Ю. Ш. АБРАМОВ

ВАРИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, НЕЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПАРАМЕТРА

В литературе известны следующие (близкие по своей природе) вариационные характеристики для собственных значений вполне непрерывных симметричных операторов: принцип Релея, принцип минимакса Фишера—Куранта—Вейля, принцип максимина Пуанкаре—Ритца и новый принцип минимаксимина, недавно доказанный Стенджером [1].

С другой стороны, в некоторых вопросах математической физики встречаются задачи на собственные значения, в которых параметр входит нелинейно (см., например, [2, 3]). Такие задачи часто удается свести к обобщенным задачам (параметр λ входит нелинейно) на собственные значения в некотором гильбертовом пространстве.

Прежде всего, изучались задачи с полиномиальной зависимостью от параметра. В частности, Даффин [3] выделил класс сильно демпфированных динамических систем и исследовал случай квадратичных матричных пучков. Он показал, что собственные значения характеризуются как минимаксные значения некоторых функционалов, обобщающих известное отношение Релея. Роджерс [4] расширил эти результаты на более общую матричную проблему. Подобный подход к этого рода задачам разрабатывался в дальнейшем в работах [5—12], где доказывались те или иные вариационные принципы при различных предположениях относительно зависимости от спектрального параметра. Другие пути к этим задачам можно найти, например, в работах М. В. Келдыша [13], Д. Ф. Харазова [14], М. Г. Крейна и Г. Лангера [15].

В этой работе для некоторого класса задач, с нелинейным вхождением спектрального параметра, мы докажем вариационные принципы, указанные выше, а также некоторые новые. В частности, из наших результатов следуют соответствующие результаты работ [4—11].

Введем некоторые обозначения, нужные нам в дальнейшем. Если не оговорено особо, считаем, что H —бесконечномерное вещественное гильбертово пространство, E_n (E^n)—совокупность подпространств H размерности (коразмерности) n . Стрелки $\rightarrow$, $\rightarrow$ означают сходимость по норме и слабую сходимость в H . Через B , S и S_∞ обозначим соответственно множество ограниченных, симметричных ограниченных и симметричных компактных операторов в H . Если $A \in S$, то через $\sigma(A)$, $\pi(A)$ и $\rho\sigma(A)$ обозначим спектр, предельный спектр и множество соб-

ственных значений оператора A . Если функция $M. \in B$, $\lambda \in R$, то непрерывность и дифференцируемость ее понимается в смысле нормы операторов.

1. Основные определения

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L_\lambda x = 0, \lambda \in (c, d), x \in H, \quad (1.1)$$

где $L: (c, d) \rightarrow S$ — непрерывно дифференцируемая функция от λ на интервале (c, d) вещественной оси.

Определение 1.1. ([4]). Пусть $p: H \setminus \{0\} \rightarrow (c, d)$ — непрерывный функционал. Если выполнены условия:

$$1) \quad p(ax) = p(x), a \in R, ax \neq 0, \quad (1.2)$$

$$2) \quad (L_p(x) x, x) = 0, x \neq 0, \quad (1.3)$$

$$3) \quad (L_p^1(x) x, x) > 0, x \neq 0, \quad (1.4)$$

то p называется функционалом Релея (ф. Р.) для L_λ , а пара (L, p) — системой Релея. Пусть $\mathcal{W}$ множество значений p . Всякое решение $\lambda, x, \lambda \in \mathcal{W}, x \neq 0$ уравнения (1.1) называется собственной парой, причем λ называется собственным значением, а x — собственным элементом с. Р. Через p^σ обозначим множество собственных значений с. Р. (в дальнейшем, собственные значения с. Р. будем для сокращения называть собственными значениями). Кратностью λ называется размерность собственного подпространства P_λ . Ортогональный проектор на P_λ мы всегда обозначаем через P_λ . Для множества $E \subseteq H$ положим

$$\gamma_c(E) = \inf_{x \in E} p(x), \gamma_d(E) = \sup_{x \in E} p(x), \gamma_c(H) = \gamma_c, \gamma_d(H) = \gamma_d. \quad (1.5)$$

Функционал p называется $d(c)$ -ограниченным, если $\gamma_d < d$ ($\gamma_c > c$) и просто ограниченным, если p — d и c -ограничен. Если p — ограничен, то $\overline{\mathcal{W}} \subset (c, d)$. Через χ обозначим множество нормированных последовательностей, а через χ_0 — элементы из χ , слабо сходящиеся к нулю. Введем следующие множества точек:

$$\omega = \{\lambda: \exists \{x_n\} \in \chi_0, p(x_n) \rightarrow \lambda\},$$

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \overline{\mathcal{W}}: \exists \{x_n\} \in \chi, L_\lambda x_n \rightarrow 0\},$$

$$\pi_1 = \{\lambda \in \overline{\mathcal{W}}: \exists \{x_n\} \in \chi_0, L_\lambda x_n \rightarrow 0\},$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \overline{\mathcal{W}}: \exists \{x_n\} \in \chi, L_\lambda x_n \rightarrow 0, p(x_n) \rightarrow \lambda\},$$

$$\pi_2 = \{\lambda \in \overline{\mathcal{W}}: \exists \{x_n\} \in \chi_0, L_\lambda x_n \rightarrow 0, p(x_n) \rightarrow \lambda\}.$$

Кроме того, если p — $d(c)$ -неограничен, считаем, что $d(c)$ принадлежит σ_1 и π_1 , $i=1, 2$. Очевидны следующие включения:

$$\omega \subseteq \mathcal{W}, p^\sigma \subseteq \sigma_2 \subseteq \sigma_1 \subseteq \overline{\mathcal{W}}, \pi_2 \subseteq \pi_1 \cap \omega, \pi_i \subseteq \sigma_i, i=1, 2. \quad (1.6)$$

Замечание 1.2. Для классического случая $L_\lambda = \lambda I - A$, $p(x) = (Ax, x)/(x, x)$ является обычным ф.Р., $\mathcal{W}$ — числовой областью A . Кроме того, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(A)$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi(A)$, $p\mathcal{J} = p\mathcal{J}(A)$.

Лемма 1.3. ([4]). Пусть $\lambda \in \mathcal{W}$ и $x \neq 0$. Тогда

$$p(x) < \lambda \iff (L_\lambda x, x) > 0, \tag{1.7}$$

$$p(x) = \lambda \iff (L_\lambda x, x) = 0, \tag{1.8}$$

$$p(x) > \lambda \iff (L_\lambda x, x) < 0. \tag{1.9}$$

Следствие 1.4. Если $\lambda \in p\mathcal{J}$, $x \in P_\lambda \setminus \{0\}$, то $p(x) = \lambda$.

