ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. Х. МУСОЯН

О СИСТЕМАХ ДИРИХЛЕ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел (среди которых могут быть и числа конечной кратности), удовлетворяющих условиям

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots,$$

$$|\arg \lambda_k| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k| < \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим систему Дирихле

$$\{x^m e^{-\lambda_k x}\},\ k = 1, 2, \cdots;\ m = 0, 1, \cdots, m_k - 1, \tag{2}$$

где m_k — кратность числа λ_k. Конечные линейные комбинации функций системы (2) будем называть полиномами Дирихле.

Л. Шварц в работе [1] изучал систему (2) в пространствах $L^p(A, B)$ $(1 \leqslant p < \infty,\ -\infty < A < B \leqslant \infty)$, в случае, когда все числа λ_k действительные и простые (не кратные). Шварц установил следующий результат (на самом деле он доказывает более общую теорему, из которой этот результат получается как частный случай):

Если функция $F(x)$ принадлежит замкнутой линейной оболочке системы (2), то

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на (A, B) с функцией $F(x)$.

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле, который, после некоторой группировки членов, нормально сходится к функции $F(z)$ в полуплоскости $x > A$.

3°.

$$|F(z)| \leqslant C(x, y)\, \|F\|_{L^p(A, B)},$$

где $C(x, y)$ зависит от последовательности $\{\lambda_k\}$ и от точки (x, y), и $C(x, y)$ остается ограниченной, когда $x \geqslant A + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

М. М. Джрбашян [2] охарактеризовал замкнутую линейную оболочку системы (2) в случае, когда $p = 2$; $(A, B) = (0, \infty)$. М. М. Джрбашян установил, в частности, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается во внутренность угла $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ (см. (1)).

Автор в работе [3], обобщив результаты Л. Шварца и М. М. Джрбашяна, доказал следующую теорему:

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) сходится по норме пространства $L(A, B)$, то она сходится равномерно в угле $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Позднее Люксембург и Коревер [4] другими методами установили, что в случае простых λ_k система (2) не полна в пространстве $L^p(A, B)$.

Оказывается, что если на плотность последовательности $\{\lambda_k\}$ наложить более ограничительные условия, чем сходимость ряда $\Sigma 1/|\lambda_k|$, то приведенные результаты можно распространить на более широкий класс множеств, чем интервал (A, B). Этому вопросу посвящена статья автора [5], в которой показано, что если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E, т. е. $m\{CE \cap \cap (A, A+h)\} = o(h^{1+\varepsilon})$, при $h \to 0+$, где $\varepsilon > 0$, и система (2) лакунарная (числа λ_k действительные и $\lambda_{k+1}/\lambda_k > q > 1$), то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^2(E)$-норме конечными линейными комбинациями функций системы (2), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на E с функцией $F(x)$.

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x > A + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению поставленного вопроса. Чтобы сформулировать основные результаты, введем следующие обозначения.

Пусть $E \subset [A, \infty)$ — произвольное измеримое множество положительной меры, где $-\infty < A < \infty$ — любое. Обозначим

$$\sigma(x) = m\{CE \cap (A, A+x)\}, \quad x > 0, \tag{3}$$

где CE — дополнение множества E до множества действительных чисел

$$g(x) = \int_0^\infty r^{1+\varepsilon} \frac{e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} dr, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad \varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4}$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$,

$$B(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda/\lambda_k}{1 + \lambda/\bar{\lambda}_k}, \tag{5}$$

функция $g(x)$ непрерывна в промежутке $(0, \infty)$ и стремится к ∞, когда $x \to 0$.

Теорема I. *Пусть для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int_0^1 \sigma(x)\, g(x)\, dx < \infty. \tag{6}$$

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) *сходится по норме пространства* $L(E)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, *где* $\delta > 0$ — *любое.*

Далее, обозначим через $n(r)$ число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих по модулю r. Введем функцию

$$h(r) = \frac{2}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)} \left[n(4r) + r \sum_{r_k > r} 1/r_k \right],$$

где $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ зафиксировано, $r_k = |\lambda_k|$.

