ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. Д. БЕЛОУСОВ, Ю. М. МОВСИСЯН

О РАНГЕ ОБОБЩЕННЫХ ТОЖДЕСТВ

Введение

В статье вводится понятие ранга обобщенных тождеств и дается полное описание приведенных обобщенных тождеств ассоциативности ненулевого ранга в системах квазигрупп.

Обобщенное тождество отличается от обычных тождеств тем, что в нем помимо фиксированных операций из данной алгебры $Q(\Sigma)$ могут быть и символы операций, которые могут пробегать часть (или все) операции из фиксированной алгебры*. Это понятие введено А. Садом ([1], [2] и др.) и изучено для некоторых специальных тождеств одним из авторов в [3], [4], а также и другими (см. [3]). В настоящей работе понятие ранга, введенного в [3] для сверхтождеств (см. ниже определение), вводится и для обобщенных тождеств.

1°. Пусть $E=\{x_1, x_2, \cdots\}$ — множество свободных элементов, $\Omega=\{X_1, X_2, \cdots\}$ — множество символов бинарных операций. Понятие слова относительно (Ω, E) определяется индуктивно: все элементы из E — слова. Если w_1, w_2 — слова, то и $X_i(w_1, w_2)$, $\forall X_i \in \Omega$ — слова.

Обозначим через S и Φ соответственно совокупности всех свободных элементов и всех символов операций в словах W_1, W_2. Пусть $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, $\Phi_1\cap\Phi_2=\varnothing$, $\Phi_1=\{X_1, X_2,\cdots, X_m\}$, $\Phi_2=\{Y_1, Y_2,\cdots, Y_n\}$.

В алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество

$$W_1=W_2, \tag{1}$$

если для любых значений символов операций $X_1, X_2,\cdots, X_m$ из Σ существуют такие значения символов операций $Y_1, Y_2,\cdots, Y_n$ из Σ, что равенство (1) имеет место при всех значениях свободных элементов S из Q.

Если в $Q(\Sigma)$ имеет место обобщенное тождество (1) и $\Phi_2=\varnothing$, то говорим, что в $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество $w_1=w_2$.

Если $\Phi_1=\varnothing$, то обобщенное тождество (1) сводится к обычному тождеству.

Соответствие $\Phi_1\to\Phi_2$ определяет некоторую функцию $f\colon \Sigma^m\to\Sigma^n$ (Σ^k — k-тая декартовая степень Σ). Чтобы отметить, что обобщенное тождество (1) определяется функцией f, будем писать:

$$W_1=W_2;\ f\colon \Phi_1\to\Phi_2. \tag{2}$$

Функция f называется определяющей, а $f_i\colon (X_1, X_2,\cdots, X_m)\to Y_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ называются проекциями f. Если $f_i\colon (X_1, X_2,\cdots, X_m)\to X_j$, то f_i называется j-тым селектором.

* Здесь предполагаем, что все операции из Σ — бинарные; легко видеть, что понятие обобщенного тождества может быть распространено и на случай, когда в Σ находятся операции различных арностей.

Обобщенное тождество (2) называется приведенным, если никакая проекция определяющей функции f не является селектором.

Два обобщенных тождества называются эквивалентными в алгебре $Q(\Sigma)$, если из выполнения одного из них в $Q(\Sigma)$ вытекает выполнение и второго обобщенного тождества в $Q(\Sigma)$.

Лемма. *Каждое обобщенное тождество эквивалентно некоторому приведенному обобщенному тождеству.*

В самом деле, пусть проекция f_i, $f_i(X_1, X_2, \cdots, X_m) = Y_i$ является j-тым селектором. Тогда, заменяя в (2) Y_i на X_j и переходя к новой определяющей функции f', $f':(X_1, X_2, \cdots, X_m) \to (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \cdots \cdots, Y_n)$, приходим к новому обобщенному тождеству, эквивалентному (2). Продолжая этот процесс, после конечных шагов мы получим обобщенное тождество

$$W_1' = W_2';\ f'': \Phi_1 \to \Phi_2', \tag{3}$$

где никакая проекция определяющей функции f'' не является селектором.

Доказанная лемма дает возможность вместо обобщенных тождеств рассматривать приведенные обобщенные тождества.

Символ $X_i \in \Phi_1$ несущественен для функции f (в алгебре $Q(\Sigma)$), если для любых последовательностей операций $\langle A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_m \rangle \in \Sigma^{m-1}$ имеет место

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \cdots, A_m) = f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \cdots, A_m)$$

для любых $B, C \in \Sigma$.

Несущественные аргументы определяющей функции обобщенного тождества называются свободными операциями. Количество всех свободных операций в приведенном обобщенном тождестве называется **рангом** приведенного обобщенного тождества.