Следствие 1.5. Если p — d -ограничен, то $L_{\gamma_d} > 0$.

Соответствующим образом следствие 1.5 формулируется для s -ограниченного функционала. В дальнейшем мы все формулируем для правого конца γ_d .

Следствие 1.6. Если p — d -ограничен, то справедливо неравенство

$$\|L_{\gamma_d} x\|^2 \leq \|L_{\gamma_d}\| \|L_{\gamma_d} - L_{p(x)}\| \|x\|^2, \quad x \neq 0. \tag{1.10}$$

Доказательство. Так как $L_{\gamma_d} \geq 0$, то (1.10) следует из неравенства Рида [16] и (1.3).

2. Леммы о структуре множеств σ_i , π_i и ω

Лемма 2.1. Множества ω , σ_i , π_i , $i=1, 2$ — замкнуты, а множества $\mathcal{W}$ и ω — выпуклы.

Доказательство леммы не сложно, однако громоздко, поэтому мы его опускаем.

Лемма 2.2. Множества σ_1 , π_1 , σ_2 и ω не пусты $\gamma_d, \gamma_c \in \sigma_1$. Если p — d -ограничен и $0 \notin p\mathcal{J}(L_{\gamma_d})$, то $\gamma_d \in \pi_1$.

Доказательство. Так как $\dim H = \infty$, то $\chi_0 \neq \emptyset$, поэтому $\omega \neq \emptyset$. То, что $\pi_1 \neq \emptyset$, будет показано позднее (см. § 5). Если p — d -неограничен, то $d \in \sigma_1, \sigma_2$ по определению. В противном случае найдем $\{x_n\} \in \chi$, $p(x_n) \rightarrow \gamma_d$. Из неравенства (1.10) тогда $\gamma_d \in \sigma_2$. Пусть теперь $0 \notin p\mathcal{J}(L_{\gamma_d})$. Можно считать, что $x_n \rightarrow x$. Тогда $L_{\gamma_d} x = 0$ и, тем самым, $x = 0$, т. е. $\gamma_d \in \pi_2$.

Лемма 2.3. Пусть $E \subseteq H$, $\text{codim } E < \infty$ и $\gamma = \gamma_d(E) \notin \pi_2$. Тогда существует элемент $y \in E \setminus \{0\}$ такой, что $\gamma = p(y)$ и $PL_\gamma y = 0$, где P — проектор на E . В частности, $\gamma \in \mathcal{W}$.

Доказательство. Пусть, сначала $E = H$. Так как $\gamma_d \notin \pi_2$, то p — d -ограничен. По лемме 2.2 $\gamma_d \in \sigma_2$, т. е. существует $\{y_n\} \in \chi$, $p(y_n) \rightarrow \gamma_d$, $L_{\gamma_d} y_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow y \neq 0$. Покажем, что $p(y) = \gamma_d$. Допустим, что $p(y) < \gamma_d$. Тогда в силу непрерывности p , $z_n = y_n - y \rightarrow 0$. Положив $\tilde{z}_n = z_n / \|z_n\|$, будем иметь $\{\tilde{z}_n\} \in \chi_0$. Пусть $p(y) < \lambda < \gamma_d$. Тогда $(L_\lambda z_n, z_n) = (L_\lambda y_n, y_n) - 2(L_\lambda y, y_n) + (L_\lambda y, y)$. Из (1.7) и того, что $d_n = -2(L_\lambda y_n, y) + (L_\lambda y, y) - (-L_\lambda y, y)$ следует, что $d_n < 0$ для достаточно

большого n . Далее, так как $\lambda < \gamma_d$ и $p(y_n) \rightarrow \gamma_d$, то $p(y_n) > \lambda$ и поэтому $(L_\lambda y_n, y_n) < 0$. Таким образом, для достаточно большого n (зависящего от λ) $(L_\lambda z_n, z_n) < 0$, поэтому в силу (1.2) и (1.9) $p(\tilde{z}_n) > \lambda$.

Устремляя λ к γ_d , найдем последовательность $\{x_n\} \subset \{\tilde{z}_n\}$, $p(x_n) \rightarrow \gamma_d$. Из (1.10) тогда $L_{\gamma_d} x_n \rightarrow 0$ и противоречит тому, что $\gamma_d \notin \pi_2$. Пусть теперь $\text{codim } E < \infty$. По лемме 2.2, примененной к с.Р. (PL, p) на E , найдем $\{y_m\} \subset E$, $\|y_m\| = 1$, $p(y_m) \rightarrow \gamma$, $PL_\gamma y_m \rightarrow 0$, $y_m \rightarrow y$. Покажем, что $y \neq 0$. Действительно, из разложения $L_\gamma y_m = PL_\gamma y_m + P^\perp L_\gamma y_m$ и вполне непрерывности $P^\perp$ следует, что $L_\gamma y_m \rightarrow P^\perp L_\gamma y$. Теперь, если бы $y = 0$, то $\gamma \in \pi_2$. Далее, $y \in E$, $PL_\gamma y = 0$ и $(L_\gamma y, y) = (PL_\gamma y, y) = 0$. Заметим, что $\gamma \in \mathcal{W}$. Действительно, $\gamma \in \overline{\mathcal{W}}$ и если $\gamma = \gamma_d(H)$ или $\gamma_c(H)$, то из первой части доказательства $\gamma \in \mathcal{W}$. Из (1.8) тогда $p(y) = \gamma$.

Следующая лемма есть аналог критерия Вейля.

