В. С. КОРОЛЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

В последнее время появился ряд работ [1, 2, 3], в которых изучаются различные классы функций комплексного переменного, регулярных в единичном круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до окружности. В частности, в этих работах исследуются функции так называемых классов Жеврея, их множества единственности и ряд других свойств.

Однако, насколько нам известно, до настоящего времени не отмечено то обстоятельство, что некоторые классы Жеврея образуют банаховы алгебры функций (с обычным умножением); поэтому изучение этих банаховых алгебр еще не начато, не описаны даже их максимальные идеалы.

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые банаховы пространства функций, бесконечно дифференцируемых на окружности $\Gamma = \{z: z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ и принадлежащих различным классам Жеврея. Параллельно рассматриваются подпространства, состоящие из функций, аналитически продолжимых в круг $U = \{z: z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Мы устанавливаем некоторые критерии, при выполнении которых соответствующие банаховы пространства являются алгебрами относительно обычного умножения, и исследуем структуру максимальных и некоторых других идеалов этих алгебр. Некоторые из рассматриваемых нами банаховых алгебр несепарабельны, поэтому многие стандартные методы исследования максимальных идеалов к ним неприменимы.

§ 1. Алгебры Жеврея на окружности

Определение. $G_{\alpha, R}$ ($\alpha > 0$, $R > 0$) — пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $f(z)$ ($z \in \Gamma$), удовлетворяющих условиям

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_f R^n (n!)^\alpha \quad (z \in \Gamma, n = 0, 1, 2, \dots)$$

с нормой

$$\|f\|_0 = \sup_{n \geq 0} \frac{|f^{(n)}(z)|}{R^n (n!)^\alpha}.$$

Как установлено в работе [4] пространство $G_{\alpha, R}$ несепарабельно. Сепарабельным является его подпространство $G_{\alpha, R}^0$ функций, удовлетворяющих условию

$$\max_z |f^{(n)}(z)| = o[R^n (n!)^\alpha] \quad (n \rightarrow \infty).$$

В случае $\alpha \leq 1$ классы $G_{\alpha, R}$ состоят как легко видеть из функций, аналитически продолжимых в некоторое кольцо $1 - \delta < |z| < 1 + \delta$ ($\delta > 0$).

При $\alpha > 1$ классы $G_{\alpha, R}$ неквазианалитичны в силу теоремы Данжуа—Карлемана—Островского (см., например, [5]). Нижеследующая теорема показывает, что при $\alpha > 2$ классы $G_{\alpha, R}$ замкнуты относительно умножения.

Теорема 1. Пусть, $\alpha > 2$. Пусть, далее, f и $g \in G_{\alpha, R}$. Тогда $f \cdot g \in G_{\alpha, R}$. Если, кроме того, один из множителей f, g принадлежит $G_{\alpha, R}$, то $f \cdot g \in G_{\alpha, R}^0$.

Сначала докажем вспомогательное предложение.

Лемма. При $\beta > 1$

$$\sum_{k=0}^n [k!(n-k)!]^\beta \leq C(n!)^\beta \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где C не зависит от n .

Доказательство леммы. Имеем

$$\sum_{k=0}^n [k!(n-k)!]^\beta \leq (n!)^\beta \left(2 + 2 \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{n}{2} \right) \leq 3(n!)^\beta.$$

Теорема 1 непосредственно следует из формулы Ньютона—Лейбница и доказанной леммы. Из теоремы 1 вытекает, что пространства $G_{\alpha, R}, G_{\alpha, R}^0$ при $\alpha > 2$ являются банаховыми алгебрами относительно обычного умножения. Всюду в дальнейшем предполагается, что $\alpha > 2$.

