ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

ОЦЕНКА РОСТА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

Введение

1°. Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны [1, 2], класс A аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\right\}<+\infty, \tag{1}$$

совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f(z)=e^{i\alpha}z^{\lambda}B(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi(\vartheta)\right\},\ |z|<1, \tag{2}$$

где α ($\operatorname{Im}\alpha=0$) — постоянная, $\lambda\geq 0$ — целое число, $B(z)$ — функция Бляшке и $\psi(\vartheta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$.

Из представления (2) следует, что если $f(z)\in A$, причем $f(z)\not\equiv 0$, то справедлива оценка снизу

$$\log|f(z)|\geq-\frac{c(\psi)}{1-|z|}\ (|z|<1),\ c(\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|, \tag{3}$$

которую, как показывает пример функции $\exp\left\{-\frac{1}{1-z}\right\}$, улучшить нельзя.

Из оценки же (3) непосредственно вытекает, что если $\omega(t)>0$ — произвольная измеримая функция на $[0,1)$, подчиненная лишь условию

$$\int_0^1\frac{\omega(r)}{1-r}\,dr<+\infty, \tag{4}$$

то для любой функции $f(z)\in A$, $f(z)\not\equiv 0$ будем иметь

$$\int_0^1\omega(r)\log|f(re^{i\vartheta})|\,dr>-\infty,\ \vartheta\in[0,2\pi]. \tag{5}$$

В работе А. Л. Шагиняна [3] был обнаружен важный факт, что условие (5) остается в силе и для произвольной функции Бляшке $B(z)$, что привело его к следующей теореме:

Для любой функции $f(z) \in A$ *при условии* (4) *справедливо неравенство* (5).

Кроме того, на примере функции Бляшке $B(z)$ им же было установлено, что в этом утверждении условие (4) на функцию $\omega(r)$, вообще говоря, необходимо*.

2°. В ранней работе М. М. Джрбашяна [4] посредством условия

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, rdrd\theta < +\infty \tag{6}$$

были введены значительно более широкие чем A классы A_α $(0<\alpha<\infty)$ аналитических в круге $|z|<1$ функций, для которых были установлены существенно новые факторизационные представления.

В дальнейшем автор [5], опираясь на эти представления, установил интегральные оценки типа (5) для функций, принадлежащих любому из классов $A(\alpha)$ $(0<\alpha<+\infty)$.

Но в отличие от случая классов A, установление утверждения, аналогичного (5) для произведений $\pi_\alpha(z)$, участвующих в факторизационном представлении классов $A(\alpha)$, было сопряжено со значительными трудностями.

Вместе с тем отметим, что на примере функций $\pi_\alpha(z)$ точность полученного тогда нами результата нельзя было считать вполне выявленной, поскольку и поныне не известно, входят ли они в класс $A(\alpha)$ или нет?

3°. В дальнейших исследованиях М. М. Джрбашяна ([6] и [7]) была построена полная теория факторизации мероморфных в круге функций, по существу охватывающая мероморфные функции произвольного роста.

Первоначально в монографии [6] путем дальнейшего развития и усовершенствования метода, лежащего в основе работы [4], была построена совершенная теория факторизации классов N_α мероморфных в круге $|z|<1$ функций, зависящих от непрерывного параметра α $(-1<\alpha<\infty)$. Соответствующие классы $A_\alpha \subset N_\alpha$ аналитических в круге $|z|<1$ функций взамен (6) определяются посредством условия

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} D_+^{-\alpha} \{\log |f(re^{i\theta})|\}\, d\theta < +\infty, \tag{7}$$

---

* На самом деле А. Л. Шагинян устанавливает более общее чем (5) неравенство, рассматривая интеграл по измеримому множеству положительной меры, лежащему на некоторой простой дуге L, лежащей в круге $|z|<1$ с концом на ее границе.

где $D^{-\alpha}$ — производная (при $-1<\alpha<0$), или интеграл (при $0<\alpha<\infty$) порядка α в смысле Римана-Лиувилля.

Основная теорема М. М. Джрбашяна о факторизации классов A_α гласит:

Класс A_α $(-1<\alpha<\infty)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z)=cz^{\lambda}\,B_\alpha(z;\,z_k)\,\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{8}$$

где c — *постоянная,* $\lambda\geqslant 0$ — *целое число,* $\psi(\vartheta)$ — *вещественная функция с конечным полным изменением на* $[0,2\pi]$,

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{9}$$

и, наконец, $B_\alpha(z;\,z_k)$ — *сходящееся в круге* $|z|<1$ *произведение вида*

$$B_\alpha(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}, \tag{10}$$

причем

$$W_\alpha(z;\,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k. \tag{11}$$

Классы A_α $(-1<\alpha<+\infty)$ монотонно расширяются вместе с возрастанием параметра α, и в частности, обладают свойством

$$A_0\equiv A, \tag{12}$$

$$A_\alpha\subset A\ (-1<\alpha<0),\quad A_\alpha\supset A\ (0<\alpha<+\infty).$$

4°. В настоящей статье, опираясь на факторизацию (8) функций классов A_α $(-1<\alpha<+\infty)$, и методом оценок, содержащихся в работе [5], устанавливаются интегральные оценки типа (5) для функций этих классов и доказывается их точность в надлежащем классе.