Так как из условий (1) следует, что $\frac{n(r)}{r} \to 0$, при $r \to \infty$, то функция $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{h(r)}{r} = 0.$$

Теорема II. *Пусть для некоторых* $\varepsilon > 0$ и φ, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int_0^1 \sigma(x) \left\{ \int_0^{\infty} r^{1+\varepsilon} e^{\cos\varphi\, [h(r) - xr]}\, dr \right\} dx.$$

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) *сходится по норме* $L(E)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, *где* $\delta > 0$ — *любое.*

Теорема III. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию лакунарности*

$$\frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} > q > 1,$$

и пусть точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E

$$\sigma(x) = o\,(x^{1+\varepsilon_1}), \tag{7}$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$.

Тогда, если последовательность конечных линейных комбинаций системы (2) *сходится по норме $L(E)$, то она сходится равномерно в угле $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$.*

§ 1. Вспомогательная функция

Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (1). Обозначим

$$b(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{(1+\lambda)^{1+\gamma}},\ \gamma > 0, \tag{1.1}$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$ (см. (5)). В (1.1) мы в разрезанной по лучу $\arg z = \pi$ плоскости рассматриваем ту ветвь функции $z^{1+\gamma}$, которая принимает положительные значения на полуоси $\arg z = 0$.

Так как функция $b(\lambda)$ принадлежит классу H^2 в правой полуплоскости, то ее можно представить в виде

$$b(\lambda) = \int_0^\infty \psi(t)\, e^{-\lambda t}\, dt, \tag{1.2}$$

где функция $\psi(t)$ определяется соотношением

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} b(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda.$$

Следовательно, функция $\psi(t)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию из $L^2(0, \infty)$. Докажем, что функция $\psi(t)$ принадлежит также пространству $L(0, \infty)$. Действительно, интегрированием по частям получим

$$\psi(t) = -\frac{1}{2\pi i t} \int_{-i\infty}^{i\infty} b'(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda \equiv -\frac{1}{t}\,\varphi(t). \tag{1.3}$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\varphi(t) \in L^2(0, \infty)$. Для этого заметим, что

$$\frac{b'(\lambda)}{b(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + \bar{\lambda}_k}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \bar{\lambda}_k)} - \frac{1+\gamma}{1+\lambda}.$$

Отсюда получаем следующую оценку:

$$\left|\frac{b'(i\beta)}{b(i\beta)}\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{|i\beta - \lambda_k|^2} + 1 + \gamma \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} + 1 + \gamma, \tag{1.4}$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, а β — любое действительное число. Так как из условий (1) следует, что ряд $\Sigma\, 1/\alpha_k$ сходится, то из (1.4) следует, что $b'(i\beta) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty)$, а это означает, что $\varphi(t) \in L^2(0, \infty)$. Что и требовалось доказать.

Далее, через $\omega(\lambda, f)$ обозначим следующую функцию:

$$\omega(\lambda, f) = -\int_0^{\infty} \psi(t) \left[\int_0^t f(t-\eta)\, e^{-\lambda\eta}\, d\eta\right] dt, \tag{1.5}$$

где $f(x) \in L(0, \infty)$. Функция $\omega(\lambda, f)$ является аналогом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева (см. [6]).

Функция $\omega(\lambda, f)$ регулярна в правой полуплоскости и для нее имеет место оценка

$$|\omega(\lambda, f)| \leqslant \|\psi\|_{L(0,\infty)} \cdot \|f\|_{L(0,\infty)} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *При* $\lambda = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ *имеет место оценка*

$$|\omega(\lambda, f)| < \frac{1}{r\cos\varphi} \|f\|_{L(0,\infty)} \cdot \max_{0<t<\infty} |\psi(t)|. \tag{1.7}$$

