядром [6], позволяющий применить схему Л. Гординга для вывода основного энергетического неравенства ([1]).

Сравнение с необходимыми условиями корректности, содержащимися в работе [7] (см. следствие из теоремы 1) показывает, что полученные достаточные условия корректности близки к точным.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $V = V_t = \{x = (x^1, x') = (\tau, x'), x' \in R^\nu, 0 < \tau \leqslant t\}$ — переменная полоса, $S = S_t$ — гиперплоскость $\tau = t$. Изменение t происходит в конечном интервале, например, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Кроме полного порядка производной D^α, равного $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\nu+1}$, мы будем пользоваться двойным порядком $[\alpha] = \alpha_1, |\alpha'|$, где α_1 — порядок дифференцирования по x^1, а $\alpha_1 + |\alpha'| = |\alpha|$. Запись $[\alpha] \leqslant p, q$ означает, что $\alpha_1 \leqslant p$, $|\alpha| \leqslant p+q$. Обозначим через Lip^k множество всех определенных в V комплекснозначных функций, у которых производные порядка $\leqslant k$ существуют почти всюду, а Lip° — совокупность всех измеримых и ограниченных функций. Аналогично, $Lip^{p,q}$ — класс комплекснозначных функций с ограниченными производными порядка $\leqslant p,q$.

Пусть

$$a = a(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha + \Sigma d_k D^k, \ |\alpha| = m+1, \ |k| \leqslant m, \qquad (1)$$

$$Pa = Pa(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha, \ |\alpha| = m+1.$$

Условимся записывать $a \in Lip^k$ ($a \in Lip^{n,q}$), если этим классам принадлежат все коэффициенты оператора a.

Оператору a сопоставим характеристический полином

$$Pa(x, \zeta) = \Sigma a_\alpha \zeta^\alpha = a_0(x) \prod_1^{m+1} [\zeta_1 - \lambda_l(x, \zeta')], \qquad (2)$$

где $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{\nu+1})$, $\zeta' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_{\nu+1})$, $|\zeta'|^2 = \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_{\nu+1}^2$.

Определение. Оператор a называется гиперболическим (относительно первой координаты), если в разложении на множители (2) $\lambda_l(x, \zeta')$ действительны и различны, когда вектор ζ' действителен и отличен от нуля.

Далее, везде оператор a предполагается нормальным, т. е. коэффициент D_1^{m+1} равен единице (это означает, что для гиперболического оператора a гиперплоскость S_0 нехарактеристическая). Полагая оператор a гиперболическим при $\tau > 0$, мы допустим при $\tau = 0$ совпадение чисел $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(2 \leqslant r \leqslant m+1)$.

Определение. Оператор a называется гиперболическим равномерно r-вырождающимся на S_0, если a — гиперболический в V_t при $\tau > 0$ и существует функция $\lambda(\tau) \in C^1[0, 1]$ такая, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(\tau) > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и характеристические корни полинома $Pa(x, \zeta)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D^{0,n} \lambda_i(x, \zeta')| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_i} \cdot |\zeta'|, \ i = 1, \cdots, r, \ n = 0, 1, \cdots, q+1, \qquad (3)$$

причем $1 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_r$,

$$\lambda_i|_{\tau=0} \neq 0, \ r < i \leqslant m+1,$$

$$\left| \frac{D^{0,n} \lambda_{i\tau}}{\lambda_i} \right| \leqslant \text{const} \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)}, \qquad (4)$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant \text{const} \cdot \lambda^{2\omega_j} \cdot |\zeta'|^2, \quad j < i \leqslant r,$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 > \text{const} \cdot |\zeta'|^2, \ r \leqslant j < i \text{ или } j \leqslant r < i. \qquad (5)$$

Введем некоторые линейные пространства

1. E^k — пространство всех непрерывно дифференцируемых в V до порядка k функций с компактными носителями, $E^\infty = E$.

2. Если U является частью V, то $H^{p,q}(U)$ — пополнение ε по норме

$$|D^{p,q} f, U|^2 = \int_U |D^{p,q} f|^2 \, dU = \int_U \sum_{|\alpha| < p,q} |D^\alpha f|^2 \, dU, \qquad (6)$$

где $dU = dx_1 \cdots dx_{\nu-1}$ при $U = V$ и $dU = dx_2 \cdots dx_{\nu-1}$, если U совпадает с S или его частью.

3. $L^{p,q}$ — пополнение E по норме

$$|D^{p,q} f|_1 = \int_0^t |D^{p,q} f, S_\tau|\, d\tau. \tag{7}$$

4. $B^{p,q}$ — подпространство пространства $L^{p,q}$, определяемое условием

$$|D^{p,q} f|_\infty = \operatorname{ess\cdot sup}_{0<\tau<t} |D^{p,q} f, S_\tau| < \infty. \tag{8}$$

5. Пусть C_0^∞ — подпространство C^∞, элементы которого равны нулю в окрестности S_0 и $H_0^{p,q}(V)$ — замыкание C_0^∞ в $H^{p,q}(V)$.

Производные суммарного порядка $< p+q$ и порядка $< p$ по D_1 элементов $H_0^{p,q}$ равны нулю почти всюду на S_0.