Ввиду свойств (12) классов A_α $(-1<\alpha<+\infty)$, полученные нами результаты относятся как к произвольно узким чем $A_0=A$ классам (при $-1<\alpha<0$), так и к классам, в которых (при $0<\alpha<\infty$) могут быть охвачены аналитические в круге $|z|<1$ функции с произвольным конечным ростом, поскольку, как известно, [8]

$$A(\alpha)\subset A_\alpha,\ (0<\alpha<+\infty).$$

В специальном же случае, когда $\alpha=0$, в них содержится результат работы [3], о котором говорилось выше.

В § 1 настоящей работы приводится ряд предварительных лемм, которые в дальнейшем используются.

В § 2 получены интегральные оценки для роста функций М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z;\ a_\mu)$, участвующих в представлении функций классов N_α и совпадающих с функцией Бляшке при $\alpha = 0$.

В заключительном § 3 установлены оценки роста на L функций класса N_α $(-1 < \alpha < +\infty)$, откуда, в частности, получается теорема единственности для аналитических функций класса N_α.

Автор глубоко благодарен проф. М. М. Джрбашяну за внимание и обсуждение настоящей работы.

§ 1. Предварительные леммы

Условимся говорить, что функция $\omega(t) \in \Omega$, если $\omega(t)$ — произвольная непрерывная и невозрастающая на отрезке $[0, 1)$ функция, для которой $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ и

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt < +\infty. \tag{1.1}$$

Заметим, что как в работе [3], так и здесь вместо множества $[0, 1)$ можно было рассмотреть произвольное измеримое множество E на отрезке $[0, 1)$ с положительной мерой. Но, во избежание осложнений, при выкладках в настоящей работе мы принимаем $E \equiv [0, 1)$.

Спроектируем теперь с помощью круговых дуг точки отрезка $[0, 1)$ на дугу L, которая соединяет центр круга с окружностью $|z|=1$. Для простоты будем считать, что окружности $|z| = \text{const}$ пересекают дугу L в одной точке.

Отметим, что в дальнейшем всюду предполагается, что $\omega(t) \in \Omega$ и через c_k $(k=0, 1, 2, \cdots)$ будем обозначать положительные постоянные.

Лемма 1.1. *При любом* $0 < b < 1$ *и* $-1 < \alpha < \infty$ *справедлива оценка*

$$J_\alpha^{(1)}(b) = \int_b^1 (1-x)^\alpha\, \omega(x) \lg \frac{1}{x-b}\, dx < c_1 (1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.2}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Так как $\omega(t) > 0$ не возрастает на $[0,1)$, то

$$c_0 = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x}\, dx \geqslant \int_0^b \frac{\omega(x)}{1-x}\, dx > \omega(b) \lg \frac{1}{1-b},$$

и таким образом

$$\omega(b) \lg \frac{1}{1-b} < c_0. \tag{1.3}$$

Рассмотрим теперь два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$. Тогда из определения (1.2) величины $J_\alpha^{(1)}$ следует

$$J_\alpha^{(1)}(b)\leqslant(1-b)^\alpha\,\omega(b)\int_b^1\lg\frac{1}{x-b}\,dx=$$

$$=\omega(b)(1-b)^{1+\alpha}\left[1+\lg\frac{1}{1-b}\right]\leqslant 2c_0(1-b)^{1+\alpha}.$$

2) Пусть $-1<\alpha\leqslant 0$, тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(1)}(b)=\int_b^{\sqrt{b}}(1-x)^\alpha\,\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx+\int_{\sqrt{b}}^1(1-x)^\alpha\,\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(1-\sqrt{b})^\alpha\int_b^1\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx+\lg\frac{1}{\sqrt{b}-b}\int_{\sqrt{b}}^1(1-x)^\alpha\,\omega(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\omega(b)(1-\sqrt{b})^\alpha(1-b)\left[1+\lg\frac{1}{1-b}\right]+\omega(b)\lg\frac{1}{\sqrt{b}-b}\cdot\frac{(1-\sqrt{b})^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Отсюда, используя неравенство (1.3), получаем

$$J_\alpha^{(1)}(b)\leqslant c_2(1-b)^{1+\alpha}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что из неравенств (1.2) в случае $\alpha=0$ будем иметь

$$J_0^{(1)}(b)=\int_b^1\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx\leqslant c_3(1-b). \tag{1.4}$$

Лемма 1.2. *Справедливо неравенство*

$$J_\alpha^{(2)}(b)\equiv\int_0^b\omega(t)\lg\frac{b-t}{1-t}\,dt\leqslant c_4(1-b), \tag{1.5}$$

где $c_4>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. В интеграле $J_\alpha^{(2)}(b)$ совершим замену переменного интегрирования

$$\frac{b-t}{1-t}=x. \tag{1.6}$$

Тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(2)}(b)=(1-b)\int_0^b\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}\,dx=(1-b)\int_0^{1/2}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}\,dx+$$

$$+(1-b)\int_{1/2}^{b}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}dx\leqslant\frac{(1-b)\,\omega(0)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^1\lg\frac{1}{x}\,dx+$$

$$+(1-b)\int_{1/2}^{b}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg 2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-x)}\,dx.$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно, а во втором вновь перейдем к переменной интегрирования t, определив ее из (1.6). В результате приходим к неравенству

$$J_\alpha^{(2)}(b)\leqslant(1-b)\left\{8+4\lg 2\int_0^1\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt\right\},$$

т. е. к неравенству (1.5) леммы.