Лемма 2.4. *Точка $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$ тогда и только тогда, когда λ — изолированная точка σ_1 , являющаяся собственным значением конечной кратности и 0 — изолированная точка спектра оператора L_λ .*

Доказательство. Пусть 0 — изолированная точка $\sigma(L_\lambda)$ и $\lambda \in p^\perp$ — собственное значение конечной кратности. Тогда в силу критерия Вейля $0 \in \sigma(L_\lambda) \setminus \pi(L_\lambda)$, что эквивалентно $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Пусть теперь $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, тогда $0 \in \sigma(L_\lambda) \setminus \pi(L_\lambda)$, в частности, $\lambda \in p^\perp$ и $\dim P_\lambda < \infty$. (Если $\lambda = \gamma_c$ или γ_d , это следует из леммы 2.3). Докажем изолированность λ в σ_1 . Пусть $\lambda_n \in \sigma_1$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$. В силу замкнутости π_1 (лемма 2.1) можно считать, что $\lambda_n \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, поэтому $\{\lambda_n\} \subset p^\perp$. Пусть $\{x_n\} \in \chi$ — соответствующие собственные вектора. Можно считать, что $x_n \rightarrow x$. Легко видеть, что $L_\lambda x_n \rightarrow 0$. Покажем, что $x = 0$. Положим $\varphi(\mu) = (L_\mu x, x)$. Тогда φ — дифференцируема на (c, d) и $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_n) = 0$. Поэтому найдется θ_n между λ и λ_n такое, что $(L'_{\theta_n} x, x_n) = 0$. Используя непрерывность L'_μ , имеем $L'_{\theta_n} x \rightarrow L'_\lambda x$, в частности, $(L'_\lambda x, x) = 0$. С другой стороны, $(L_\lambda x, x) = 0$. Заметим, что $\lambda \in \mathcal{W}$. Если $\lambda = \gamma_c$ или γ_d , то так как $\lambda \notin \pi_1$, согласно лемме 2.3 $\lambda \in \mathcal{W}$. Таким образом, всегда $\lambda \in \mathcal{W}$ и по (1.8), если $x \neq 0$, то $p(x) = \lambda$ и, тем самым, $(L_{p(x)} x, x) = 0$. А это противоречит (1.4). Таким образом, $x = 0$ и мы получили противоречие с тем, что $\lambda \notin \pi_1$.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2.5. *Если $\lambda \in \sigma_2 \setminus \pi_2$, то λ — изолированная точка σ_2 и собственное значение конечной кратности.*

Положим

$$\gamma_d^{(\omega)} = \sup \{\lambda: \lambda \in \omega\}, \quad \gamma_d^{(\pi_i)} = \sup \{\lambda: \lambda \in \pi_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Соответствующим образом вводятся $\gamma_c^{(\omega)}$ и $\gamma_c^{(\pi_i)}$.

Лемма 2.6. 1) $\gamma_d^{(\pi_1)} \leq \min \{\gamma_d^{(\pi_1)}, \gamma_d^{(\omega)}\}$, 2) если $\gamma_d \notin \pi_1$, то $\gamma_d^{(\pi_1)} \leq \gamma_d^{(\omega)}$.

Доказательство. 1) следует из (1.6). Положим $\lambda_0 = \gamma_2^{(\alpha)}$ и $\gamma = \sup_{x \neq 0} (-L_\lambda x, x)/(x, x)$. При доказательстве 2) надо отдельно рассматривать два случая $\gamma \in p_2(-L_{\lambda_0})$ и $\gamma \in p_2(-L_{\lambda_0})$. Детали опускаем.

Замечание 2.7. В критерии Вейля (лемма 2.4) условие: 0 — изолированная точка спектра оператора L_λ — существенно. Также, в лемме 2.6, 2) существенно условие $\gamma \in \pi_1$. Для того и другого случая контр-пример уже дает специально построенный квадратичный пучок.

3. Леммы о свойствах функции $R(\lambda, x)$

Пусть $M: (\alpha, \beta) \rightarrow B$. Если в точке λ существует $M_\lambda^{-1} \in B$, то λ отнесем к резольвентному множеству $\rho(M)$, а оператор $R_\lambda = M_\lambda^{-1}$ будем называть резольвентой.

Обычным образом доказывается следующая

Лемма 3.1. 1). Если M_λ непрерывна по λ в точке λ_0 и $\lambda_0 \in \rho(M)$, то в некоторой окрестности λ_0 (окрестность в R) существует резольвента R_λ , непрерывная в λ_0 . 2). Если в точке λ_0 существует M_{λ_0}' , то $R_{\lambda_0}' = -R_{\lambda_0} M_{\lambda_0}' R_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \rho(M)$.

Введем следующее обозначение

$$\Delta_M[\alpha, \beta] = \begin{cases} (\alpha - \beta)^{-1} (M_\alpha - M_\beta), & \alpha \neq \beta, \\ M_\alpha', & \alpha = \beta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для функции L_λ значок L внизу будем опускать.

Следующую лемму можно найти в [17].

Лемма 3.2. Пусть $A \in S$ и $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \pi(A)$. Тогда в некоторой (проколотой) окрестности λ_0 для резольвенты r_λ оператора A справедливо разложение

$$r_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} + q_\lambda, \quad (3.2)$$

причем функция q_λ дифференцируема в точке λ_0 и $q_{\lambda_0}' = -q_{\lambda_0}^2$, $q_{\lambda_0}': P_{\lambda_0}^\perp \rightarrow P_{\lambda_0}^\perp$.

Лемма 3.3. Пусть $(L, p) - c. P.$ и $\lambda_0 \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Тогда в некоторой окрестности λ_0 для резольвенты R_λ справедливо разложение

$$R_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} K_\lambda + Q_\lambda, \quad (3.3)$$

причем функции K_λ и Q_λ непрерывны в точке λ_0 и

$$K_{\lambda_0} x = L_{\lambda_0} Q_{\lambda_0} x = x, \quad x \in P_{\lambda_0}^\perp. \quad (3.4)$$

Доказательство. Положим $A = \lambda_0 I - L_{\lambda_0}$. Легко видеть, что $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \pi(A)$. Из обычного критерия Вейля и леммы 2.4 следует, что найдется некоторая общая окрестность $(\alpha, \beta) \setminus \{\lambda_0\}$, в которой определены функции r_λ и R_λ . Положим $H_\lambda = I + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) r_\lambda$. Используя (3.2), найдем, что

$$R_\lambda = r_\lambda \cdot H_\lambda^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} H_\lambda^{-1} + q_\lambda H_\lambda^{-1}. \quad (3.5)$$

Положим $K_\lambda = H_\lambda^{-1}$, $Q_\lambda = q_\lambda H_\lambda^{-1}$. Из (3.2) имеем

$$H_\lambda = I + (\Delta[\lambda, \lambda_0] - I) P_{\lambda_0} + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) q_\lambda. \quad (3.6)$$

Доопределим H_{λ_0} в точке λ_0 по формуле

$$H_{\lambda_0} = I + (L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что функция H_λ непрерывна на области определения и

$$H_\lambda - H_{\lambda_0} = (\Delta[\lambda, \lambda_0] - \Delta[\lambda_0, \lambda_0]) P_{\lambda_0} + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) q_\lambda. \quad (3.8)$$