В силу теоремы Данжуа—Карлемана—Островского $G_{\alpha, R}$ при $\alpha > 2$ — регулярные симметричные алгебры [6]. Структура максимальных идеалов алгебр $G_{\alpha, R}, G_{\alpha, R}^0$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Каждому максимальному идеалу $I \subset G_{\alpha, R}$ соответствует точка $z_0 \in \Gamma$ такая, что $I = \{f: f \in G_{\alpha, R}, f(z_0) = 0\}$, причем пространство максимальных идеалов алгебры $G_{\alpha, R}$ гомеоморфно окрестности Γ_0 . Аналогичное утверждение справедливо для алгебры $G_{\alpha, R}^0$.

Доказательство. Так как алгебра $G_{\alpha, R}^0$ сепарабельна [4] то она имеет две образующие $\{e^{it}, e^{-it}\}$ и структура максимальных идеалов этой алгебры устанавливается с помощью стандартного рассуждения (см., например, [6], стр. 31—32, применительно к алгебре $\mathbb{W}$ абсолютно сходящихся рядов Фурье).

С другой стороны, алгебра $G_{\alpha, R}$, не являясь сепарабельной, имеет несчетное число образующих. Поэтому справедливость теоремы 2 для алгебры $G_{\alpha, R}$ мы будем выводить из следующего предложения.

Лемма 1. Если $f \in G_{\alpha, R}, f(z) \neq 0$ ($z \in \Gamma$), то $f^{-1}(z)$ также принадлежит $G_{\alpha, R}$.

Доказательство. Каждому элементу $f \in G_{\alpha, R}$ и каждой точке $z_0 \in \Gamma$ поставим в соответствие формальный степенной ряд

$$K_{f, z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \text{где } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (2)$$

Рассмотрим алгебру Π формальных степенных рядов (2) с нормой

$$\|K_{f, z_0}\|_{\Pi} = \sup \frac{|c_n|}{R^n (n!)^{\alpha-1}}. \quad (3)$$

Очевидно, соответствие $f \rightarrow K_{f, z_0}$ при каждом фиксированном $z_0 \in \Gamma$ устанавливает гомоморфизм алгебры $G_{\alpha, R}$ на алгебру Π .

Далее

$$\|f\|_{\sigma} = \max_x \|K_{f, z_0}\|_{\Pi}. \quad (4)$$

Лемма 2. Алгебра Π примарна; другими словами единственный максимальный идеал I алгебры Π имеет вид

$$I = \{K_{f, z_0} : K_{f, z_0} \in \Pi, c_0 = 0\}.$$

Пусть $K \in I$, т. е. $c_0 \neq 0$ (см. (2)). Построим формальный обратный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right)^{-1}.$$

Очевидно, достаточно показать, что

$$\left\| \frac{1}{K_{f, z_0}} \right\|_{\Pi} < \infty. \quad (5)$$

Действительно

$$\frac{1}{K_{f, z_0}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right)^{-1} = \frac{1}{c_0} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n \right)^m. \quad (6)$$

Обозначим

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n, \quad K^m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m)} t^n,$$

где

$$c_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_n^{(m-1)} c_{n-k}.$$

Используя (1) и (3), получим

$$\|K^m(t)\|_{\Pi} \leq \gamma^{m-1} \|K(t)\|_{\Pi}^m \left[\frac{(n-m+1)!}{n!} \right]^{\alpha-1} \frac{1}{R^{m-1}} \leq \gamma^{m-1} \frac{\|K(t)\|_{\Pi}^m}{R^{m-1} [(m-1)!]^{\alpha-1}}. \quad (7)$$

Теперь, учитывая оценку (7) и применив признак сходимости Даламбера, легко показать, что ряд (6) сходится и выполняется (5).

Следовательно, формальный обратный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$$

принадлежит алгебре Π . Отсюда следует, что других максимальных идеалов (кроме I) алгебра Π не имеет.

Теперь нетрудно доказать лемму 1. В самом деле, функция $f^{-1}(z)$ бесконечно дифференцируемая на Γ и в каждой точке $z_0 \in \Gamma$ ее формальный ряд Тейлора принадлежит алгебре Π , причем, в силу оценки (5), учитывая, что $\inf |f(z)| > 0$ и используя (4), находим $\|f^{-1}\|_0 < \infty$. Следовательно для функции f , удовлетворяющей условиям леммы 1, в $G_{\alpha, R}$ существует функция $f^{-1}(z) \in G_{\alpha, R}$.