Пусть при $0\leqslant u<1$ и $\frac{1}{2}<b\leqslant u<1$ положено

$$E_\alpha^{(1)}(u,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{u}{b}\right)^n\int_0^b(1-x)^\alpha\,x^{n-1}\,dx, \tag{1.7}$$

$$E_\alpha^{(2)}(u,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\,(u\,b)^n\int_b^1(1-x)^\alpha\,x^{-n-1}\,dx. \tag{1.8}$$

Лемма 1.3. *Для любого* $\alpha\,(-1<\alpha<\infty)$ *имеют место неравенства*

$$\int_b^1(1-t)^\alpha\,\omega(t)\,E_\alpha^{(1)}(t,\,b)\,dt\leqslant c_5\,(1-b)^{1+\alpha} \tag{1.9}$$

и

$$\int_b^1(1-t)^\alpha\,\omega(t)\,E_\alpha^{(2)}(t,\,b)\,dt\leqslant c_6\,(1-b)^{1+\alpha}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Сначала оценим функцию $E_\alpha^{(1)}(t,\,b)$, рассмотрев при этом два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$, тогда

$$E_\alpha^{(1)}(t,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{t}{b}\right)^n\left[\int_0^{b^2}(1-x)^\alpha\,x^{n-1}\,dx+\right.$$

$$+\int_{b^2}^{b}(1-x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx\Big]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{t}\right)^{n}\frac{\int_{0}^{1}(1-b^2t)^{\alpha}t^{n-1}\,dt}{\int_{0}^{1/t^2}(1-t^2x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\left(\frac{t}{b}\right)^{n}\int_{b^2}^{b}(1-x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx\leqslant$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{t}\right)^{n}\max_{0<x<1}\left(\frac{1-b^2x}{1-t^2x}\right)^{\alpha}+\frac{2^{2+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}t^{n}.$$

Имея ввиду, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}t^{n}=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\quad(0\leqslant t<1),\tag{1.11}$$

а также, что $0<\alpha<+\infty$, получим далее

$$E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\leqslant\left(\frac{1-b^2}{1-t^2}\right)^{\alpha}\left|\lg\left(1-\frac{b}{t}\right)\right|+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{1+\alpha}.\tag{1.12}$$

2) Пусть теперь $-1<\alpha\leqslant 0$, тогда

$$E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\leqslant(1-b)^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\frac{t^{n}}{n}\leqslant c_7\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{\alpha}.\tag{1.13}$$

Оценка функции $E_{\alpha}^{(2)}(t,b)$ получается непосредственно для всех $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$,

$$E_{\alpha}^{(2)}(t,b)\leqslant\frac{1}{b(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}t^{n}\cdot(1-b)^{1+\alpha}<$$

$$\leqslant\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{1+\alpha}.\tag{1.14}$$

Покажем, что для любого $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$ имеют место неравенства (1.9) и (1.10). В самом деле, из (1.12) при $0<\alpha<\infty$) получим

$$\int_{b}^{1}(1-t)^{\alpha}\omega(t)\,E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\,dt\leqslant 2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\left|\lg\left(1-\frac{b}{t}\right)\right|dt+$$

$$+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}\int_{b}^{1}\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt\leqslant 2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\lg\frac{1}{t-b}\,dt+$$

$$+2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\lg\frac{1}{t}\,dt+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}\int_{0}^{1}\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt.$$

Откуда, пользуясь неравенством (1.4), получаем (1.9).

В случае $-1<\alpha\leqslant 0$, пользуясь неравенством (1.13), вновь получим неравенство (1.9).

В силу оценки (1.14), имеем, что при любом α

$$\int_b^1 \omega(t)(1-t)^{\alpha} E_{\alpha}^{(2)}(t, b)\, dt \leqslant \frac{(1-b)^{1+\alpha}}{b(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt,$$

т. е. неравенство (1.10).

Лемма 1.4. *При любом* α $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $0<b<1$ *для интеграла*

$$J_{\alpha}^{(3)}(b) = \int_0^b (1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\left\{\int_b^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{tx}{b}\right)^{1+\alpha}}\,\frac{dx}{x}\right\} dt$$

справедлива оценка

$$J_{\alpha}^{(3)}(b) \leqslant c_8 (1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.15}$$

где $c_8>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Интеграл $J_{\alpha}^{(3)}(b)$ представим в следующем виде:

$$J_{\alpha}^{(3)}(b) = \int_0^b (1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\,dt \int_0^{\frac{1-b}{1-t}} \frac{v^{\alpha}}{1-v}\,dv \tag{1.16}$$

и рассмотрим два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$. Тогда из (1.16) получим

$$J_{\alpha}^{(3)}(b) \leqslant (1-b)^{\alpha} \int_0^b \omega(t) \lg \frac{b-t}{1-t}\,dt \leqslant c_4 (1-b)^{1+\alpha} \tag{1.17}$$

согласно лемме 1.2.