Для доказательства введем функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in [0, \infty) \\ 0, & \text{при } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Имеем

$$|\omega(\lambda, f)| \leqslant \int_0^{\infty} |\psi(t)| \left[\int_0^{\infty} |f^*(t-\eta)|\, e^{-\eta r\cos\varphi}\, d\eta\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \max|\psi(t)| \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} |f^*(t-\eta)|\, e^{-\eta r\cos\varphi}\, d\eta =$$

$$= \max|\psi(t)| \int_0^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} |f^*(t-\eta)|\, e^{-\eta r\cos\varphi}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r\cos\varphi} \|f\|_{L(0,\infty)} \cdot \max|\psi(t)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x) = x^p e^{-\lambda_k x}$, *где* p — *целое неотрицательное число, меньшее кратности* λ_k. *Вычет функции*

$$\frac{\omega(\lambda, \varphi)}{b(\lambda)} e^{-\lambda z}, \ z = x + iy,$$

как функции переменного λ, *равен нулю во всех нулях функции* $b(\lambda)$, *отличных от* λ_k, *и равен* $z^p e^{-\lambda_k z}$ *в точке* $\lambda = \lambda_k$.

Мы имеем

$$\omega(\lambda, \varphi) = -\int_0^\infty \varphi(t) \left[\int_0^t (t-\eta)^p \, e^{-\lambda_k (t-\eta)} e^{-\lambda\eta} d\eta \right] dt =$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\gamma^p} \left\{ -\int_0^\infty \varphi(t) \left[\int_0^t e^{-\gamma(t-\eta)} e^{-\lambda\eta} d\eta \right] dt \right\}, \ \gamma = \lambda_k.$$

Но

$$-\int_0^t e^{-\gamma(t-\eta)} \cdot e^{-\lambda\eta} d\eta = \frac{e^{-t\lambda} - e^{-t\gamma}}{\lambda - \gamma},$$

следовательно, согласно (1.2), имеем

$$\omega(\lambda, \varphi) = (-1)^p \frac{d^p}{d\gamma^p} \frac{b(\lambda) - b(\gamma)}{\lambda - \gamma} \Bigg|_{\gamma = \lambda_k} = (-1)^p \frac{p! \, b(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}},$$

откуда

$$\frac{\omega(\lambda, \varphi)}{b(\lambda)} e^{-\lambda z} = (-1)^p \frac{p!}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}} \cdot e^{-\lambda z}.$$

Утверждение леммы следует из этого равенства.

§ 2. Интегральное представление полиномов Дирихле

Известно (см. [7], стр. 115), что почти для всех φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ существует предел

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \ln |B(re^{i\varphi})| = 0, \ \lambda = re^{i\varphi}, \tag{2.1}$$

причем для любого α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ имеется последовательность положительных чисел $r_k \uparrow \infty$ такая, что условие (2.1) для этой последовательности выполняется равномерно относительно φ из интервала $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Пусть $P(x)$ — конечная линейная комбинация функций из системы (2) (полином Дирихле), т. е.

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} Q_k(x)\, e^{-\lambda_k x}, \tag{2.2}$$

где $Q_k(x)$ — алгебраический полином степени не выше m_k-1. Обозначим через L_m контур, идущий из точки $r_m e^{i\varphi_1}$ (r_m участвует в описании свойства (2.1)), $\varphi_0<\varphi_1<\frac{\pi}{2}$, по лучу $\arg\lambda=\varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{i\varphi_1}$, затем по окружности $|\lambda|=\frac{|\lambda_1|}{2}$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{-i\varphi_1}$, затем по лучу $\arg\lambda=-\varphi_1$ до точки $r_m e^{-i\varphi_1}$ и, наконец, по окружности $|\lambda|=r_m$ до точки $r_m e^{i\varphi_1}$.