Теорема 2, которая утверждает, что алгебра $G_{\alpha, R}$ не имеет других максимальных идеалов кроме I , следует непосредственно из леммы 1 с помощью обычного рассуждения (см. [6], стр. 19–20).

§ 2. Алгебра Жеврея в круге

Наряду с пространствами $G_{\alpha, R}$ будем рассматривать пространства $A\bar{U}_{\alpha, R}$, состоящие из аналитических функций.

Определение. $f \in AG_{\alpha, R}$, если $f \in G_{\alpha, R}$ и существует функция $\hat{f}(z) (z \in \bar{U})$, голоморфная в $\bar{U}$ и бесконечно дифференцируемая в $\bar{U}$ такая, что

$$\hat{f}(z) = f(z) \quad (z \in \Gamma).$$

Далее, $AG_{\alpha, R}^0 = AG_{\alpha, R} \cap G_{\alpha, R}^0$.

В дальнейшем функции $f \in G_{\alpha, R}$ мы будем считать заданными в круге $\bar{U}$, т. е. будем отождествлять f и $\hat{f}$.

Из работы [3] следует, что при $\alpha < 2$ классы $AG_{\alpha, R}$ квазианалитичны в круге $\bar{U}$, т. е. из того, что

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (z_0 \in \partial U; n = 0, 1, 2, \dots),$$

следует $f(z) \equiv 0$. Поэтому изучение структуры подпространств, инвариантных относительно умножения на z , в этом случае ($\alpha \leq 2$) не представляет интереса. При $\alpha > 2$ пространства $AG_{\alpha, R}$ являются банаховыми алгебрами. Для них справедлива

Теорема 3. Пространство максимальных идеалов алгебры $AG_{\alpha, R}$, а также алгебры $AG_{\alpha, R}^0$, гомеоморфно замкнутому кругу $|z| \leq 1$.

Легко показать, что алгебра $AG_{\alpha, R}^0$ сепарабельна, в то время, как алгебра $AG_{\alpha, R}$ несепарабельна.

§ 3. Примарные идеалы алгебр $AG_{\alpha, R}$, $AG_{\alpha, R}^0$ внутри круга и на окружности

Определение. Пусть $z_0 \in \bar{U}$, $n > 1$. Будем обозначать через $I_{z_0}^{(n)}$ множество всех элементов $f \in AG_{\alpha, R}$ таких, что $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$.

Легко видеть, что $I_{z_0}^{(n)}$ — замкнутое подпространство $AG_{\alpha, R}$ и следовательно примарный идеал алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащий максимальному идеалу $I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)}$.

Следующая теорема показывает, что этими идеалами исчерпываются все примарные идеалы алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащие I_{z_0} .

Теорема 4. Пусть I — некоторый примарный идеал алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащий максимальному идеалу $I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)}$ ($|z_0| < 1$). Пусть n — наименьшая кратность нуля z функций $f \in I$, т. е. $n = \min_{f \in I} \min_m \{m : f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$. Тогда $I = I_{z_0}^{(n)}$.

Доказательство. Пусть $f \in I$, $g(z) = f(z)(z - z_0)^{-n}$ и $M = \{g(z); f \in I\}$. Очевидно множество функций $g(z) \in M$ не имеет общих нулей и $g(z) \in G_{\alpha, R}$. Кроме того, для любой функции $h \in G_{\alpha, R}$, $h \cdot g \in G_{\alpha, R}$, так как $G_{\alpha, R}$ является банаховой алгеброй. Из всего сказанного вытекает, что $M = G_{\alpha, R}$, а $I = G_{\alpha, R} \cdot (z - z_0)^n$.