2) Пусть $-1<\alpha\leqslant 0$. В интеграле $J_{\alpha}^{(3)}(b)$, перейдя к переменному τ и положив

$$v = \frac{1-b}{1-t}\,\tau,$$

получим

$$J_{\alpha}^{(3)}(b) = (1-b)^{1+\alpha} \int_0^b \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha}\,d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\,\tau} =$$

$$= (1-b)^{1+\alpha} \int_0^b \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt \left[\int_0^{1/2} \frac{\tau^{\alpha}\,d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\,\tau} + \int_{1/2}^1 \frac{\tau^{\alpha}\,d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\,\tau}\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1-b)^{1+\alpha}\, c\cdot \int_0^{1/2} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\tau} + 2^\alpha\,(1-b)^\alpha \int_0^b \omega(t)\,\lg\frac{b-t}{1-t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_0\cdot(1-b)^{1+\alpha}\int_0^{1/2}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{1-\tau} + c_4\,2^\alpha\,(1-b)^{1+\alpha}. \tag{1.18}$$

Из неравенств (1.17) и (1.18) следует утверждение (1.15) леммы.

Лемма 1.5. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *и* $0<b<1$ *для интеграла*

$$J_\alpha^4(b) \equiv \int_0^b \omega(t)(1-t)^\alpha \left\{\int_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{tb}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\} dt$$

справедлива оценка

$$J_\alpha^{(4)}(b) \leqslant c_9\,(1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.19}$$

где $c_9>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Непосредственной оценкой внутреннего интеграла получим

$$J_\alpha^{(4)}(b) \leqslant \int_0^b \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt\int_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \leqslant \frac{c_0}{b\,(1+\alpha)}(1-b)^{1+\alpha}.$$

§ 2. Интегральная оценка для функции Джрбашяна $B_\alpha(z;\ a_\mu)$

2.1°. Доказательство основной теоремы. Функция Джрбашяна $B_\alpha(z;\ z_k)$ с нулями в точках данной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty\quad(-1<\alpha<\infty), \tag{2.1}$$

является сходящимся в круге $|z|<1$ произведение [5, 6],

$$B_\alpha(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}, \tag{2.2}$$

где для $|z|<1$ и $|\zeta|<1$ положено

$$W_\alpha(z;\ \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|z|}(1-x)^{\alpha}\,x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^{k}\int_{|z|}^{1}(1-x)^{\alpha}\,x^{-k-1}\,dx\right\}z^{k}. \tag{2.3}$$

При $|z|<|\zeta|$ функцию $W_{\alpha}(z;\,\zeta)$ можно представить и в таком виде:

$$W_{\alpha}(z;\,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{x}+\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{x}\bar{\zeta}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}+\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+$$

$$+\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{\zeta}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}. \tag{2.4}$$

Если ввести обозначение

$$A_{\alpha}(z;\,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_{\alpha}(z;\,\zeta)}, \tag{2.5}$$

то функцию $B_{\alpha}(z;\,z_k)$ можно представить в следующем виде:

$$B_{\alpha}(z;\,z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{\alpha}(z;\,z_k). \tag{2.6}$$

Установим теперь ряд лемм, необходимых нам для доказательства основной теоремы этого параграфа.

Лемма 2.1. *При* $|z|<|a|<1$ *и* $-1<\alpha<\infty$ *имеет место оценка*

$$\log|A_{\alpha}(z;\,a)|\geqslant\log|A_{\alpha}(|z|,\,|a|)|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Так как при $|z|<|a|$, согласно (2.4) и (2.5), функцию $A_{\alpha}(z;\,a)$ можно представить в следующем виде:

$$A_{\alpha}(z;\,a)=\exp\left\{\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z\bar{a}}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{a}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}, \tag{2.8}$$

то имеем

$$\log|A_{\alpha}(z;\,a)|=\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx-\mathrm{Re}\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z\bar{a}}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-$$

$$-\mathrm{Re}\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{a}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\geqslant\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{|z|\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-$$

$$-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{|z|}{|a|}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}=\log|A_{\alpha}(|z|,\,|a|)|.$$

Лемма 2.2. *Для любого* $-1<\alpha<\infty$ *при* $\frac{1}{2}\leqslant|a|<1$ *имеет место оценка*

$$J_{\alpha}^{(4)}(a)\equiv\int\limits_{L(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,|\operatorname{Re}W_{\alpha}(z;\,a)\,|d\,|z|\leqslant c_{10}\,(1-|a|)^{1+\alpha},\quad(2.9)$$

где $c_{10}>0$ *не зависит от* a.

Доказательство. Из представления (2.3) имеем

$$|\operatorname{Re}W_{\alpha}(z;\,a)|\leqslant\frac{2}{1+\alpha}\,(1-|a|)^{1+\alpha}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\,|z|^{n}\left\{|a|^{-n}\int\limits_{0}^{|a|}(1-x)^{\alpha}\,x^{n-1}\,dx+|a|^{n}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{|a|}^{1}(1-x)^{\alpha}\,x^{-n-1}\,dx\right\}\equiv\frac{2}{1+\alpha}\,(1-|a|)^{1+\alpha}+E_{\alpha}^{(1)}(|z|,\,|a|)+E_{\alpha}^{(2)}(|z|,\,|a|)$$

согласно (1.7) и (1.8). Следовательно имеем

$$J_{\alpha}^{(4)}(a)\leqslant\frac{2}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,d\,|z|+\int\limits_{|a|}^{1}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,E_{\alpha}^{(1)}(|z|,\,|a|)\,d\,|z|+$$

$$+\int\limits_{|a|}^{1}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,E_{\alpha}^{(2)}(|z|,\,|a|)\,d\,|z|,$$

откуда доказательство утверждения (2.9) получится согласно лемме 1.3.