Согласно лемме 2 и обозначению (2.2), при $r_m>|\lambda_n|$ имеет место следующее интегральное представление:

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k_m}}\frac{\omega(\lambda,P)}{b(\lambda)}\,e^{-\lambda z}\,d\lambda. \tag{2.3}$$

Число φ_1 выберем так, чтобы на лучах $\arg\lambda=\pm\varphi_1$ выполнялось условие (2.1), и в представлении (2.3) m устремим в бесконечность. Согласно оценке (1.6), при $|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ в пределе получим

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(\lambda,P)}{b(\lambda)}\,e^{-\lambda z}\,d\lambda,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1, \tag{2.4}$$

где L — контур, идущий из ∞ по лучу $\arg\lambda=\varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{i\varphi_1}$, затем по окружности $|\lambda|=\frac{|\lambda_1|}{2}$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{-i\varphi_1}$ и, наконец, по лучу $\arg\lambda=-\varphi_1$, до ∞.

Лемма 3. *Для полиномов Дирихле по системе* (2) *имеет место следующая оценка*:

$$|P(z)|\leqslant M(\varepsilon)\,\|P\|_{L(A,\infty)}\cdot e^{-\delta|z|},\quad |\arg(z-A-\varepsilon)|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0-\varepsilon, \tag{2.5}$$

где $M(\varepsilon)$ *и* $\delta>0$ — *некоторые постоянные, зависящие от* ε, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}-\varphi_0$, *от последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и от числа* A ($-\infty<A<\infty$) — *произвольное*).

Доказательство. Согласно оценке (1.6) и представлению (2.4) получаем

$$|P(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|\psi\|_{L(0,\infty)}\cdot\|P\|_{L(0,\infty)}\cdot\int\limits_{L}\left|\frac{e^{-\lambda z}}{b(\lambda)}\right||d\lambda|,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1.$$

В силу свойства (2.1), при любом $\varepsilon_1>0$ имеем

$$|b(\lambda)| > m e^{-\varepsilon_1 |\lambda|}, \quad \lambda \in L,$$

где m — некоторая постоянная, зависящая от ε_1. Следовательно

$$|P(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| \int\limits_L e^{-|\lambda| [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} |d\lambda|, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_1,$$

где $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, $z = |z| e^{i\theta}$. Контур L разобьем на три части: L', L'' и L''', где L' — луч, идущий из ∞ по лучу $\arg \lambda = \varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2} e^{i\varphi_1}$, L'' — дуга окружности $|\lambda| = \frac{|\lambda_1|}{2}$, лежащая между лучами $\arg \lambda = \varphi_1$ и $\arg \lambda = -\varphi_1$, и L''' — луч, идущий из точки $\frac{|\lambda_1|}{2} e^{-i\varphi_1}$ по лучу $\arg \lambda = -\varphi_1$ до ∞. Имеем

$$|P(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| \left\{ \int\limits_{L'} e^{-|\lambda| [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} |d\lambda| + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{L''} \cdots + \int\limits_{L'''} \cdots \right\} \equiv \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| (J_1 + J_2 + J_3).$$

Пусть z лежит в области $|\arg(z - \varepsilon)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ — любое. Числа φ_1 и ε_1 выберем так, чтобы выполнялись условия: $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \varphi_0$, на лучах $\arg \lambda = \pm \varphi_1$ выполняется условие (2.1) и $\delta_1 \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$. Тогда получим

$$J_1 = \int\limits_{|\lambda_1|/2}^{\infty} e^{-r [|z| \cos(\varphi_1+\theta) - \varepsilon_1]} dr < \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 |z|} < \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 \varepsilon}.$$

Аналогично

$$J_3 \leqslant \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 \varepsilon}$$

и, наконец

$$J_2 = \frac{|\lambda_1|}{2} \int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1} e^{-|\lambda| [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} d\varphi < \varphi_1 |\lambda_1| \, e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$|P(z)| \leqslant M(\varepsilon) \|P\|_{L(0,\infty)} \cdot e^{-\delta |z|}, \quad |\arg(z - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon,$$

где $M(\varepsilon)$ и $\delta > 0$ зависят от ε. Путем замены переменного получаем и оценку (2.5).

Из этой леммы следует

Теорема 1. *Если последовательность полиномов Дирихле по системе* (2) *сходится по норме* $L(A, \infty)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$.