Аналогичную структуру имеют примарные идеалы алгебры $AG_{\alpha, R}^0$ внутри круга.

Перейдем теперь к описанию примарных идеалов алгебры $AG_{\alpha, R}^0$, принадлежащих максимальному идеалу I_{z_0} , где $z_0 \in \Gamma$.

Очевидно, примарные идеалы

$$I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)} \supset I_{z_0}^{(2)} \supset \dots \supset I_{z_0}^{(n)} \supset \dots$$

и их пересечение

$$I_{z_0}^{(\infty)} = \bigcap I_{z_0}^{(n)} \quad (z_0 \in \Gamma)$$

нетривиальны. Далее имеются нетривиальные примарные идеалы, содержащиеся в $I_{z_0}^{(\infty)}$.

Теорема 5. Множество элементов $f \in G_{\alpha, R}$ таких, что внутренняя функция

$$S_{z_0, \gamma} = \exp \left\{ -\gamma \frac{z_0 + z}{z_0 - z} \right\}$$

($\gamma > 0$ — фиксировано) делит внутреннюю часть функции f , образует примарный идеал

$$I_{z_0, \gamma} \subset I_{z_0}^{(\infty)}.$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что $I_{z_0, \gamma}$ замкнуто, так как каждый предельный элемент f множества $I_{z_0, \gamma}$ имеет внутреннюю часть, которую делит функция $S_{z_0, \gamma}$ (см. [7], стр. 128).

Таким образом, указанные примарные идеалы, образуют упорядоченное множество

$$I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)} \supset I_{z_0}^{(2)} \supset \dots \supset I_{z_0}^{(n)} \supset \dots \supset I_{z_0}^{(\infty)} \supset I_{z_0, \gamma}$$

состоящее из дискретной и непрерывной цепочек.

Вопрос о том, имеются ли другие примарные идеалы, принадлежащие I_{z_0} , остается открытым.

Վ. Ս. ԿՈՐՈԼԵՎԻՉ. Անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների որոշ բանախյան հանրահաշիվների մասին (ամփոփում)

Սահմանվում են մի քանի հայտանիշներ, որոնց բավարարման դեպքում ժևրեի դասերին պատկանող, $\Gamma = \{z : z \in C, |z| = 1\}$ շրջանագծի վրա անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների $J_{\alpha, k}$ ($\alpha > 0, K > 0$) բանախյան տարածությունները դառնում են հանրահաշիվներ սովորական բազմապատկման նկատմամբ: Տրվում է այդ հանրահաշիվների և $U = \{z : z \in C, |z| < 1\}$ շրջանում նրանց անալիտիկ շարունակությունների մաքսիմալ և որոշ պրիմար իդեալների նկարագրությունը:

V. S. KOROLEVITCH. *On some banach algebras of infinitely differentiable functions (summary)*

Some criteria are established under which Banach spaces of $J_{\alpha, k}$ ($\alpha > 0, K > 0$) functions, infinitely differentiable on the circumference $\Gamma = \{z : z \in C, |z| = 1\}$ and belonging to the Zhevrey class turn to be algebras with usual multiplication.

The description of maximal and primary ideals of these algebras as well as of their analytic continuations into the circle $U = \{z : z \in C, |z| < 1\}$ is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. Carleson. Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta Math., 87, №№ 3—4, 1952, 325—345.
2. A. M. Cholet. Ensembles de zéros de fonctions analytiques dans le disque appartenant à une classe de Gevrey sur le bord, C. R. Acad. Sci. Paris, sér A—B 269, 1969, A 447—A 449.
3. Б. И. Коренблум. Квазианалитические классы функций в круге, ДАН СССР, 164, № 1, 1965, 36—39.
4. Б. И. Коренблум. Теорема Вейерштрасса в пространствах бесконечно дифференцируемых функций, ДАН СССР, 150, № 6, 1963, 1214—1217.
5. С. Манделбродт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение, М., ИЛ, 1955.
6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960.
7. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1963.