Покажем, что $\lambda_0 \in \rho(H)$. Допустим, что это не так. Так как оператор $(L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0}$ вполне непрерывен (в силу леммы 2.4 P_{λ_0} — конечномерен), то существует $y \neq 0$, $H_{\lambda_0} y = y + (L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0} y = 0$. Поэтому $(L'_{\lambda_0} (P_{\lambda_0} y), P_{\lambda_0} y) = 0$, $P_{\lambda_0} y \neq 0$. Из следствия 1.4 $\rho(P_{\lambda_0} y) = \lambda_0$ и мы получим противоречие с (1.4). Таким образом, $\lambda_0 \in \rho(H)$. Теперь по лемме 3.1 и 3.2 получим, что (3.3) есть следствие (3.5). Свойства (3.4) следуют из (3.3) и (3.7).

В разложении (3.3) функции K_λ и Q_λ зависят от λ_0 . Эту зависимость мы иногда будем отмечать верхним индексом. Удобно для $\lambda \notin \rho$ считать $P_\lambda = \{0\}$, $P_\lambda = 0$. Определим функции $Q_\lambda^{(\lambda_0)}$ и $K_\lambda^{(\lambda_0)}$ в точках $\lambda, \lambda_0 \in [\gamma_c, \gamma_d] \setminus \sigma_1$ по формулам

$$Q_\lambda^{(\lambda_0)} = R_\lambda, \quad K_\lambda^{(\lambda_0)} = I.$$

Введем следующие функции на множестве $[\gamma_c, \gamma_d] \setminus \pi_1$:

$$\hat{R}_\lambda = Q_\lambda^{(\lambda)}, \quad \hat{I}_\lambda = K_\lambda^{(\lambda)}, \quad \hat{F}_\lambda = (I - P_\lambda \hat{I}_\lambda L'_\lambda) \hat{R}_\lambda,$$

$$R(\lambda, x) = R(\lambda) = (\hat{R}_\lambda x, x), \quad x \in H.$$

Лемма 3.4. Справедливы равенства

$$L_\lambda \hat{F}_\lambda x = L_\lambda \hat{R}_\lambda x = \hat{I}_\lambda x, \quad x \in P_\lambda^\perp, \quad (3.9)$$

$$L'_\lambda \hat{F}_\lambda = L'_\lambda \hat{R}_\lambda L'_\lambda \hat{R}_\lambda. \quad (3.10)$$

Доказательство. (3.9) есть следствие (3.4) и определений, (3.10) выводится из (3.3).

Лемма 3.5. Пусть $\lambda_0 \in [\gamma_c, \gamma_d] \setminus \pi_1$ и $x \in P_{\lambda_0}^\perp$. Тогда функция $R(\lambda, x)$ дифференцируема в точке λ_0 и

$$R(\lambda_0, x) = (L_{\lambda_0} \hat{F}_{\lambda_0} x, \hat{F}_{\lambda_0} x), \quad R'(\lambda_0, x) = -(L'_{\lambda_0} \hat{F}_{\lambda_0} x, \hat{F}_{\lambda_0} x). \quad (3.11)$$

Доказательство. Если $\lambda_0 \notin \sigma_1$, то первая часть (3.11) очевидна, а вторая следует из леммы 3.1. Пусть поэтому, $\lambda_0 \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Нетрудно показать, что

$$R'(\lambda_0) = (q'_{\lambda_0} \hat{I}_{\lambda_0} x, x) - (q_{\lambda_0} \hat{I}_{\lambda_0} (L'_{\lambda_0} - I) q_{\lambda_0} x, x).$$

Далее, используя, что $x, q_{\lambda_0} x \in P_{\lambda_0}^\perp$, а также лемму 3.2 и тождество (3.9), предыдущее равенство приводится к виду $R'(\lambda_0) = -(\hat{R}_{\lambda_0} L'_\lambda \hat{R}_{\lambda_0} x, x)$.

Теперь, используя (3.9) и (3.10), нетрудно получить второе равенство в (3.11). Первая часть (3.11) следует из (3.9).

Лемма 3.6. *Справедливы следующие свойства функции $R(\lambda, x)$:*

1) если $\lambda \in \pi_1$, $y \in P_{\lambda}^+ \setminus \{0\}$ и $R(\lambda, y) = 0$, то $R'(\lambda, y) < 0$,

2) если $\alpha \in \overline{W}$, $(\alpha, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$ и $y \in P_{\lambda}^+ \setminus \{0\}$, $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, то $R(\lambda, y) > 0$, $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$.

Доказательство. Заметим, что в силу леммы 2.3 $\lambda \in W$.

1) Пусть $R(\lambda, y) = 0$, тогда из (3.9) и (3.11) следует, что $(L_{\lambda} F_{\lambda} y, F_{\lambda} y) = 0$, $F_{\lambda} y \neq 0$. Поэтому $p(F_{\lambda} y) = \lambda$, и 1) следует из (1.4) и (3.11). По лемме 3.5 $R(\lambda, y)$ — дифференцируема на $(\alpha, \gamma_d]$. Из следствия 1.5 и (3.11) $R(\gamma_d, y) \geq 0$. Покажем, что $R(\gamma_d, y) > 0$. Допустив противное, из (1.11) и (3.11) получим $F_{\gamma_d} y \neq 0$ и $p(F_{\gamma_d} y) = \gamma_d$. Из неравенства (1.10), $L_{\gamma_d} F_{\gamma_d} y = 0$ и из (3.11) получим противоречие $y = 0$.

Допустим, что существуют точки из $(\alpha, \gamma_d]$, в которых $R(\lambda, y) = 0$. В силу непрерывности и того, что $R(\gamma_d, y) > 0$, существуют точки $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, в которых $R(\lambda, y) = 0$. Пусть γ — самая правая из таких точек, тогда $\gamma < \gamma_d$. Согласно 1) $R'(\gamma, y) < 0$, следовательно, в правой стороне окрестности γ $R(\lambda, y) < 0$. Но $R(\gamma_d, y) > 0$, поэтому интервал (γ, γ_d) содержит нуль $R(\lambda, y)$, что противоречит выбору γ . Таким образом, 2) доказано.