Основной результат настоящей работы формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть a — гиперболический равномерно r-вырождающийся на S_0 оператор $(m+1)$-го порядка с коэффициентами*

$$a \in Lip^{0,q}, \quad Pa \in Lip^1. \tag{9}$$

Тогда, если младшие коэффициенты оператора a удовлетворяют условиям

$$\tau^{m-|k|}|D^{0,n} d_k(x)| \leqslant \begin{cases} c\cdot\lambda^{\Omega_1-1}\lambda', & m+2-r \leqslant |k|-k_1 \leqslant m \\ \text{const}, & \text{для остальных } |k| \leqslant m, \end{cases} \tag{10}$$

$$\Omega_1 \equiv \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1-k_1+|k|-m}, \quad n = 0, 1, \cdots, q; \quad 2 \leqslant r < m+1,$$

то задача Коши

$$au = f \tag{11}$$

при

$$f \in H^{0,\, q+(m+1)\gamma}(V) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u \in H_0^{m+1,q}$, причем при $q > 0$ имеет место неравенство

$$|D^{m+1,q-1} u, V_t| \leqslant \text{const}\, |D^{0,\, q+\gamma(m+1)} au, V_t| \tag{13}$$

для всех $t \in (0, 1]$ и всех $u \in H_0^{m+1,q}$.

Замечание: постоянная γ в (12), (13) зависит только от постоянных, фигурирующих в (4), (5), (10).

Пусть далее

$$a^\alpha(x, \zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^\alpha a(x, \zeta), \quad a_\beta = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\beta a(x, \zeta)$$

$$a_s(x, \zeta) = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha \zeta^\alpha \quad (0 \leqslant s \leqslant m+1), \quad a_{s1}(x', \zeta') = a_s|_{\tau=\zeta_1=0}. \tag{14}$$

Следствие: Пусть a — гиперболический (относительно координаты $x^1 = \tau$) при $\tau > 0$, нормальный оператор с аналитическими коэффициентами и

$$a^{(r, 0, \dots, 0)}(x', \zeta') \neq 0$$

для ζ' отличных от нуля

$$a^{(\alpha)}_{m+1(\beta)}(x', \zeta') = 0 \text{ при } \alpha + \frac{\beta}{p} < r, \tag{15}$$

где p — любое целое число ≥ 1, $2 \leq r \leq m+1$. Тогда для того чтобы задача Коши для уравнения (11), $f \in C_0^\infty$ с нулевыми данными на S_0 была корректна в смысле теоремы 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{\alpha}_{s(\beta)}(x', \zeta') = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| + \frac{\beta}{p} + (m+1-s)\left(1 + \frac{1}{p}\right) < r. \tag{16}$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующее энергетическое неравенство:

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *существует постоянная* c *такая, что*

$$|D^{m, q} u, S_t| \leq c\, |D^{0, q+(m+1)\gamma} au|_1 \tag{17}$$

для всех $u \in H_0^{m+1, q}$ *и* $t \in [0, 1]$.

Если $q > 0$, *то имеет место также и оценка* (13).

§ 2. Подготовительные леммы

Пусть a и b — два гиперболических оператора порядков $m+1$ и m соответственно.

Определение. Будем говорить, что b разделяет a, если для всех x листы поверхности $Pb(x, \zeta) = 0$ разделяют листы $Pa(x, \zeta) = 0$.

Если задан произвольный нормальный гиперболический оператор a, то для построения нормального гиперболического разделяющего оператора b достаточно, следуя Лере, положить

$$b = Pb(x, \zeta) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} Pa(x, \zeta).$$

Пусть $\bar{x}$ обозначает точку пространства $\bar{R}^{\nu+1}$, отличного от $R^{\nu+1}$. Вводя, как обычно [1], двойные дифференциальные операторы, мы будем полагать, что операторы D^α и $\bar{D}^\alpha$ действуют в пространствах $R^{\nu+1}$ и $\bar{R}^{\nu+1}$ соответственно. Кроме (11) мы рассмотрим (необходимую для данного метода доказательства теоремы 1) вспомогательную задачу Коши для гиперболического уравнения с постоянной r-кратностью ($\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \dots \equiv \lambda_r \equiv 0$ во всей области V).

$$a'u = f, \; u|_{S_0} = D_1 u|_{S_0} = \dots = D_1^m u|_{S_0} = 0. \tag{11'}$$

Здесь

$$a'(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha, \ |\alpha| \leqslant m+1, \ \alpha_1 > |\alpha| - m + r - 1. \tag{1'}$$

Пусть

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ L = a\bar{b} + \bar{a} b, \ \bar{a}(x, D) = a(\bar{x}, \bar{D}).$$

Лемма 1. *Если главные части операторов действительны, а $a \in Lip^0$, $Pa \in Lip^1$ и $b \in Lip^1$, то*

$$L = \sum_{1}^{m+1} (D_j + \bar{D}_j) A^j + A^0, \tag{18}$$

где $\{A^j\}_0^{m+1}$ — *двойные дифференциальные операторы порядка* $\leqslant m$, m, *а именно*

$$A^j = \sum a_\alpha b_\beta K^j_{\alpha\beta}, \ A^0 = -\sum (D_j a_\alpha b_\beta) K^j_{\alpha\beta} + d_k b_\beta (\bar{D}^\beta D^k + D^\beta \bar{D}^k), \tag{19}$$

$$D^\alpha \bar{D}^\beta + \bar{D}^\alpha D^\beta = \sum (D_j + \bar{D}_j) K^j_{\alpha\beta}, \ |k| \leqslant m, \ |\beta| \leqslant m, \ |\alpha| = m+1,$$

при условиях (3), (4), (10) *имеем*

$$|A^0 u\bar{u}, V| \leqslant \int_0^t \left(c + M_0 \frac{\lambda'}{\lambda}\right) |\tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^\beta u, S_\tau|^2 \, d\tau, \tag{20}$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1-\beta_1+|\beta|-m}.$$

Здесь по $|\beta| \leqslant m$ идет суммирование, причем в членах суммы с множителями вида λ^{Ω_1}, где $r - 1 - \beta_1 + |\beta| - m < 0$, множители λ^{Ω_1} надо заменить единицей.