Лемма 2.3. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *и при* $0<|a|\leqslant\frac{1}{2}$ *для интеграла*

$$J_{\alpha}^{(5)}(a)=\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\lg|A_{\alpha}(z;\,a)|\,d\,|z|\quad(2.10)$$

справедлива оценка

$$|J_{\alpha}^{(5)}(a)|\leqslant c_{11}.\quad(2.11)$$

Доказательство. Разобьем интеграл $J_{\alpha}^{(5)}(a)$ на две части

$$J_{\alpha}^{(5)}(a)=\int\limits_{L(|z|<|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\lg|A_{\alpha}(z,\,a)|\,d\,|z|+$$

$$+\int\limits_{L(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\lg|A_{\alpha}(z,\,a)|\,d\,|z|\equiv E_{\alpha}^{(3)}(a)+E_{\alpha}^{(4)}(a).\quad(2.12)$$

Пользуясь неравенством (2.7) и представлением (2.8) для $A_\alpha(z, a)$, получим

$$|E_a^{(3)}(a)| \leqslant \int_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|)\, d|z| \cdot \int_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx +$$

$$+ \int_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \left\{ \int_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{|z|\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} d|z| +$$

$$+ \int_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \left\{ \int_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{|z|}{|a|}x\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} d|z|,$$

откуда, согласно леммам (1.4) и (1.5) имеем

$$|E_a^{(3)}(a)| \leqslant c_{11}. \tag{2.13}$$

Для $E_a^{(4)}(a)$ имеем

$$|E_a^{(4)}(a)| \leqslant \left| \int_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \lg\left|1-\frac{z}{a|^\mu}\right| d|z| \right| +$$

$$+ \left| \int_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|^\alpha)\, \mathrm{Re}\, W_\alpha(z; a)\, d|z| \right|. \tag{2.14}$$

Для оценки первого интеграла достаточно применить лемму 1.1, для второго интеграла находим

$$\left| \int_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \mathrm{Re}\, W_\alpha(z; a)\, d|z| \right| \leqslant \int_{|a|}^1 (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} |za|^n\, d|z| +$$

$$+ \int_{|a|}^1 (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} |z|^n\, d|z| \leqslant 2\int_0^1 \frac{\omega(|z|)}{1-|z|}\, d|z|,$$

следовательно

$$|E_a^{(4)}(a)| \leqslant c_{12}. \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.15) и (2.13), согласно (2.12), получаем доказательство леммы.

Лемма 2.4. *При любых* $-1 < \alpha < \infty$ *и* $\frac{1}{2} \leqslant |a| < 1$ *справедливы оценки*

$$J_1(a)=\int\limits_{L(|z|<|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_{\alpha}(z,\,a)|\,d|z|\geqslant -c_{13}(1-|a|)^{1+\alpha},\quad (2.16)$$

$$J_2(a)=\int\limits_{L(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_{\alpha}(z,\,a)|\,d|z|\geqslant -c_{14}(1-|a|)^{1+\alpha}.\quad (2.16')$$

Доказательство. Так как в интеграле $J_1(a)$ $|z|<|a|$, то, согласно лемме 2.1, получим

$$J_1(a)\geqslant\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\lg|A_{\alpha}(t,\,|a|)|\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\,dt\int\limits_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx-\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\left\{\int\limits_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{t\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}dt-$$

$$-\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\omega(t)\left\{\int\limits_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{tx}{|a|}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}-J_{\alpha}^{(4)}(a)-J_{\alpha}^{(3)}(a).$$

Отсюда утверждение леммы (2.15) получается, в силу лемм 1.4 и 1.5.

Для доказательства неравенства (2.16) разобьем $J_2(a)$ на сумму двух интегралов:

$$J_2(a)=\int\limits_{|a|}^{1}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg\left|1-\frac{|z|}{|a|}\right|d|z|-$$

$$-\int\limits_{L(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\mathrm{Re}\;W_{\alpha}(z;\,a)\,d|z|,$$

остальное вытекает из леммы 1.1 и 2.2.

Лемма 2.5. *При любых* $-1<\alpha<\infty$ *и* $\frac{1}{2}\leqslant|a|<1$ *для интеграла*

$$J(a)=\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_{\alpha}(z;\,a)|\,d|z|$$

справедлива оценка

$$J(a)\geqslant -c_{15}(1-|a|)^{1+\alpha}.\quad (2.18)$$

Доказательство. Разобьем интеграл $J(a)$ на два интеграла

$$J(a)=J_1(a)+J_2(a),$$

где

$$J_1(a)=\int\limits_{L\,(|z|<|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\lg|A_{\alpha}(z;\ a)|\,d|z|,$$

$$J_2(a)=\int\limits_{L\,(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\,\lg|A_{\alpha}(z;\ a)|\,d|z|,$$

тогда оценка (2.18) следует из леммы 2.4.

Теперь можно доказать основной результат настоящего параграфа, в котором в качестве специального случая, когда $\alpha=0$, содержится теорема, установленная А. Л. Шагиняном для функции Бляшке [3].