Лемма 3.7. *Пусть $\alpha \in W$, $x \neq 0$ и $(\alpha, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$. Если $\hat{x} = L_{p(x)} x \neq 0$ и $\hat{x} \in P_{\lambda}^+$ для $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, то $p(x) \leq \alpha$.*

Доказательство. Если $p(x) \in (\alpha, \gamma_d]$, то из (3.9) и (3.11) $R(p(x), \hat{x}) = 0$, а это противоречит п. 2) леммы 3.6.

4. Некоторые другие леммы

Введем следующие формы для $\lambda \in (c, d)$:

$$[x, y]_{\lambda} = \begin{cases} (\Delta[\lambda, p(y)] x, y) \neq 0, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad [x, y] = \begin{cases} [x, y]_{p(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства этих форм, которыми мы будем, не оговаривая, пользоваться:

1°. если $\lambda \in W$, то $[x, x]_{\lambda} > 0$, $[x, x]_{\lambda} = 0 \iff x = 0$,

2°. $[x, x] \geq 0$, $[x, x] = 0 \iff x = 0$,

3°. $[x, y] = [y, x]$, форма $[x, y]_{\lambda}$ линейна по первому аргументу,

4°. если (λ, x) и (μ, y) — собственные пары, $\lambda \neq \mu$, то $[x, y] = 0$,

5°. если $\lambda \in p\sigma$, то форма $[x, y]$ на P_{λ} есть скалярное произведение,

6°. если (λ_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$ — собственные пары и $[x_i, x_j] = \delta_{ij}$, то элементы $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимы,

7°. если (λ, y) — собственная пара, $x \neq 0$ и $[x, y] = 0$, то $(x, y) = 0$.

Лемма 4.1. Пусть $E \in E_N$ и $y_1, \dots, y_n$ — произвольные элементы из H . Если $n < N$, то существует $x \in E \setminus \{0\}$ такой, что $[x, y_i] = 0, i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $N < \infty$. Пусть $\mu_0 \in \mathcal{W}$. Найдем элемент $z_0 \in E, \|z_0\| = 1$ и $(\Delta[\mu_0, p(y_i)]y_i, z_0) = 0, i = 1, \dots, n$. Это всегда можно сделать, так как $n < N$. Положив $\mu_1 = p(z_0)$, рекуррентно определим последовательность $\{z_k\} \subset E, \|z_k\| = 1$:

$$(\Delta[\mu_k, p(y_i)]y_i, z_k) = 0, i = 1, \dots, n, \mu_k = p(z_{k-1}).$$

В силу конечномерности E можно считать, что $z_k \rightarrow x, \|x\| = 1$. Тогда $\mu_k \rightarrow p(x)$ и $[x, y_i] = 0, i = 1, \dots, n$.

Пусть $\lambda_i \in \mathcal{P}, \lambda_1 > \dots > \lambda_n$ — собственные значения, повторяющиеся со своей кратностью. Согласно 4'—6' собственные элементы $x_1, \dots, x_n$, им соответствующие, можно выбрать линейно независимыми. Положим

$$X_n = [x_1, \dots, x_n], E^n = H \ominus X_n, x_n(\lambda) = \Delta[\lambda, \lambda_n] x_n,$$

$$X_n(\lambda) = [x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda)], E^n(\lambda) = H \ominus X_n(\lambda), \lambda \in (c, d).$$

Из определений непосредственно видно, что $X_n \in E_n, E^n \in E^n$ и

$$L_\lambda: E^n(\lambda) \rightarrow E^n, [x, x_i] = (x, x_i(\lambda)), i = 1, \dots, n.$$

Введем также обобщенную матрицу Грама для векторов $x_1, \dots, x_n$.

$$A_\lambda = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n, a_{ij}(\lambda) = [x_i, x_j]_\lambda, \lambda \in (c, d).$$

Через e_λ^i обозначим ортогональный проектор на $E^i(\lambda)$.

Лемма 4.2. Пусть $\lambda \in \mathcal{W}, \lambda \leq \lambda_n$. Тогда: 1) $\det A_\lambda \neq 0$, 2) $X_n(\lambda) \in E_n, E^n(\lambda) \in E^n$, 3) $H = X_n + E^n(i)$, 4) e_λ^i — непрерывная функция.

Доказательство. 1) доказано в работе [8]; 2) и 3) — непосредственное следствие 1); 4) доказывается обычным образом с использованием непрерывности функций $a_{ij}(\lambda)$ и 1).

Лемма 4.3. Пусть $x \neq 0$. Если выполнено одно из условий

$$1) [x, x_i]_\lambda = 0, i = 1, \dots, n, \lambda \in \mathcal{W} \text{ и } \lambda \leq \lambda_n,$$

$$2) [x, x_i] = 0, i = 1, \dots, n, p(x) \leq \lambda_n,$$

то элементы $x_1, \dots, x_n, x$ линейно независимы.

Доказательство. 1) следует из п. 3) леммы 4.2, а 2) — из того, что $[x, x_i] = [x, x_i]_\lambda, \lambda = p(x)$ и 1).

Введем в рассмотрение функцию:

$$\Gamma(\lambda) = \Gamma^n(\lambda) = \gamma_d(E^n(\lambda)), \lambda \in (c, d).$$

Положим также $\overline{\Gamma}^n(\lambda) = \overline{\lim}_{\mu \rightarrow \lambda} \Gamma^n(\mu), \underline{\Gamma}^n(\lambda) = \underline{\lim}_{\mu \rightarrow \lambda} \Gamma^n(\mu)$.

Лемма 4.4. Пусть $\lambda_0 \in \mathcal{W}$ и $\lambda_0 \leq \lambda_n$. Если $[\underline{\Gamma}^n(\lambda_0), \overline{\Gamma}^n(\lambda_0)] \cap \pi_2 = \emptyset$, то функция $\Gamma^n(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0 .