Замечание. Лемма 1 остается верной и для кратного оператора (1'), при этом:

$$|A^{0'} u\bar{u}, V| \leqslant \text{const} \int_0^t |D^\beta u, S_\tau|^2 \, d\tau, \tag{20'}$$

$$|\beta| \leqslant m, \ \beta_1 \geqslant r - 1 - m + |\beta|.$$

Доказательство: Доказательство первой части леммы см [1], стр. 45. Докажем оценки (20) и (20'). Из (3), (4) вытекают следующие оценки для коэффициентов операторов Pa и b:

$$|D^{0,n} a_\alpha| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-|\alpha_1}}, \ |D_1 a_\alpha| < c \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-\alpha_1}} \frac{\lambda'}{\lambda}, \tag{21}$$

$$|D^{0,n} b_\beta| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-\beta_1|-1}}, \ |D_1 b_\beta| \leqslant c\lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r|-1-\beta_1}} \frac{\lambda'}{\lambda}. \tag{22}$$

Оценка (21) вытекает из (3), (4) и теоремы Виета, а (22) получается аналогично, если выбрать разделяющий оператор Лере:

$$b = Pb(x, \zeta) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} Pa(x, \zeta). \tag{23}$$

Тогда (20) получается из представления для $A^\circ = (19)$ и (10) (20′) следует из (10), (19) и вида оператора a' (см. (1′)), так как

$$\begin{aligned} a_\alpha &\equiv 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 < r-1+|\alpha|-m \\ \beta_\beta &\equiv 0 \quad \text{при} \quad \beta_1 < r-1+|\beta|-m. \end{aligned} \tag{24}$$

Лемма 2. *Если a и b — два гиперболических оператора, причем $a_0 b_0 > 0$ и b разделяет a, то форма $PA^1 u\bar{u}$ вполне положительна:*

$$PA^1(x, \zeta) = a_0\bar{b}_0 \sum_1^{m+1} \gamma_k |a_k(x, \zeta)|^2, \tag{25}$$

где

$$\gamma_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (\lambda_k - \mu_j)}{\prod\limits_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad |a_k| = \prod_{j \neq k}^{m+1} |\zeta_1 - i\lambda_j|. \tag{26}$$

Замечание: формулы, аналогичные (25) и (26) верны и для операторов a' и b'.

Доказательство. Доказательство леммы см. в [1], стр. 47. Замечание доказывается аналогично, если заметить, что

$$Pa'(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \prod_1^{m+2-r} (\zeta_1 - i\lambda_j),$$

так как

$$\lambda_{m+2-r} \equiv \lambda_{m+3-r} \equiv \lambda_{m+1} \equiv 0,$$

$$Pb'(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \sum_{j=1}^{m+2-r} (\zeta_1 - i\mu_j) \quad (\mu_j \text{ лежат между } \lambda_j).$$

Вводя

$$a_k'(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \prod_1^{m+2-r} (\zeta_1 - i\lambda_j), \tag{27}$$

имеем

$$Pb' = \sum_{k=1}^{m+1} \gamma_k' a_k',$$

$$\gamma_k' = \prod_{j=1}^{m+1-r} (\lambda_k - \mu_j) \Big/ \sum_{j \neq k}^{m+2-r} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Отсюда следует, что оценки (25) и (26) сохраняются и для a', b', если суммы и произведения распространять на все некратные корни.

Лемма 3. *Пусть оператор a — нормальный, гиперболический, равномерно r-вырождающийся на S_0. Тогда в условиях* (5), (9), ($q = 0$) *имеет место неравенство*

$$PA^1(x, \zeta) > c \sum_{|\beta|=m} |\lambda^{\Omega} \zeta^{\beta}|^2, \tag{28}$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{r-\beta_1-1}$$

и, аналогично, для оператора a'

$$PA^1(x, \zeta) \geqslant \text{const} \sum |\zeta^{\beta}|^2, \quad |\beta| = m, \quad \beta_1 \geqslant r-1. \tag{28'}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\xi = (\zeta_1^m, \ -i\zeta_1^{m-1}|\zeta'|, \cdots, (-i|\zeta'|)^m),$$

$$\xi = (\zeta_1^m, \ -i\zeta_1^{m-1}|\zeta'|, \cdots,$$

$$\lambda^{\omega_1}\zeta_1^{r-2}|\zeta'|^{m+2-r}, \cdots, (-i|\zeta'|)^m \lambda^{\omega_1+\cdots+\omega_{r-1}}.$$

Пусть Q и Λ_k — диагональные матрицы с диагональными элементами, равными соответственно

$$\overbrace{1, \cdots, 1}^{(m+2-r)}, \ \lambda^{-\omega_1}, \ \lambda^{-\omega_1-\omega_2}, \cdots, \lambda^{-\omega_1-\cdots-\omega_{r-1}}$$

и

$$1, \sum_{l \neq k} \lambda_l, -\sum_{\substack{l_1 < l_2 \\ l_1, l_2 \neq k}} \lambda_{l_1}\lambda_{l_2}, \cdots, (-1)^m \prod_{l \neq k}^{m} \lambda_l$$

(здесь $\lambda_l = \lambda_l(x, \zeta'/|\zeta'|)$).