Теорема 1. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *для сходящегося произведения* $B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\ \lg|B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})|\,d|z|>-\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Из определения (2.6) функции $B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})$ имеем

$$\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})|\,d|z|=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\omega(|z|)\,(1-$$

$$-|z|)^{\alpha}\lg|A_{\alpha}(z;\ a_{\mu})|\,d|z|=\sum_{|a_{\mu}|<\frac{1}{2}}J(a_{\mu})\ +\sum_{|a_{\mu}|>\frac{1}{2}}J(a_{\mu})\geqslant$$

$$\geqslant-n\left(\frac{1}{2}\right)\max_{0<|a|<\frac{1}{2}}J_{\alpha}^{(5)}(a)-c_{15}\sum_{|a_{\mu}|>\frac{1}{2}}(1-|a_{\mu}|)^{1+\alpha},$$

где $n\left(\frac{1}{2}\right)$ — число нулей a_{μ} функции $B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})$, удовлетворяющих неравенству $|a_{\mu}|\leqslant\frac{1}{2}$. Теорема следует из леммы 2.3 и условия сходимости произведения $B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})$.

2.2°. Неулучшаемость основной теоремы 1. В данном пункте мы установим, что для справедливости неравенства типа (2.19) присутствие множителя типа функции $\omega(t)\in\Omega$ необходимо. А именно, полагая, что $\{a_{\mu}\}_1^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\alpha}<\infty\quad(-1<\alpha<\infty),$$

мы докажем, что для соответствующего произведения М. М. Джрбашяна $B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})$ возможны случаи, когда

$$\int_{\gamma}(1-|z|)^{\alpha}\lg|B_{\alpha}(z;\ a_{\mu})|\,d|z|=-\infty.$$

Обозначая для $-1<\alpha<\infty$ и $0<\alpha<1$

$$g_k(\alpha)\equiv\frac{1}{\alpha^k}\left\{\frac{1}{\alpha+1+k}\int_0^{\alpha}(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt-\frac{1}{k}\int_0^{\alpha^2}(1-t)^{\alpha}t^{k}\,dt\right\},$$

докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.6. *Для любого* $-1<\alpha<\infty$ *при* $\alpha\to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\alpha)=O\left((1-\alpha)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-\alpha}\right). \tag{2.20}$$

Доказательство. Заметим сначала же, что в случае $\alpha=0$ утверждение леммы очевидно. В самом деле, при $\alpha=0$ имеем

$$g_k(\alpha)=\frac{1-\alpha^{\alpha+2}}{k(k+1)},$$

и так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k(k+1)}=1+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\lg\frac{1}{1-\alpha}\quad(0<\alpha<1), \tag{2.21}$$

то

$$g_k(\alpha)=1-\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\lg\frac{1}{1-\alpha}=O\left((1-\alpha)\lg\frac{1}{1-\alpha}\right).$$

Для $-1<\alpha<\infty$, так как

$$\gamma_{\alpha,k}\equiv\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}=\int_0^1(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\quad(-1<\alpha<\infty,\ k=1,2,\cdots),$$

то функцию $g_k(\alpha)$ можно представить в следующем виде:

$$g_k(\alpha)=\frac{\alpha^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\left[\int_0^{\alpha}(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\int_0^1(1-x)^{\alpha}x^k\,dx-\int_0^{\alpha^2}(1-t)^{\alpha}t^k\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx\right], \tag{2.22}$$

откуда вытекает следующая оценка:

$$-\frac{\alpha^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\int_0^{\alpha^2}(1-t)^{\alpha}t^k\,dt\int_{\alpha^2}^1(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\leqslant g_k(\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\int_0^{\alpha}(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\int_{\alpha^2}^1(1-t)^{\alpha}t^k\,dt. \tag{2.23}$$

Полагая сначала, что $-1<\alpha<0$, из (2.23) получим

$$g_k(a)\leqslant\frac{1}{k}\frac{\int_0^1(1-at)^\alpha t^{k-1}\,dt}{\int_0^1(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt\leqslant\frac{1}{k}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt. \quad (2.24)$$

Используя теперь левое из неравенств (2.23), приходим к оценке

$$g_k(a)\geqslant-\frac{a}{1+\alpha+k}\frac{\int_0^1(1-at)^{\alpha}t^k\,dt}{\int_0^1(1-t)^\alpha t^k\,dt}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{a}{1+\alpha+k}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt. \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что

$$g_k(a)=O\left(\frac{1}{k}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt\right),\quad a\to1-0.$$

Отсюда вытекает, что при $a\to1-0$

$$\sum_{k=1}^{n}g_k(a)=O\left(\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha\lg\frac{1}{1-t}\,dt\right)=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right),$$

т. е. утверждение леммы.