Каждое сверхтождество само является приведенным обобщенным тождеством ненулевого ранга (все символы операций свободны).

Если в обобщенном тождестве (2) все проекции функции f являются селекторами, то приведенное обобщенное тождество (3) в этом случае является сверхтождеством, т. е. такое обобщенное тождество (2) эквивалентно некоторому сверхтождеству.

Пусть $\rho = r$ — ранг, а $f: \Sigma^m \to \Sigma^n$ — определяющая функция приведенного обобщенного тождества (2). Функция f индуцирует новое отображение $g: \Sigma^{m-r} \to \Sigma^n$, которое уже не содержит никакого несущественного аргумента. И наоборот, если задано индуцированное отображение g определяющей функции и ранг приведенного обобщенного тождества, то однозначным образом можно восстановить определяющую функцию приведенного обобщенного тождества. Поэтому приведенное обобщенное тождество (2) можно задавать при помощи индуцированного отображения g (указав ранг ρ):

$$W_1 = W_2;\; g\colon \Phi_1' \to \Phi_2. \tag{4}$$

Если индуцированное отображение является фиксацией, т. е. g: $\varnothing \to \Sigma^n$, то отображение g отдельно не будем указывать (достаточно символы операций из Φ_2 заменить в равенстве (4) соответствующими фиксированными значениями). Например, в алгебре $Q(\Sigma)$ следующее равенство:

$$X_1\{A[x, X_2(y, z)],\; u\} = B[X_3(x, y),\; C(z, u)]$$

рассматривается как приведенное обобщенное тождество ранга $\rho = 3$ (X_1, X_2, X_3 — свободные операции) с индуцированным отображением g: $\varnothing \to \Sigma^3$.

Следующий пример показывает существование приведенного обобщенного тождества ненулевого ранга, не являющегося сверхтождеством.

Пример. Пусть $Q(0)$ — группа, $1 \neq z_1 \in Z$ — центр группы $Q(0)$, $\Sigma = \{A_k \mid A_k(x, y) = x \circ k \circ y;\; k \in Q\}$. Тогда в $Q(\Sigma)$ имеет место приведенное обобщенное тождество ранга $\rho = 1$:

$$X\{P'[x, P(y, z)], u\} = P'[P(x, y), X(z, u)];\; g\colon P \to P', \tag{5}$$

где $g(A_k)(x, y) = x \circ k \circ z_1 y$.

Из $k' = k \circ z_1$ вытекает $k' \circ y \circ k = k \circ y \circ k'$. Откуда $x \circ k' \circ y \circ k \circ z =$ $= x \circ k \circ y \circ k' \circ z$, или $(x \circ k' \circ (y \circ k \circ z))\; o r o u = (x \circ k \circ y)\; o k' o\; (z o r o u)$, т. е.

$$A_r\{A_{k'}[x, A_k(y, z)], u\} = A_{k'}\, A[A_k(x, y),\; A_r(z, u)]$$

что означает выполнимость приведенного обобщенного тождества (5) в указанной алгебре $Q(\Sigma)$.

2°. Пусть Σ° — совокупность всех бинарных квазигрупп, определенных на множестве Q и $\Sigma \subseteq \Sigma^\circ$.

Рассмотрим вопрос о выполнимости обобщенного тождества (2) в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Определение. Определяющая функция f называется особой, если

а) существует такой символ операции $X_l \in \Phi_1$, который в равенстве (2) встречается всего один раз,

б) существуют $B, C \in \Sigma$, $B \neq C$ такие, что для некоторого $\langle A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, A_{l+1}, \cdots, A_m \rangle \in \Sigma^{m-1}$,

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, B, A_{l+1}, \cdots, A_m) = f(A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, C, A_{l+1}, \cdots, A_m),$$

в) в подслове $X_l(\omega_1, \omega_2) = W$ существуют два различных свободных элемента x, y, содержащихся соответственно в ω_1 и в ω_2 так, что каждый из них встречается лишь один раз в W.