Пусть

$$\Lambda^0 = Q\Lambda Q,$$

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{m+1} \Lambda_k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Lambda_k.$$

Из леммы 2 имеем

$$PA^1(x, \zeta) = \sum \gamma_k |a_k|^2 \geqslant c \sum |a_k|^2 \equiv$$

$$\equiv c\,\xi\Lambda\xi^+ \equiv c\,\xi_0\Lambda^0\xi_0 \geqslant c\,\xi_0\xi_0^+,$$

откуда и следует (28) (здесь использовано $\gamma_k > 0$, что следует из (23), (26)), если принять во внимание $\Lambda^0 > 0$, что вытекает из критерия Сильвестра и (5), так как главные $(s+1)\times(s+1)$ миноры матрицы Λ^0 равны

$$\frac{\displaystyle\sum_{(k_1,\cdots,k_{s+1})\in(1,\cdots,m+1)} \ \prod_{\substack{l<j \\ l,j=k_1,\cdots,k_{s+1}}} (\lambda_l-\lambda_j)^2}{\lambda^{2(s-m+r-1)\omega_1+\cdots+2\omega_{s-m+r-1}}|\zeta'|^{s(s+1)}} \quad \text{при } s+1 > m+2-r,$$

$$\sum \prod (\lambda_l - \lambda_j)^2 / |\zeta'|^{s(s+1)} \quad \text{при } s+1 \leqslant m+2-r.$$

Соотношение (28') доказывается аналогично.

Рассмотрим форму порядка (m, m)

$$H = \sum h_{\alpha\beta} D^{\alpha}uD^{\beta}u, \quad |\alpha| = |\beta| = m$$

и характеристический полином

$$K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum K_{\alpha\beta} \zeta^{\alpha} \bar{\zeta}^{\beta}.$$

Используя частичное преобразование Фурье функции u по переменным $x_2, \cdots, x_{\nu+1}$,

$$F(x, \eta') = \int u(x) \exp(-i\eta_2 x_2 - \cdots)\, dS,$$

$$dS = dx_2 \cdots dx_{\nu+1}$$

с помощью формулы Парсеваля получим

$$\int H dS = (2\pi)^{-\nu} \int K(\sigma\, \bar{\sigma})\, F \bar{F}\, d\eta',$$

$$\eta' = (\eta_2, \cdots, \eta_{\nu+1}),\quad \sigma = (D_1,\ i\eta_2, \cdots, i\eta_{\nu+1}).$$

Пусть

$$K(\sigma, \bar{\sigma}) F \sim \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} \sigma^{\beta} F|^2 \tag{29}$$

(здесь и далее знак $\sim$ означает, что отношение левой и правой частей можно отделить от нуля и бесконечности постоянными).

Определение. Форма H называется положительной по отношению к оси x_1, если имеет место соотношение (29).

Из (29) следует (согласно формуле Парсеваля)

$$\int H dS \sim \int \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho}(\tau)\, D^{\beta} u|^2\, dS. \tag{30}$$

Лемма 4. *Эрмитов однородный оператор степени (m, m) тогда и только тогда является положительным, когда*

$$K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} \zeta^{\beta}|^2.$$

Доказательство. См. [1], стр. 37.

Лемма 5. *В предположениях теоремы 1 и компактности S имеет место неравенство*

$$\int A^1(x, D)\, u \bar{u}\, dS \geqslant c \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} D^{\beta} u,\ S|^2 -$$

$$- c^{-1} \sum |\lambda^{\varrho} D^{\beta_1,\ m - 1 - \beta_1} u,\ S|^2, \tag{31}$$

а в случае оператора a' (1'):

$$\int A'^1\ (x, D)\, u \bar{u}\, dS \geqslant c \sum |D^{\beta} u,\ S|^2 -$$

$$- c^{-1} \sum |D^{\beta_1,\ m - 1 - \beta_1} u,\ S|^2,\ \beta_1 \geqslant r - 1 + |\beta| - m, \tag{31'}$$

где c — достаточно большая постоянная.