Полагая теперь, что $0\leqslant\alpha<\infty$, из (2.23) имеем

$$g_k(a)\leqslant\frac{a^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\left[\int_0^{a^2}(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt+\int_{a^2}^a(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt\right]\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\int_0^1(1-a^2t)^\alpha t^{k-1}\,dt}{k\int_0^{1/a}(1-at)^\alpha t^{k-1}\,dt}\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt+\frac{\int_{a^2}^1(1-t)^\alpha t^k\,dt}{k\int_0^1(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt}\times$$

$$\times\int_a^1(1-at)^\alpha t^k\,dt\leqslant\max_{0<t<1}\left(\frac{1-a^2t}{1-at}\right)\frac{1}{k}\int_a^1(1-t)^\alpha t^k\,dt+\frac{1}{k}\int_a^1(1-at)^\alpha t^k\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\alpha}+1}{k}\int_{a}^{1}(1-at)^{\alpha}\,t^{k}\,dt \leqslant (1-a)^{\alpha}\,(2^{\alpha}+1)\,\frac{1-a^{k+1}}{k\,(k+1)} \leqslant (2^{\alpha}+1)(1-a)^{\alpha}\frac{1-a^{k}}{k\,(k+1)}.$$

Используя теперь левостороннее неравенство (2.23), точно так же получим

$$g_k(a) \geqslant -\frac{(2^{\alpha}+1)(1-a)^{\alpha}}{\alpha+1+k}\,\frac{1-a^{k}}{k}. \tag{2.27}$$

Из неравенств (2.26) и (2.27) следует, что при $a \to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a) = O\left((1-a)^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a^{k}}{k\,(k+1)}\right), \tag{2.28}$$

откуда, согласно (2.21), следует утверждение леммы в случае $0<\alpha<\infty$.

Итак, лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Если* $\{a_\mu\}_1^{\infty}$ $(0<a_\mu \leqslant a_{\mu+1}\leqslant 1)$, *то при любом* $-1<\alpha<\infty$ *для неравенства*

$$J_\alpha = \int_0^1 (1-x)^{\alpha}\,\lg|B_\alpha(x;\,a_\mu)|\,dx > -\infty \quad (-1<\alpha<\infty)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(1-a_\mu)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a_\mu} < +\infty.$$

Доказательство. Из определения функции $B_\alpha(z;\,a_\mu)$ следует, что

$$J_\alpha = \sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^1 (1-x)^{\alpha}\left\{\lg\left|1-\frac{x}{a_\mu}\right| - \operatorname{Re} W_\alpha(x;\,a_\mu)\right\}dx. \tag{2.29}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_\alpha^{(1)} = \int_0^1 (1-x)^{\alpha}\left\{\lg\left|1-\frac{x}{a}\right| - \operatorname{Re} W_\alpha(x;\,a_\mu)\right\}dx = J_\alpha^{(2)} - J_\alpha^{(3)}\ (0<a\leqslant 1).$$

Оценим теперь интеграл $J_\alpha^{(2)}$

$$J_\alpha^{(2)} = \int_0^a (1-x)^{\alpha}\lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx + \int_a^1 (1-x)^{\alpha}\lg\left(\frac{x}{a}-1\right)dx = U_1 + U_2.$$

Найдем порядок интеграла U_2 при $a \to 1-0$

$$U_2=\int_a^1(1-x)^\alpha \lg\left(\frac{x}{a}-1\right)dx=\int_a^1(1-x)^\alpha \lg(x-a)\,dx-\frac{(1-a)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\lg a.$$

Так как

$$\int_a^1(1-x)^\alpha \lg(x-a)\,dx=\frac{(1-a)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\lg(1-a)+(1-a)^{1+\alpha}\times$$

$$\times\int_0^1(1-t)^\alpha \lg t\,dt,$$

то

$$U_2=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right).$$

Заметим также, что

$$U_1=\int_0^{a^2}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+\int_{a^2}^a(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx,$$

где

$$\int_{a^2}^a(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right),$$

тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(2)}=\int_0^{a^2}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right). \qquad (2.30)$$

Займемся теперь оценкой интеграла $J_\alpha^{(3)}$. Заметим прежде всего, что

$$J_\alpha^{(3)}=\int_0^1(1-x)^\alpha dx\int_0^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx+\int_0^1(1-x)^\alpha\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}x^n a^{-n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^a(1-t)^\alpha t^{n-1}dt\right\}dx-\int_a^1(1-x)^\alpha\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}x^n a^n\times\right.$$

$$\left.\times\int_a^1(1-t)^\alpha t^{-n-1}dt\right\}dx=K_1+K_2+K_3.$$

Имеем

$$K_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}a^{-n}\int_0^a(1-x)^\alpha x^{n-1}dx\int_0^1(1-x)^\alpha x^n dx=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx. \tag{2.31}$$

Далее

$$K_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\alpha+1+n} \int_a^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1}\, dx. \tag{2.32}$$

Из (2.30) и (2.31), используя также лемму 2.6, получим

$$J_\alpha^{(2)} + K_2 = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right) + \int_0^{a^2} (1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \left\{ \frac{1}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx - \frac{1}{n} \int_0^{a^2} (1-x)^\alpha x^n\, dx \right\} =$$

$$= O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right). \tag{2.33}$$

Для K_3 имеем

$$K_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\alpha+1+n} \int_a^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1}\, dx,$$

следовательно

$$K_3 = O\left(\int_a^1 (1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{a}{x}\right) dx\right) = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right). \tag{2.34}$$

Так как непосредственно видно, что $K_1 = O((1-a)^{1+\alpha})$, то из (2.33) и (2.34) следует утверждение теоремы.

Теорема 2 показывает, что для неравенства типа (2.19) присутствие множителя $\omega(|z|)$ необходимо.