§ 3. Доказательство теоремы I

Не нарушая общности, можем ограничиться случаем $A = 0$. Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 4. *Если для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл* (6), *то полиномы семейства*

$$\{P : \|P\|_{L(0, \infty)} \leqslant 1\} \tag{3.1}$$

имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве $(0, 1) \cap CE$.

Для доказательства леммы рассмотрим интегральное представление (2.4). В следующем параграфе мы докажем, что если числа $\{\lambda_k\}$ удовлетворяют условиям (1), то соотношение (2.1) выполняется для всех φ, $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, в представлении (2.4) в качестве угла φ_1 контура L мы можем взять тот угол φ, для которого сходится интеграл (6). Имеем

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\lambda, P)}{b(\lambda)} e^{-\lambda x}\, d\lambda,$$

где $x > 0$ — любое. Отсюда, согласно лемме 1, получаем следующую оценку:

$$|P(x)| < \frac{1}{2\pi} \max|\psi| \cdot \|P\|_{L(0, \infty)} \int_L \frac{e^{-xr\cos\varphi}}{r\cos\varphi\,|b(\lambda)|} |d\lambda|. \tag{3.2}$$

Положим $\gamma = \varepsilon$ (γ участвует в определении функции $b(\lambda)$). Учитывая условие (3.1) и форму контура L, из (3.2) имеем

$$|P(x)| \leqslant M_1 + M_2 \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(re^{i\varphi})|}\, dr + M_2 \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(re^{-i\varphi})|}\, dr, \tag{3.3}$$

где M_1 и M_2 от P не зависят. Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно показать, что функции

$$\int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|}\, dr, \quad \lambda = re^{i\varphi} \quad \text{и} \quad \lambda = re^{-i\varphi}, \tag{3.4}$$

как функции от x, суммируемы на множестве $(0, 1)\cap CE$. Для этого заметим, что

$$\sigma(x) = \int_0^x \chi_{CE}(x)\, dx,$$

где χ_{CE} — характеристическая функция множества CE. Согласно теореме Фубини, имеем

$$\int_{(0,1)\cap CE} \left\{\int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} dr\right\} dx = \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon}{|B(\lambda)|}\left\{\int_0 e^{-xr\cos\varphi}\, d\sigma(x)\right\} dr =$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon}{|B(\lambda)|}\left\{\sigma(1)\, e^{-r\cos\varphi} + r\cos\varphi \int_0^1 e^{-xr\cos\varphi}\, \sigma(x)\, dx\right\} dr =$$

$$= \sigma(1) \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-r\cos\varphi}}{|B(\lambda)|}\, dr + \cos\varphi \int_0^\infty \frac{r^{1+\varepsilon}}{|B(\lambda)|}\left\{\int_0^1 e^{-xr\cos\varphi}\, \sigma(x)\, dx\right\} dr.$$

Последний интеграл сходится, так как в силу теоремы Фубини, он равен интегралу (6), а интеграл (6) сходится по условию леммы. Тем самым доказана суммируемость функций (3.4), что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Если для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл* (6), *то в пространстве полиномов Дирихле по системе* (2) *нормы* $\|P\|_{L(0,\infty)}$ *и* $\|P\|_{L(E)}$ *эквивалентны.*

Нам необходимо доказать, что существует постоянная C, зависящая от последовательности $\{\lambda_k\}$ и от множеств E такая, что

$$\|P\|_{L(0,\infty)} \leqslant C\, \|P\|_{L(E)}\,. \tag{3.5}$$

Доказательство проведем, предположив противное, что существует последовательность $\{P_n(x)\}$ такая, что $\|P_n\|_{L(0,\infty)} = 1$, но $\|P_n\|_{L(E)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Согласно лемме 3, имеем

$$|P_n(z)| \leqslant M(\varepsilon_1)\, e^{-\delta|z|}, \quad |\arg(z - \varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1. \tag{3.6}$$

Следовательно, семейство $\{P_n(z)\}$ нормально в угле $|\arg(z-\varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1$. Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что уже эта последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах угла $|\arg(z-\varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1$.