Доказательство. Ввиду того, что

$$K^1_{\alpha\beta} = D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1}\,\overline{D^\beta} + D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1}\, D^\beta \quad (\alpha_1 > 1)$$

(см. (20)), имеем

$$|PA^1(x, D)\, u\bar{u}| = |\sum a_\alpha b_\beta K^1_{\alpha\beta}\, u\bar{u}| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum |\lambda^\rho D^\beta u|\, |\lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_r - \alpha_1} D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1} u| \leqslant c \sum_{|\beta|=m} |\lambda^\rho D^\beta u|^2. \qquad (32)$$

Пусть T — сфера радиуса ε с центром x_0, а $supp\, u \subset T \subset S$. Из лемм 3 и 4 следует

$$\int PA^1(x_0, \sigma)\, u\bar{u}\, dS \geqslant \text{const} \sum_{|\beta|=m} |\lambda^\rho D^\beta u, S|^2. \qquad (33)$$

Далее

$$\int A^1(x, D)\, u\bar{u}\, dS = \int PA^1(x_0, D)\, u\bar{u}\, dS +$$

$$+ \int [PA^1(x, D) - PA^1(x_0, D)]\, u\bar{u}\, dS =$$

$$= \int PA^1(x_0, \sigma)\, u\bar{u}\, dS +$$

$$+ \int [PA^1(x, D) - PA^1(x_0, D)]\, u\bar{u}\, dS \geqslant$$

$$> \sum |\lambda^\rho D^\beta u, S| - c\delta(\varepsilon) \sum |\lambda^\rho D^\beta \bar{u}, S|^2.$$

Из равномерной непрерывности коэффициентов PA^1 в $supp\, u \subset T$ следует, что $\varepsilon \to 0$ влечет $\delta(\varepsilon) \to 0$, поэтому

$$\int A^1(x, D)\, u\bar{u}\, dS \geqslant$$

$$\geqslant c \sum |\lambda^\rho D^\beta u, S|^2, \ |\beta| = m. \qquad (34)$$

Пусть далее $1 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots$ представляет собой разбиение единицы на S, удовлетворяющее следующим условиям:

а) каждая функция φ_j бесконечно дифференцируема,

б) производные ее до порядка m включительно равномерно ограничены,

в) носитель S_j функции φ_j пересекается лишь с конечным числом других носителей, причем для любой функции u, равной нулю вне S_j, соотношение (34) выполняется с постоянной, не зависящей от j.

В силу определения

$$\int A^1 u\bar{u}\, dS = \sum_j \int \varphi_j \varphi_j A^1 u\bar{u} =$$

$$= \sum \int [A^1 \varphi_j u \overline{\varphi_j u} + (\varphi_j \overline{\varphi}_j A^1 -$$

$$- A^1 \varphi_j \overline{\varphi}_j)\, u \overline{u}]\, dS, \tag{35}$$

$$\varphi \overline{\varphi} A^1 - A^1 \varphi \overline{\varphi} = \sum a_\alpha b_\beta (\varphi \overline{\varphi} K -$$

$$- K \varphi \overline{\varphi} = \sum a_\alpha b_\beta [\varphi (\overline{\varphi} K - K \overline{\varphi}) + (\varphi K - K \varphi)\, \overline{\varphi}]$$

$$\sum a_\alpha b_\beta \varphi (\overline{\varphi} K - K \overline{\varphi})\, u \overline{u} = \sum |a_\alpha b_\beta| \times$$

$$\times |\varphi D^\beta u - D^\beta (\varphi u)|\, |D^{\alpha_1 - 1,\ m+1-\alpha_1} u| \leqslant$$

$$\leqslant \sum |a_\alpha b_\beta| \cdot |\varphi D^{\alpha_1 - 1,\ m+1-\alpha_1} u|\, |D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u|.$$

Поступив аналогично с другим слагаемым, из (35) получаем

$$(\varphi \overline{\varphi} A^1 - A^1 \varphi \overline{\varphi})\, u \overline{u} \leqslant c \sum |a_\alpha b_\beta| \times$$

$$\times |D^{\alpha_1 - 1,\ m+1-\alpha_1} u|\, |D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum \left(r\, |a_\alpha D^{\alpha_1 - 1,\ m+1-\alpha_1} u|^2 + \frac{1}{r} |b_\beta D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant c r_1 \sum_{|\beta| < m} |\lambda^\varrho D^\beta u|^2 + c r_1^{-1} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u|^2.$$

Итак

$$\int A^1 u \overline{u}\, dS = \sum_j \int A^1 \varphi_j u \overline{\varphi_j u}\, dS +$$

$$+ \sum_j \int (\varphi_j^2 A^1 - A^1 \varphi_j^2)\, u \overline{u}\, dS \geqslant$$

$$\geqslant c \sum |\lambda^\varrho D^\beta (\varphi_j u),\ S|^2 - c r_1 \sum |\lambda^\varrho D^\beta u,\ S_j|^2 -$$

$$- \frac{c}{r_1} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u,\ S_j|^2 \geqslant$$

$$\geqslant c \sum |\lambda^\varrho D^\beta u,\ S|^2 - \frac{1}{c} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1,\ m-1-\beta_1} u,\ S_j|^2.$$

Соотношение (31′) доказывается аналогично.

Лемма 6. *Если a и b — два нормальных оператора с действительными главными частями* $a \in \mathrm{Lip}^{p,\, q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$, $b \in \mathrm{Lip}^{0+1,\, lq}$, *то*

$$\Delta^{p,\, q} L \equiv \sum (D_j + \overline{D}_j)\, B^j + B^0, \tag{36}$$

где

$$\Delta^{p,\, q} = \sum D^\gamma \overline{D}^\gamma,\ [\gamma] \leqslant p,\ q,$$

$\{B^j\}_0^{\nu+1}$ — *двойные дифференциальные операторы порядка* $\leqslant m + p,\ q$; $m + p,\ q$

$$B^j = A^j \Delta^{p,\, q} + a^j b_\Delta + \overline{a}^j b,\ j > 0, \tag{37}$$

$$a = \sum D_j a^j + a_0. \tag{38}$$

Доказательство. См. [1], стр. 51.