Теорема 1. *В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не может выполняться никакое обобщенное тождество с особой определяющей функцией.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (2) с особой определяющей функцией f. Тогда, придавая один раз X_j $(j=1, 2,\cdots, i-1, i+1,\cdots, m)$ значение A_j, X_i — значение B, а другой раз X_j $(j=1, 2,\cdots, i-1, i+1,\cdots, m)$ значение A_j, X_i — значение C, символ операций Y_k $(k=1, 2,\cdots, n)$ в обоих случаях получает одно и то же значение D_k, так как

$$(D_1, D_2,\cdots, D_n) = f(A_1, A_2,\cdots, A_{i-1}, B, A_{i+1},\cdots, A_m) = \\ = f(A_1, A_2,\cdots, A_{i-1}, C, A_{i+1},\cdots, A_m).$$

Получаем два равенства:

$$W_1' = W_2', \quad W_1'' = W_2''.$$

Пусть для определенности $X_i \in W_1$, следовательно $B \in W_1'$, $C \in W_1''$ и $W_2' = W_2''$ (поскольку операции из W_2' и W_2'', стоящие на одинаковых местах, совпадают), поэтому $W_1' = W_1''$. В W_1' и W_1'' все операции совпадают, кроме B и C. Так как все эти операции—квазигрупповые, то проделав все сокращения, получаем равенство: $B(\omega_1, \omega_2) = C(\omega_1, \omega_2)$, где ω_1 и ω_2 — некоторые подслова. Выберем два неповторяющихся в W различных свободных элемента $x \in \omega_1$ и $y \in \omega_2$ (ввиду определения особой определяющей функции), а остальные заставим принимать фиксированные значения из Q. Тогда ω_1 превращается в λx, а ω_2 — в μy, где λ и μ — подстановки множества Q, поскольку они являются произведениями трансляций для квазигрупповых операций. Таким образом, имеем $B(\lambda x, \mu y) = C(\lambda x, \mu y)$. Отсюда, учитывая, что λ и μ — подстановки, получаем $B(x, y) = C(x, y)$, т. е. $B = C$, что противоречит выбору B и C.

Определение. Свободная операция X называется одинокой в (2), если

а) X в равенстве (2) встречается только один раз,

б) в подслове $X(\omega_1, \omega_2) = W$ существуют два различных свободных элемента x, y, содержащихся соответственно в ω_1 и в ω_2 так, что каждый из них встречается лишь один раз в W.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не может выполняться никакое обобщенное тождество с одинокой свободной операцией.

Отсюда немедленно вытекает

Теорема 2. *Приведенными обобщенными тождествами ассоциативности ранга $\rho = 2$ в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ являются сверхтождества*

$$X[X(x, y), z] = Y[x, Y(y, z)], \tag{6}$$

$$X[Y(x, y), z] = X[x, Y(y, z)], \tag{7}$$

$$X[Y(x, y), z] = Y[x, X(y, z)], \tag{8}$$

и только они.

Теорема 3. *Приведенными обобщенными тождествами ассоциативности ранга $\rho=1$ в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ являются:*

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{9}$$

$$X[x, X(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{10}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{11}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[X(x, y) z], \tag{12}$$

$$A[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{13}$$

$$A[x, X(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{14}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{15}$$

$$X[x, A(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{16}$$

$$A[x, X(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{17}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[A(x, y), z], \tag{18}$$

$$A[x, A(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{19}$$

и только они; A — фиксированная операция из Σ.

Доказательство. По следствию теоремы 1, каждая свободная операция в приведенном обобщенном тождестве ассоциативности должна появиться хотя бы два раза. Обобщенное тождество (9) ранга $\rho=1$ соответствует сверхтождеству ассоциативности. Тождества (10) — (13) — приведенные обобщенные тождества ранга $\rho=1$, определяющая функция которых индуцирует фиксацию $\varnothing \to \Sigma$. Тождества (14) — (19) — приведенные обобщенные тождества ранга $\rho=1$, определяющая функция которых индуцирует фиксацию $\varnothing \to \Sigma^2$ вида $\langle A, A\rangle$. Остается показать, что в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не могут выполняться следующие приведенные обобщенные тождества ассоциативности ранга $\rho=1$ с индуцированным отображением $g\colon \Sigma \to \Sigma$:

$$X[P(x, y), z] = P'[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{20}$$

$$P[X(x, y), z] = P'[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{21}$$

$$X[P(x, y), z] = X[x, P'(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{22}$$

$$P[X(x, y), z] = X[x, P'(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{23}$$

$$X[X(x, y), z] = P[x, P'(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{24}$$

$$P[P'(x, y), z] = X[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{25}$$

$$X[P'(x, y), z] = P[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{20'}$$

$$P'[X(x, y), z] = P[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{21'}$$

$$X[P'(x, y), z] = X[x, P(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{22'}$$

$$P'[X(x, y), z] = X(x, P(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{23'}$$

$$X[X(x, y), z] = P'[x, P(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{24'}$$

$$P'[P(x, y), z] = X[x, X(y, z)]; \quad g\colon P \to P', \tag{25'}$$

а также следующие приведенные обобщенные тождества, индуцированное отображение которых является фиксация $\varnothing \to \Sigma^2$ вида $<A, B>$; $A \neq B$:

$$A[x, X(y, z)] = X[B(x, y), z], \tag{26}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[B(x, y), z], \tag{27}$$

$$X[x, A(y, z)] = B[X(x, y), z], \tag{28}$$

$$A[x, B(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{29}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[B(x, y), z], \tag{30}$$

$$A[x, X(y, z)] = B[X(x, y), z]. \tag{31}$$

Для тождеств (26)—(30) это утверждение доказывается одинаково. Приведем доказательство для одного из них.