Доказательство. Полунепрерывность снизу $\underline{\Gamma}^n(\lambda_0) \geq \Gamma^n(\lambda_0)$ доказывается обычным образом с использованием непрерывности p и

$\mu_k \rightarrow \lambda_0$. Покажем, что $\overline{\Gamma^n(\lambda_0)} < \Gamma^n(\lambda_0)$. Пусть $\mu_k \rightarrow \lambda_0$, $\Gamma(\mu_k) \rightarrow s$. В силу условий леммы и замкнутости π_2 , для достаточно большого k , $\Gamma(\mu_k) \in \overline{\pi_2}$. По лемме 2.3 для этих k найдем элементы $y_k \in E^n(\mu_k)$, $\|y_k\| = 1$, такие, что $\Gamma(\mu_k) = p(y_k)$ и $e_{\mu_k}^n L_{p(y_k)} y_k = 0$. Считая $y_k \rightarrow y$, покажем, что $y \neq 0$. Допустим, что $y = 0$. Нетрудно видеть, что $(e_{\mu_k}^n)^{\perp} L_{p(y_k)} y_k \rightarrow 0$. Отсюда, нетрудно вывести, что $L_s y_k \rightarrow 0$, поэтому $s \in \pi_2$. Но это противоречит тому, что $s \in [\overline{\Gamma^n(\lambda_0)}, \overline{\Gamma^n(\lambda_0)}]$. Используя непрерывность $e_{\lambda}^{(n)}$ (лемма 4.2, 4), а также (1.8), можно получить, что $y \in E^n(\lambda_0)$ и $p(y) = s$. Окончательно получим $\Gamma^n(\lambda_0) > p(y) = s$.

Положим

$$\underline{n} = \min \{i: \lambda_i = \lambda_n\}, \quad \overline{n} = \max \{i: \lambda_i = \lambda_n\}.$$

Как легко видеть, имеет место следующая

Лемма 4.5. 1) Если $n < \overline{n}$, то существует $x \neq 0$, $\hat{x} = 0$, $p(x) = \lambda_n$ и $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$; 2) если $n = \overline{n}$, $(\lambda_{i+1}, \lambda_i) \cap p^\perp = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$ и $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$, $x \neq 0$, то либо $\hat{x} \neq 0$, либо $p(x) < \lambda_n$.

В заключение параграфа приведем некоторую, легко проверяемую модификацию одной леммы из работы [4]:

Лемма 4.6. Если $x \in X_l$, $x \neq 0$, то $\lambda_l \leq p(x) \leq \lambda_l$.

5. Основные теоремы

Следующая теорема есть аналог принципа Релея.

Теорема 5.1. Пусть $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$. Тогда множество $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 \neq \emptyset$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > \dots$ ($\lambda_1 = \gamma_d$), которым соответствует такая последовательность линейно независимых собственных элементов, что

$$\max_{\substack{[x, x_i] = 0 \\ i=1, \dots, n-1}} p(x) = \lambda_n, \quad [x_i, x_j] = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

причем максимум в (5.1) достигается на элементе x_n ($n = 1, 2, \dots$).

Доказательство. Первая часть теоремы следует из лемм 2.2 и 2.4. Равенство (5.1) для $n=1$ вытекает из следствия 1.4. Допустив, что (5.1) доказано для $k=1, \dots, n$, покажем его справедливость для $k=n+1$. Рассмотрим два случая. а) $n < \overline{n}$. В этом случае надо воспользоваться леммой 4.5, 1) и индукционным предположением. б) $n = \overline{n}$, т. е. $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Пусть $x_i \neq 0$, $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$. Из индукционного предположения следует, что $p(x) \leq \lambda_n$. Если $\hat{x} = 0$, то по лемме 4.8, 2) $p(x) < \lambda_n$. Но так как $p(x) \in p^\perp$ и $(\lambda_{n+1}, \lambda_n) \cap p^\perp = \emptyset$, то $p(x) \leq \lambda_{n+1}$. Если же $\hat{x} \neq 0$, то так как $\hat{x} \in P_{\lambda}^\perp$, $\lambda \in (\lambda_{n+1}, \gamma_d]$, предыдущее неравенство следует из леммы 3.7 с $\alpha = \lambda_{n+1}$. Максимум дости-

гается на собственном элементе в силу следствия 1.4. Линейная независимость $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ следует из леммы 4.3.

Теорема 5.2. Пусть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, $(\lambda_1 = \gamma_d)$ — собственные значения, причем $[\lambda_n, \lambda_1] \cap \pi_1 = \emptyset$. Если $x \neq 0$, $[x, x_i] = 0$, $i=1, \dots, n$, то

$$p(x) < \lambda_n, [p(x), \lambda_n] \cap \sigma_1 \neq \emptyset. \quad (5.2)$$

Доказательство. Если $x=0$, то по лемме 4.5, 2) $p(x) < \lambda_n$. В этом случае $p(x) \in p\sigma$ и (5.2) очевидно. Если теперь $x \neq 0$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $(\lambda_n - \varepsilon, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$. В частности, $x \in P_\lambda^+$, $\lambda \in (\lambda_n - \varepsilon, \gamma_d]$. По лемме 3.7 ($\alpha = \lambda_n - \varepsilon$) $p(x) \leq \alpha = \lambda_n - \varepsilon < \lambda_n$. Допустив, что $[p(x), \lambda_n] \cap \sigma_1 = \emptyset$, имеем $(p(x) - \varepsilon, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$ и $\hat{x} \in P_\lambda^+$, $\lambda \in (p(x) - \varepsilon, \gamma_d]$. Поэтому снова, используя лемму 3.7 ($\alpha = p(x) - \varepsilon$), получим противоречие $p(x) \leq p(x) - \varepsilon$.

Следствие 5.3. Пусть $[x, x_i] = 0$, $i=1, \dots, n$ и $p(x) > \gamma_d^{(\pi_1)}$.

Тогда

$$[p(x), \lambda_n] \cap p\sigma \neq \emptyset.$$

Пусть $\gamma_d^{(\pi_1)} < \gamma_d$, тогда согласно лемме 2.2 и 2.4 множество $(\gamma_d^{(\pi_1)}, \gamma_d] \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Введем функцию распределения числа собственных значений, т. е. пусть $n(\lambda)$ — число собственных значений в интервале $(\lambda, \gamma_d]$, где $\lambda > \gamma_d^{(\pi_1)}$. Положим также

$$E = \bigcup_n E_n, K(\lambda) = \{E \in E: p(x) > \lambda, x \in E \setminus \{0\}\}. \quad (5.3)$$

Тогда

1°. $n(\lambda) > 1$, $n(\lambda)$ — неубывающая функция,

2°. $K(\lambda) = E$, $\lambda < \gamma_d$ и $K(\lambda) = \emptyset$, $\lambda > \gamma_d$,

3°. $K(\lambda) = \{E \in E: (L_\lambda x, x) < 0, x \in E \setminus \{0\}\}$.

Следующая теорема есть аналог одного результата И. М. Глазмана (см., например, [18]).