Далее нам понадобится лишь частный случай $p=0$ в (36)—(38). Как и в случае лемм 1, 5 получаем

$$\int B^0 u \bar{u}\, dV \leqslant \int_0^t \left(c + M\frac{\lambda'}{\lambda}\right) \times$$
$$\times |\lambda^{\Omega_1}(\tau)\, \tau^{|\beta|-m} D^\beta D^{0,q} u,\ S_\tau|^2\, d\tau, \tag{39}$$
$$\int B^1 u \bar{u}\, dS_t > c \sum |\lambda^\Omega D^\beta D^{0,q} u,\ S_t|^2 -$$
$$-\frac{1}{c}\sum |\lambda^\Omega D^{\beta_1, m-1-\beta_1+q} u,\ S_t|^2.$$

§ 3. Доказательство теорем

Проинтегрируем по V тождество (36), (u финитно):

$$\int \Delta^{0,q} L u \bar{u}\, dV = \int [(D_1 + \bar{D}_1) B^1 + B^0] u \bar{u}\, dV$$

или

$$\int B^1 u \bar{u}\, dS_t = \int B^1 u \bar{u}\, dS_0 + \int (\Delta^{0,q} L - B^0)\, u \bar{u}\, dV.$$

Отсюда, учтя (39) и

$$\int \Delta^{0,q} L u \bar{u}\, dV \leqslant c\, |D^{0,q} au|_1\, |\lambda^\Omega D^\beta D^{0,q} u|_\infty,$$

получим (из $u|_{s_0} = \cdots D_1^m u|_{s_0} = 0$ следует $\int B^1 u \bar{u}\, dS_0 = 0$)

$$|\lambda^\Omega D^\beta D^{0,q} u,\ S_t| \leqslant \int_0^t \left(c + M\frac{\lambda'}{\lambda}\right) \times$$
$$\times |\tau^{|\beta|-m} \lambda^{\Omega_1} D^\beta D^{0,q} u,\ S_\tau|^2 + \text{const}\, |D^{0,q} au|_1\, |\lambda^\Omega D^\beta D^{0,q} u|_\infty. \tag{40}$$

Докажем, что если

$$|D^{m,q} u,\ S_0| = 0, \tag{41}$$

то имеет место неравенство

$$|\tau^{|\beta|-m} \lambda^{\Omega_1} D^{\beta_1, \beta' + q} u|_\infty \leqslant \text{const}\, |\lambda^{\Omega_1} D^{m,q} u|_\infty. \tag{42}$$

Из

$$D^\beta D^{0,q} = \int_0^t D_1 D^\beta D^{0,q} u\, d\tau_1 + D^{\beta_1, q+\beta'} u\,(0, x')$$

или

$$|D^{\beta_1, \beta'+q} u|^2 \leqslant c \cdot t \int_0^t |D^{\beta_1+1, q-1-\beta'} u|^2 d\tau,$$

интегрируя по x', получаем (учитывая (41))

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t|^2 \leqslant c \cdot t \int_0^t |D^{\beta_1+1, q-1+\beta'} u, S_\tau|^2 d\tau$$

или

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t| \leqslant c \cdot t \cdot |D^{\beta_1+1, q-1+\beta'} u|_\infty.$$

Аналогично по индукции

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t| \leqslant \text{const} \cdot t^{m-|\beta_1|} |D^{m, q} u|_\infty.$$

Отсюда вытекает (42).

Итак, из (40) и (42) получаем

$$\rho(t) \leqslant \int_0^t \left(c + M \frac{\lambda'}{\lambda}\right) \rho(\tau)\, d\tau + \sigma(t), \tag{43}$$

где

$$\sigma(t) = c\, |D^{0, q} au|_1\, |\lambda^2 D^\beta D^{0, q} u|_\infty, \tag{44}$$

$$\rho(t) = |\lambda^2 D^\beta D^{0, q} u, S_t|^2_\infty, \tag{45}$$

$$K(\tau) = \text{const} + M \frac{\lambda'}{\lambda}. \tag{46}$$

Замечание. Если бы мы ту же процедуру проделали бы с оператором a', то вместо (43) мы получили бы неравенство (17') (см. ниже).

Теорема 3. *Задача Коши* (11') *имеет единственное решение, причем*

$$|D^{m+p, q} u|'_\infty \leqslant \text{const}\, |D^{p, q} a'u|_1, \tag{17'}$$

где

$$|D^{m+p, q} u|'_\infty = \text{ess sup} \left(\int \sum |D^\alpha u|^2 dS_\tau \right)^{1/2},$$

$$[\alpha] \leqslant \beta_1 + p,\ m - \beta_1 + q;\ \beta_1 \geqslant r - 1 + p.$$

Доказательство следует из априорной оценки (17').

Доказательство теоремы существования мы опускаем (эта теорема доказана в [8], [9] иным методом).

Лемма 7. *Если* $\sigma(\tau)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^{t_0} K(\tau) \frac{\sigma(\tau)}{\rho_0(\tau)} d\tau < \infty, \tag{47}$$

где

$$\rho_0(\tau) = \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} K(t)\,dt\right\} = \text{const}\cdot\lambda^{M}\cdot\exp(\tau), \tag{48}$$

то для ρ, *удовлетворяющего* (43) *и*

$$\rho(t) = \rho_0(t)\,o(1),\ \tau\to+0 \tag{49}$$

справедлива оценка

$$\rho(t) \leqslant \rho_0(t)\int_0^t K(\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\rho_0(\tau)}\,d\tau + \sigma(t). \tag{50}$$

Доказательство. См. [3].