Пусть в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ имеет место обобщенное тождество (26). Тогда при $X = A$ получим: $A[x, A(y, z)] = A[B(x, y), z]$. По постулату Сушкевича [5] B является группой, поэтому

$$B[x, B(y, z)] = B[B(x, y), z].$$

Однако, из (26) при $X = B$ получаем $A[x, B(y, z)] = B[B(x, y), z]$. Следовательно, $A = B$, что противоречит выбору A, B, т. е. (26) не может выполняться в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Методом квазиавтоморфизмов* (см. [4]) доказывается, что приведенные обобщенные тождества (20)—(25), (20′)—(25′) и (31) не могут выполняться ни в какой системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Следующее утверждение очевидно: для того чтобы в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество (9), необходимо и достаточно, чтобы $Q(\Sigma)$ была системой групп.

Предложение 1. Для того чтобы в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполнялось обобщенное тождество (10) необходимо и достаточно, чтобы $A = (\cdot)$ была группой и для $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i(x \cdot \alpha_i^{-1} y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Необходимость. По постулату Сушкевича [5], квазигруппа $A = (\cdot)$ должна быть группой. Имеем, при $X = A_i$: $A_i[x, A_i(y, z)] = A_i[x \cdot y, z]$. Пусть $z = a$, тогда $A_i(x, R_i y) = R_i(x \cdot y)$ или $A_i(x, y) = R_i(x \cdot R_i^{-1} y)$, где R_i — правая трансляция квазигруппы A_i.

Достаточность проверяется простой проверкой.

Точно так же доказываются следующие предложения:

Предложение 2. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (12) тогда и только тогда, когда $A = (\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i(\alpha_i^{-1} x \cdot y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

---

* Подстановка α множества Q называется квазиавтоморфизмом, группы $Q(\cdot)$, если $\alpha(x \cdot y) = \alpha x \cdot (\alpha 1)^{-1} \cdot \alpha y$ (1 — единица группы $Q(\cdot)$).

Предложение 3. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (14) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = x \cdot \alpha_i y$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Предложение 4. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (15) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i (x \cdot y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Предложение 5. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (16) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i x \cdot y$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Следующие утверждения доказываются методом квазиавтоморфизмов (см. [4]).

Предложение 6. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (11) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot \psi_i y$, $\psi_i t_i = t$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где ψ_i — автоморфизм второго порядка группы $Q(\cdot)$.

Предложение 7. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (13) в том в только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = \varphi_i x \cdot t_i \cdot y$, $\varphi_i t_i = t$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где φ_i — автоморфизм второго порядка группы $Q(\cdot)$.

Предложение 8. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (17) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, $t_i = t \cdot z_i$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где z_i — элементы из центра группы $Q(\cdot)$.

Предложение 9. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (18) (или (19)) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, $t_i = t \cdot z_i$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где z_i — элементы второго порядка из центра группы $Q(\cdot)$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22.I.1973.

Վ. Դ. ԲԵԼՈՈՒՍՈՎ, ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Ընդհանրացված նույնությունների ռանգի մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ներմուծվում է ընդհանրացված նույնությունների ռանգի գաղափարը և տրվում է դրական ռանգի բերված ասսոցիատիվ ընդհանրացված նույնությունների լրիվ նկարագիրը քվազիխմբերի սիստեմներում։

V. D. BELOUSOV, Yu. M. MOVSISIAN. *On the rank of generalised identities* (summary)

In the present paper the notion of the rank of generalised identity is introduced and the full description of reduced generalised identities of positive for the systems of quasigroups is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Sade.* Theorie des systemes demosiens de groupoides, Pacif. Journ, Math., 10, n2, 1960, 625—660.
2. *A. Sade.* Quasigroupes obeissant a certains lois, Rev. Fac. Sci, Univ. Istambul, 22, 1957, 151—184.
3. *В. Д. Белоусов.* Системы квазигрупп с обобщенными тождествами, УМН, XX, вып. 1 (121), 1965, 75—146.
4. *В. Д. Белоусов.* Ассоциативные в целом системы квазигрупп, Мат. сб., 55 (97): 2, 1961, 221—236.
5. *А. К. Сушкевич.* Теория обобщенных групп, Киев, 1937.