Если ε_1 достаточно мало, то $m\{E\cap(\varepsilon_1, \infty)\} > 0$, и так как $\|P_n\|_{L(E)} \to 0$, то последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится к нулю в угле

$|\arg(z-\varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1$. Согласно оценке (3.6), отсюда следует, что последовательность $\{P_n(z)\}$ и по $L(\varepsilon_1, \infty)$-норме будет сходиться к нулю. Таким образом, имеем $\|P_n\|_{L(\varepsilon_1, \infty)} \to 0$, но $\|P_n\|_{L(0, \infty)} = 1$, отсюда следует, что

$$\|P_n\|_{L(0, \varepsilon_1)} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{3.7}$$

для любого $\varepsilon_1 > 0$.

С другой стороны, имеем

$$\|P_n\|_{L(0, \varepsilon_1)} = \|P_n\|_{L((0, \varepsilon_1) \cap E)} + \|P_n\|_{L((0, \varepsilon_1) \cap CE)}.$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю, когда $n \to \infty$, а второе слагаемое, согласно лемме 4, можно сделать меньше $\frac{1}{2}$. Это противоречит соотношению (3.7). Лемма доказана.

Комбинируя лемму 5 с теоремой 1 получаем теорему I.

§ 4. О росте произведения Бляшке

Для дальнейшего нам необходимо знать более точно, чем (2.1), поведение произведения Бляшке вдоль лучей, выходящих из начала координат. Докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Положим $\lambda = re^{i\varphi}$, $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$. При $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ имеет место оценка*

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \frac{2\cos\varphi}{1-\cos(|\varphi|-\varphi_0)}\left[n(4r) + r\sum_{r_k > r} 1/r_k\right],$$

где $n(t)$ — число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих по модулю t.

Доказательство. Имеем

$$\ln|1/B(\lambda)| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|\frac{re^{i\varphi} + r_k e^{-i\varphi_k}}{re^{i\varphi} - r_k e^{i\varphi_k}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{r^2 + 2r r_k\cos(\varphi+\varphi_k) + r_k^2}{r^2 - 2r r_k\cos(\varphi-\varphi_k) + r_k^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2r r_k\cos(\varphi+\varphi_k) + 2r r_k\cos(\varphi-\varphi_k)}{r^2 - 2r r_k\cos(\varphi-\varphi_k) + r_k^2}\right).$$

Так как $\ln(1+x) \leqslant x$, то отсюда получаем

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4r r_k\cos\varphi\cos\varphi_k}{r^2 - 2r r_k\cos(\varphi-\varphi_k) + r_k^2} \leqslant$$

$$\leqslant \cos\varphi\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r r_k}{r^2 - 2r r_k\cos(|\varphi|-\varphi_0) + r_k^2}. \tag{4.1}$$

Обозначим $\cos(|\varphi| - \varphi_0) = \alpha$, $\psi_\pm = (1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 1}$. Если $r_k \overline{\in} (r\psi_-, r\psi_+)$, то

$$r_k^2 - 2r\,r_k\,\alpha + r^2 > 2r\,r_k. \tag{4.2}$$

Учитывая (4.1) и (4.2), получим

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \cos\varphi \sum_{r_k < r\psi_-} \frac{2r\,r_k + 2r\,r_k\,\alpha}{r_k^2 + r^2} +$$

$$+ 2\cos\varphi \sum_{r\psi_- < r_k < r\psi_+} \frac{r r_k}{(r_k - r)^2 + 2r\,r_k(1-\alpha)} + \cos\varphi \sum_{r_k > r\psi_+} \frac{2rr_k + 2rr_k\alpha}{r_k^2 + r^2},$$

и, следовательно

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant 2(1+\alpha)\cos\varphi \cdot \frac{1}{r} \sum_{r_k < r\psi_-} r_k +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{1-\alpha}[n(r\psi_+) - n(r\psi_-)] + 2(1+\alpha)\cos\varphi \cdot r \sum_{r_k > r\psi_+} 1/r_k. \tag{4.3}$$