Для выполнения (47) достаточно потребовать

$$\int_0^{\tau}\lambda'\lambda^{-M-1}|D^{0,q}au|_1\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\tau}\lambda'\lambda^{\delta-1}\left|\frac{D^{0,q}au}{\lambda^{M+\delta}}\right|_1 d\tau;\ \delta = \text{const},\ 0<\delta<1. \tag{51}$$

Пусть $L^{0,q}_{M_0}$ — подпространство пространства $L^{0,q}$, определяемое условием $(M_0>0)$

$$\left|\frac{D^{0,q}f}{\lambda^{M_0}}\right|_1 = \int_0^t \lambda^{-M_0}(\tau)|D^{0,q}f,\ S_\tau|\,d\tau<\infty. \tag{52}$$

Тогда для выполнения (47) достаточно потребовать

$$au\in L^{0,q}_{M_0}\quad (M_0\equiv M+\delta>0). \tag{53}$$

Упростим (50) $(\sigma(0)=0)$

$$\rho(t)\leqslant\sigma(t)+e^t\lambda^M\int_0^t\frac{K(\tau)\,\sigma(\tau)}{\lambda^M e^{\tau}}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\lambda^M|\lambda^\varrho D^\beta D^{0,q}u|_\infty\int_0^t\frac{\lambda'}{\lambda^{M+1}}|D^{0,q}au|_1\,d\tau\leqslant$$

$$< c\lambda^M|\lambda^\varrho D^\beta D^{0,q}u|_\infty\left\{\int_0^t ds\left[\lambda^{-M-\delta}(s)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times|D^{0,q}au,\ S_s|\int_s^t\lambda^{\delta-1}\lambda'\,d\tau\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c\lambda^{M+\delta}\, |\lambda^{\Omega} D^{\beta} D^{0,\,q} u|_{\infty} \left|\frac{D^{0,\,q}\, au}{\lambda^{M+1}}\right|_1 .$$

Итак

$$\rho(t) \leqslant \mathrm{const}\, \lambda^{2\,(M+\delta)} \left|\frac{D^{0,\,q}\, au}{\lambda^{M+\delta}}\right|_1^2 . \tag{54}$$

Для доказательства основного неравенства (18) заметим, что задачу Коши

$$au = f,\ u|_{s_0} = \cdots = D_1^m\, u|_{s_0} = 0, \tag{11}$$

где f — достаточно гладкая функция, можно свести к задаче

$$a\hat{u} = \hat{f},\ \hat{u}|_{s_0} = \cdots = D_1^m \hat{u}|_{s_0} = 0;\ \hat{f} \in L^{0,\,q}_{M_0}. \tag{55}$$

Пусть u_{i+1} — решения уравнений (с нулевыми данными)

$$a' u_{i+1} = f_i,\ i = 0, 1, \cdots, \gamma, \tag{56}$$

а f_i определяются как

$$f_0 \equiv f,\ f_i = (a' - a)\, u_i,\ \hat{f} \equiv f_\gamma;\ i = 1, \cdots, \gamma.$$

Вычтем из уравнения (11) уравнение (56) $i = 0, 1, \cdots, \gamma$, при этом мы получим $a\hat{u} = f_\gamma \equiv \hat{f}$, т. е. (55), где $\hat{u} = u - u_1 - \cdots - u_\gamma$.

Если f — достаточно гладкая функция, то γ можно подобрать столь большим, что $\hat{f} \in L^{0,\,q}_{M_0}$.

Оценим $\hat{f}$:

$$|\hat{f}| = |(a' - a)\, u_\gamma| = \Big| \sum_{\substack{|\alpha| = m+1 \\ \alpha_1 < r}} a_\alpha D^\alpha u_\gamma +$$

$$+ \lambda' \sum \tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^{\beta} u_\gamma \Big|,$$

и так как u_γ — решение уравнения

$$a' u_\gamma = f_{\gamma-1},\ u_\gamma|_{s_0} = \cdots = D_1^m\, u_\gamma|_{s_0} = 0,$$

то из (11′)

$$\sum_{\substack{|\alpha| = m+1 \\ \alpha_1 < r}} |D^\alpha D^{0,\,q} u_\gamma,\ S|^2 \leqslant |D^{r-1,\, m+2-r+q} u_\gamma,\ S| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1,$$

$$\tau^{|\beta| - m} |D^{\beta} D^{0,\,q} u_\gamma,\ S| \leqslant c\, |D^{m,\, q+m} u_\gamma|_\infty \leqslant \mathrm{const}\, |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1,$$

откуда

$$|D^{0,\,q} f_\gamma,\ S| \leqslant \mathrm{const} \cdot \lambda' \, |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1.$$

Далее

$$|\lambda^{-h} D^{0,\,q} f_\gamma|_1 \leqslant \int_0^t \lambda^{-h} \lambda' |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \lambda' \lambda^{\delta-1} \int_0^{\tau} \lambda^{1-\delta-h} |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1},\ S_\tau|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \lambda^{\delta} \left| \frac{D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}}{\lambda^{h-(1-\delta)}} \right|_1 .$$