В самом деле, если $0 < a_1 \leqslant a_2 \cdots \leqslant a_\mu \leqslant \cdots < 1$ и

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (1-a_\mu)^{1+\alpha} < \infty,$$

но тем не менее

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (1-a_\mu)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a_\mu} = +\infty,$$

то

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha \lg |B_\alpha(x;\ a_\mu)|\, dx = -\infty.$$

§ 3. Интегральная оценка для функций классов N_α $(-1<\alpha<\infty)$

Согласно основной теореме М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении классов N_α [5, 6] имеем:

Класс N_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$F(z)=cz^\lambda \frac{B_\alpha(z;\ a_\mu)}{B_\alpha(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{3.1}$$

где c — постоянная, $\lambda \gtrless 0$ — целое число

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{3.2}$$

$\psi(\vartheta)$ — произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

Согласно представлению (3.1), если функция $F(z)\in N_\alpha$ и не имеет нулей и полюсов, то ее можно представить в таком виде:

$$F(z)=c\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}.$$

Так как, согласно (3.2) имеем, что

$$|\lg|F(z)|| \leqslant \frac{c_{16}}{(1-|z|)^{1+\alpha}},$$

то следующая теорема доказывается непосредственно.

Теорема 3. *Если непрерывная на* $[0, 1)$ *и не возрастающая функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt<\infty,$$

то для функции вида (3.1) *имеем*

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \lg|F(z)|\,d|z|>-\infty \quad (-1<\alpha<\infty). \tag{3.3}$$

На основании представления (3.1) функции $W(z)$ класса N_α и теорем 1 и 3 получим основной результат настоящей статьи.

Теорема 4. *Пусть функция* $W(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $W(z)\neq 0$, $\omega(x)\in\Omega$. *Тогда справедливо следующее неравенство*:

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha |\lg|W(z)||\,d|z|<\infty. \tag{3.4}$$

Если обозначим через A_α множество *аналитических* в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, принадлежащих классу N_α, то из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая теорема единственности для функций класса A_α.

Теорема 5. *Пусть* $f(z)\in A_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $\omega(x)\in\Omega$. *Тогда если*

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \lg|f(z)|\,d|z| = -\infty, \tag{3.5}$$

то $f(z)\equiv 0$.

В самом деле, если предположить, что $f(z)\not\equiv 0$, то согласно теореме 4, будем иметь

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \,|\lg|f(z)||\,d\,z|<+\infty,$$

что противоречит условию (3.5).

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 7.V.1973

Վ. Ս. ՋԱՖԱՐՅԱՆ. Աճի գնահատականը N_α դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների համար *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [6] մենագրությունում կառուցել էր միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների α $(-1<\alpha<\infty)$ *անընդհատ պարամետրից կախված* N_α *դասերի ֆակտորիզացման կատարյալ տեսությունը։*

Ներկա հոդվածում, հենվելով այդ դասերի ֆակտորիզացման ներկայացումների վրա, [5] աշխատանքում պարունակվող գնահատման մեթոդներով հաստատվում են այդ ֆունկցիաների համար ինտեգրալ գնահատականներ և ապացուցվում վերջինների ճշտությունը համապատասխան դասերում։

Ասում ենք, որ ֆունկցիա $\omega(t)\in\Omega$ *եթե* $\omega(t)$*-ն կամայական անընդհատ և չաճող ֆունկցիա է* $[0,1]$ *հատվածում, որի համար* $0<\omega(t)<1$ *և*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt<\infty.$$

Հետևյալ պնդումը տալիս է ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը։

Թող ֆունկցիա $W(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ $W(z)\not\equiv 0$ *և* $\omega(x)\in\Omega$*։ Ապա ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha\,|\lg|W(z)||\,d\,|z|<\infty,$$

որտեղ՝ L-ը շրջանի կենտրոնը $|z|=1$ *շրջանի հետ միացնող ցանկացած ուղղելի կոր է։*

V. S. ZAKHARIAN. *A bound for the growth of functions from the N_α class* (summary)

In M. M. Djrbashian's monograph [6] a perfect theory of factorisation of the N_α classes of meromorphic in a circle functions, depending on a parameter α ($-1<\alpha<\infty$) hat been constructed.

In the present paper integral bounds for the functions from N_α are established and their exactness in the proper class is proved.

It is said, that $\omega(t)\in\Omega$, if $0<\omega(t)<1$, $\omega(t)$ is continuous, nonincreasing on (0, 1) and

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}dt<+\infty.$$

The main result of the paper states, that for $W(z)\in N_\alpha$ ($-1<\alpha<\infty$), $W(z)\neq 0$ and $\omega\in\Omega$

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \left|\lg|W(z)|\right| d|z|<\infty,$$

for every rechtifiable curve L, connecting the center of the circle $|z|=1$ with its periphery.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
3. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. наук, 12, № 1, 1959, 2—25.
4. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения ин-та матем. и мех. АН Армянской ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
5. *В. С. Захарян.* Теоремы единственности для некоторых классов функций, голоморфных в круге, Матем. сб., 63 (105), № 1, 1964, 3—22.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
7. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121): 4 (5), 1969, 517—615.
8. *Р. С. Галоян.* О мероморфных функциях класса $N\{\omega\}$, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 334—360.