Отсюда получаем оценку

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \frac{2\cos\varphi}{1-\alpha} n(r\psi_-) + \frac{\cos\varphi}{1-\alpha}[n(r\psi_+) - n(r\psi_-)] +$$

$$+ \frac{2\cos\varphi}{1-\alpha} r \sum_{r_k > r} 1/r_k.$$

Так как $\psi_+ \leqslant 4$, то отсюда следует утверждение леммы. Из этой леммы вытекает, что соотношение (2.1) имеет место для всех φ, удовлетворяющих условию $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Используя неравенство (4.3), можно доказать также следующую лемму (см. [5], стр. 107).

Лемма 7. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} > q > 1,$$

то функция $1/B(\lambda)$ *ограничена на лучах* $\arg\lambda = \varphi$ *при* $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Теорема II непосредственно следует из леммы 6 и теоремы I.

Для доказательства теоремы III заметим, что в этом случае, согласно лемме 7, функция $g(x)$ удовлетворяет условию

$$g(x) \leqslant M \int_0^\infty r^{1+\varepsilon} e^{-xr\cos\varphi}\, dr,$$

где M — некоторая постоянная. Следовательно

$$g(x) \leqslant \frac{M_1}{x^{2+\varepsilon}}. \tag{4.4}$$

Из условия (7) следует, что

$$\sigma(x) \leqslant M_2 \, x^{1+\varepsilon_1}, \tag{4.5}$$

где M_2 от x не зависит.

Положим $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, тогда из (4.4) и (4.5) имеем

$$\sigma(x)\, g(x) \leqslant \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}, \tag{4.6}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от x. Из (4.6) следует, что интеграл (6) сходится, и теорема III получается из теоремы I.

Ереванский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет

Поступила 17.VI.1973

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Դիրիխլեի սիստեմների մասին կամայական բազմությունների վրա *(ամփոփում)*

Դիցուք $\{\lambda_k\}$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է (1) պայմաններին։ Դիտարկվում է Դիրիխլեի (2) սիստեմը* L(E) *տարածությունում, որտեղ* E*-ն իրական թվերի Լեբեգի իմաստով չափելի դրական չափի բազմություն է։ Ապացուցվում է, որ եթե* E *բազմությունը* A *կետում բավականին խիտ է աջից, կախված* $\{\lambda_k\}$ *հաջորդականության խտությունից, ապա (2) սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաների հաջորդականության համար* L(E) *տարածության նորմայով զուգամիտությունից բխում է հավասարաչափ զուգամիտություն* $|\arg(z-A-\delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$ *անկյան մեջ, որտեղ* $\delta > 0$ *կամայական է, իսկ* φ_0*-ն մասնակցում է (1) պայմանում։*

V. Kch. MUSOYAN. *On Dirichlet systems on arbitrary sets* (summary)

Let $\{\lambda_k\}$ be a sequence of complex numbers such that (1) holds. The Dirichlet system (2) is considered in the space $L(E)$, where E is a measurable set of real numbers with positive Lebesque measure. It is proved, that if the set E is a sufficiently dense from the right at the point A with respect to the density of the ssequence $\{\lambda_k\}$, then for the sequence of finite linear combinations of functions of the system (2) the convergence in the norm of the space $L(E)$ implies the uniform convergence of this sequence in the angle $|\arg(z-A-\delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, for every $\delta > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Schwartz*. Etude des sommes d'exponentiales, Actualites Scientifiques et industrielles, 1959.
2. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.
3. *В. Х. Мусоян*. Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле, ДАН Арм.ССР, XLII, № 2, 1966.

4. *W. A. J. Luxemburg* and *J. Korevaar*. Entire functions and Müntz-Szasz type approximation, Transactions..., June, 1971, v. 157, r 1.
5. *В. Х. Мусоян*. О лакунарных системах Дирихле, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 2, 1972.
6. *А. Ф. Леонтьев*. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, сер. матем. 29, 1965, 269—328.
7. *R. P. Boas*. Entire functions, New York, 1954.