По индукции можно показать, что

$$|\lambda^{-h} D^{0,\, q} f_\gamma|_1 \leqslant c\, \lambda^{\gamma\delta} \int_0^t \frac{\lambda'}{\lambda^{1-\delta}} \left| \frac{D^{0,\, q+\gamma m} f_0}{\lambda^{h-\gamma(1-\delta)}} \right|_1 d\tau,$$

и за счет большого γ

$$\lambda^{\gamma(1-\delta)-h} \leqslant \text{const} \left(\text{при } \frac{h}{1-\delta} \leqslant \gamma < 1 + \frac{h}{1-\delta} \right).$$

Тогда

$$|\lambda^{-h} D^{0,\, q} f_\gamma|_1 \leqslant c \cdot \lambda^{(\gamma+1)\delta} |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1,$$

так как $\hat{f} = f_\gamma \in L_h^{0,\, q}$ выполняется (54), то ($h \equiv M + \delta$)

$$|\lambda^{\beta} D^{\beta} D^{0,\, q} \hat{u}|_\infty \leqslant c\lambda^{M+\delta+|\beta|(\gamma+1)} |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1 \leqslant \text{const}\ \lambda^{2(M+\delta)} |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1.$$

Отсюда при $2(M+\delta) \geqslant \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1}$ (без этого предположения в (57) надо D^{β} ($|\beta| = m$) заменить на $D^{r-1,\, m+1-r}$,

$$|D^{m,\, q} \hat{u}|_\infty = |D^{\beta} D^{0,\, q} u|_\infty \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1. \tag{57}$$

Для получения (17) оценим левую часть (57).

$$|D^{m,\, q} \hat{u}|_\infty \geqslant |D^{m,\, q} u|_\infty - |D^{m,\, q} u_1|_\infty - \cdots - |D^{m,\, q} u_\gamma|_\infty,$$

$$|D^{m,\, q} u_l|_\infty \leqslant c\, |D^{0,\, q+1} f_{l-1}|_1 \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1.$$

Из этих двух неравенств и (57) получаем (17). Неравенство (13) вытекает из (17) (см. [2]).

Доказательство теоремы существования 1. Пусть

$$j_0(\tau) = c \exp\left\{ -\frac{1}{1-\tau^2} \right\},\ j_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1} j_0\left(\frac{\tau - 2\varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

$$f_\varepsilon = f * j_\varepsilon = \int_0^{t_1} f(\tau, x')\, j_\varepsilon(t-\tau)\, d\tau.$$

Так как

$$\operatorname{supp} j_\varepsilon(t-\tau) = \{(t, x'),\ |t - \tau - 2\varepsilon| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

то

$$f_\varepsilon(\tau, x') \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant t < \varepsilon.$$

Задача Коши

$$a u_\varepsilon = f_\varepsilon,\ u_\varepsilon|_{t=\varepsilon} = \cdots = D_1^m u_\varepsilon|_{t=\varepsilon}$$

(a — гиперболический при $\tau \geqslant \varepsilon > 0$) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in H_0^{m+1,\, q-1}$ (см. [2]).

Из (13) имеем

$$|D^{m+1,\, q-1}(u_n - u_m),\ V| \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m}(f_n - f_m),\ V| \tag{13'}$$

(мы обозначили $u_n = u_\varepsilon$; $f_n \in H^{0,\, q+\gamma m}$, $n \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$).

Пользуясь свойствами оператора осреднения (см. [1], стр. 68), мы получим, что правая часть (13′) стремится к нулю при $m > n \to \infty$, откуда следует фундаментальность последовательности u_n в $H_0^{m+1,\, q-1}$.

Предел $u = \lim u_n$ будет решением уравнения

$$au = f \in H^{0,\, q+\gamma m},\quad u \in H_0^{m+1,\, q-1}\ (V).$$

Единственность и устойчивость следуют из (13). Следствие вытекает из теоремы 1 и [7].

Ереванский государственный университет,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.III.1973

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ենթադրվում է, որ խարակտերիստիկ թվերը ձգտում են զրոյի սկզբնական հիպերհարթությանը մոտենալիս։

Ապացուցվում է այդ Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ հավասարման ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշակի պայմանների։

A. B. NERSESIAN, G. R. HOVHANISIAN. *On Cauchy's problem for weakly hyperbolic equations* (summary)

In the paper the Cauchy's problem for weakly hyperbolic equations with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. The degeneration occures as a result of vanishing of some characteristic numbers on the initial hyperplane. The correctness of the Cauchy's problem, under some conditions on the low order terms is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Гординг*. Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
2. *Л. Гординг*. Прямое решение задачи Коши, Сб. пер. „Математика", 2: 1, 1958, 81—95.
3. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Ученые записки ЕГУ, 3 (109), 1968.
4. *А. Б. Нерсесян*. Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения с данными на линии вырождения, Диф. уравнения, 4, № 9, 1968, 16—58.
5. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—802.
6. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 2, 1968, 79—100.

7. *В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, ДАН СССР, 206, № 2, 1972.
8. *R. Courant* and *A. Lax.* Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, Communs. Pure and Appl. Math., 8, 1955, 497—502.
9. *A. Lax.* On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Communs. Pure and Appl. Math., 9, № 2, 1956, 135—169.