Теорема 5.4. Справедливо равенство

$$n(\lambda) = \sup_{E \in K(\lambda)} \dim E, \quad \lambda > \gamma_d^{(\pi_1)}. \quad (5.4)$$

Доказательство. Через n и N обозначим левую и правую часть (5.4) соответственно. Пусть $n < N$ и $E \in K(\lambda)$ такое, что $n < \dim E$. Согласно лемме 4.1 найдем $x \in E \setminus \{0\}$, $[x, x_i] = 0$, $i=1, \dots, n$. Тогда $p(x) > \lambda \geq \gamma_d^{(\pi_1)}$ и в силу следствия 5.3 $[p(x), \lambda_n] \cap p\sigma \neq \emptyset$. Поэтому $n \geq N$. В случае $N = \infty$, (5.4) справедливо. Пусть, поэтому $N < \infty$. Если $n > N$, то интервал $(\lambda, \gamma_d]$ содержит не менее $N+1$ собственных значений. По лемме 4.6 $X_{N+1} \in K(\lambda)$, а это дает противоречие $N \geq \dim X_{N+1} = N+1$.

Известно, что если $A \in S_-, A > 0$ (это эквивалентно условию $\gamma_c = 0 \in \bar{W}$, $\pi(A) = \{0\}$), то A имеет счетное множество собственных значений. Нелинейным аналогом этого результата является

Теорема 5.5. *Если $\gamma_c \in \bar{W}$ и $\pi_1 = \{\gamma_c\}$, то существует счетное множество собственных значений конечной кратности, имеющих единственную предельную точку γ_c .*

Доказательство. В этом случае $\gamma_d^{(c)} = \gamma_c$, $H \in K(\gamma_c)$. Теперь теорема следует из леммы 2.4 и (5.4).

Нам нужен следующий аналог „неравенства Вейля“:

Лемма 5.6. *Если $E \in E^i$, $1 \leq i \leq \bar{n}-1$, то $\sup_E p(x) \geq \lambda_n$.*

Доказательство. Так как $i \leq \bar{n}-1$, то существует $y \neq 0$, $y \in X_n \cap E$. Тогда по лемме 4.6 $\sup_E p(x) \geq p(y) \geq \lambda_n = \lambda_n$.

Следующая теорема есть также аналог принципа Релея (ср. с (5.1)).

Теорема 5.7. *Пусть $(\beta, \gamma_d) \cap \pi_2 = \emptyset$. Тогда множество $(\beta, \gamma_d) \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_1 > \dots \geq \lambda_n \geq \dots$ ($\lambda_1 = \gamma_d$), которым соответствует такая последовательность линейно независимых собственных элементов, что*

$$\max_{\substack{\{x, x_i\}_{\lambda_n=0} \\ i=1, \dots, n-1}} p(x) = \lambda_n, \quad (5.5)$$

причем максимум в (5.5) достигается на элементе x_n ($n=1, 2, \dots$).

Доказательство. (5.5), как и (5.1) доказывается по индукции и существенное различие в доказательстве начинается со случая б) (см. доказательство теоремы 5.1). По леммам 4.2, 2) и 4.6 $\Gamma^n(\lambda) \geq \lambda_{n+1}$ для $\lambda \leq \lambda_n$. Согласно лемме 4.4, тогда $\Gamma^n \in C[\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Кроме того, $\Gamma^n(\lambda_n) \leq \lambda_n$. Теперь нетрудно видеть, что существует точка $\theta \in [\lambda_{n+1}, \lambda_n]$ такая, что $\Gamma^n(\theta) = \theta$. По лемме 2.3 найдем $y \in E_\theta \setminus \{0\}$ такой, что $e_\theta^0 L_\theta y = 0$ и $p(y) = \theta$. Теперь из п. 3 леммы 4.2 видим, что $L_\theta y = 0$, т. е. $\theta \in p^\circ$ и поэтому $\theta \in (\lambda_{n+1}, \lambda_n)$. Если бы $\theta = \lambda_n$, то $y \in X_n$. Но $E^n(\lambda_n) \cap X_n = \{0\}$ и поэтому $\theta = \lambda_{n+1} = p(y)$, что и доказывает (5.5) для $k = n+1$. Оставшаяся часть доказательства как в теореме 5.1.

Следующая теорема есть аналог принципа Фишера—Куранта—Вейля.

Теорема 5.8. *Если $(\beta, \gamma_d) \cap \pi_2 = \emptyset$, то*

$$\min_{E \in E^{n-1}} \max_E p(x) = \lambda_n. \quad (5.6)$$

Доказательство. (5.6) следует из леммы 5.6 и того, что на $E^{n-1}(\lambda_n) \in E^{n-1}$ неравенство Вейля превращается в равенство (см. (5.5)). Заметим, что в неравенстве Вейля верхняя грань достигается в силу леммы 2.3.

Другим вариантом неравенства Вейля является следующая

Лемма 5.9. Пусть $y_1, \dots, y_i \in H$, $1 \leq i \leq n-1$, тогда

$$\sup \{p(x), [x, y_j] = 0, j=1, \dots, i\} \geq \lambda_n.$$

Доказательство. По лемме 4.1 найдем $y \in X_n \setminus \{0\}$, $[y, y_j] = 0$, $j=1, \dots, i$. Далее доказательство как в лемме 5.6.

Аналогично (5.6) доказываемся другой вариант принципа Фишера—Куранта—Вейля.

Теорема 5.10. Если $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 = \emptyset$, то

$$\min_{y_1, \dots, y_{n-1}} \sup_{[x, y_j] = 0, j=1, \dots, n-1} p(x) = \lambda_n. \quad (5.7)$$

Нам нужен следующий аналог „неравенства Пуанкаре“.

Лемма 5.11. Если $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \emptyset$ и $E \in E_i$, $i > n$, то

$$\min_E p(x) \leq \lambda_n.$$

Доказательство. В силу того, что $E^{n-1}(\lambda_n) \in E^{n-1}$, существует $y \in E^{n-1}(\lambda_n) \cap E$, $y \neq 0$. Из теоремы 5.7 тогда $\min_E p(x) \leq p(y) \leq \max_{E^{n-1}(\lambda_n)} p(x) = \lambda_n = \lambda_n$.

Далее, не оговаривая, мы считаем, где нужно, выполненным условие теоремы 5.7.

Следующая теорема есть аналог принципа Пуанкаре—Ритца.

Теорема 5.12. Справедливо равенство

$$\max_{E \in E_n} \min_E p(x) = \lambda_n. \quad (5.8)$$

Доказательство. (5.8) есть следствие леммы 5.11 и того факта, что на $X_n \in E_n$ неравенство Пуанкаре превращается в равенство (см. лемму 4.6).

Если $E \subset H$, то на E индуцируется с.р. (PL, p) , где P —проектор на E . Пусть $\lambda_1(E) \geq \dots \geq \lambda_n(E) \geq \dots$ ее собственные значения. Обычным образом из вариационных принципов выводятся следующие следствия:

Следствие 5.13. Если (M, q) —другая с.р. и $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq \dots$ —ее собственные значения, причем $p(x) \leq q(x)$, $x \in H \setminus \{0\}$, то $\lambda_n \leq \mu_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Следствие 5.14. Пусть $E_2 \subseteq E_1 \subseteq H$, $n \leq \dim E_2$, тогда

$$\lambda_n(E_2) \leq \lambda_n(E_1).$$

Следствие 5.15. Пусть $\|p\| = \sup |p(x)|$, $\|q\| < \infty$, тогда

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq \|p - q\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следующая теорема есть аналог теоремы отделения Коши—Пуанкаре и следует из леммы 5.6 и теоремы 5.7.

Теорема 5.16. Пусть $E \in E^i$, тогда $\lambda_{n+1}^i \leq \lambda_n^i \leq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\lambda_n^i = \lambda_n(E)$.

Следствие 5.17. Если $E = E^i (\lambda_{n+i})$, то $\lambda_{n+i} = \lambda_n^i$.

Следующая теорема есть аналог принципа Стенджера [1].

Теорема 5.18. Пусть $n=1, 2, \dots$; $i=0, 1, 2, \dots$, тогда

$$\min_{E \in E^i} \max_{F \in E_n(E)} \min_F p(x) = \lambda_{n+i}.$$

Доказательство. Пусть $E \in E^i$. Из теоремы 5.16 и принципа Пуанкаре-Ритца $\lambda_{n+i} \leq \lambda_n^i = \max_{F \in E_n(E)} \min_F p(x)$. Заметим, далее, что следствие 5.17 обеспечивает существование подпространства $E \in E^i$ такого, что $\lambda_{n+i} = \lambda_n^i$.

Принципы Фишера—Куранта—Вейля и Пуанкаре—Ритца следуют из принципа Стенджера. Первый — при $n=1$, а второй — при $i=0$.

Следующая теорема есть аналог теоремы отделения Штурма [19].

Теорема 5.19. Пусть $H = E^0 \supset E^1 \supset \dots \supset E^k$, $E^i \in E^i$, тогда $\lambda_{n+1}^{i-1} \leq \lambda_n^i \leq \lambda_n^{i-1}$, т. е. собственные значения „перемеживаются“ $\lambda_1^{i-1} \geq \lambda_1^i \geq \lambda_2^{i-1} \geq \lambda_2^i \geq \lambda_3^{i-1} \geq \dots$.

Это есть легкое следствие принципа Стенджера и следствия 5.14.

6. Выпуклые и вогнутые системы Релея

В этом параграфе считаем функцию L_λ дважды дифференцируемой на некотором интервале Λ , $W \subset \Lambda \subset (c, d)$. Кроме того, пусть выполнено следующее условие:

$$(L'_\lambda x, x) > 0, \quad x \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (6.1)$$

являющееся усилением условия (1.4) в определении p .

Определение 6.1. Система Релея (L, p) называется выпуклой, вогнутой или линейной (на Λ), если соответственно $L'_\lambda \geq 0$, $L'_\lambda = 0$, $L'_\lambda \leq 0$, $\lambda \in \Lambda$. В последнем случае, $L_\lambda = \lambda B - A$.

С системой Релея (L, p) свяжем линейные с.Р. (L'_α, p_α) , $\alpha \in \Lambda$, где

$$L'_\alpha = \lambda L'_\alpha - (\alpha L'_\alpha - L_\alpha), \quad p_\alpha(x) = \alpha - (L_\alpha x, x) / (L'_\alpha x, x). \quad (6.2)$$

Для удобства формулировок мы рассматриваем только выпуклые с.Р.

Для вогнутых—результаты изменяются очевидным образом.

Доказательство следующей леммы несложно и использует идею „квазилинеаризации“ Р. Беллмана [20].

Лемма 6.2. Если (L, p) —выпуклая с.Р., то

$$p(x) = \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x).$$

Допустим, что $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \emptyset$, тогда для собственных значений из $(\beta, \gamma_d]$ справедлив принцип Пуанкаре-Ритца (5.8). По аналогии с (5.8) положим

$$\lambda_n(\alpha) = \sup_{E \in E_n} \min_E p_\alpha(x), \quad \alpha \in \Lambda, \quad n=1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Лемма 6.3. *Справедливо равенство $\lambda_n(\lambda_n) = \lambda_n$.*

Доказательство. Пусть $E \in E_n$, тогда в силу компактности сферы пространства E , $\min_E p(x) = p(x_0)$, $x_0 \in E$. Из (5.8) $\lambda_n \geq p(x_0)$ и поэтому $(L_{\lambda_n} x_0, x_0) \geq 0$. Следовательно, $\min_E p_{\lambda_n}(x) \leq \lambda_n$ и, тем самым, $\lambda_n(\lambda_n) \leq \lambda_n$. Если теперь $E = X_n$, то

$$\lambda_n(\lambda_n) = \min_{X_n} p_{\lambda_n}(x) = \lambda_n + \min_{X_n} \frac{(-L_{\lambda_n} x, x)}{(L'_{\lambda_n} x, x)}. \quad (6.4)$$

Из леммы 4.6 $p(x) \geq \lambda_n$, $x \in X_n$, поэтому $(-L_{\lambda_n} x, x)/(L'_{\lambda_n} x, x) \geq 0$, $x \in X_n$. Но так как $(L_{\lambda_n} x_n, x_n) = 0$, то второе слагаемое в (6.4) равно нулю. Это дает обратное неравенство $\lambda_n(\lambda_n) \geq \lambda_n$.

Лемма 6.4. *Если (L, p) — выпуклая с.Р., то*

$$\lambda_n = \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_n(\alpha).$$

Доказательство. Из леммы 6.2 $p(x) \leq p_\alpha(x)$, $\alpha \in \Lambda$. Тогда из (5.8) и (6.3) $\lambda_n(\alpha) \geq \lambda_n$. Теперь лемма 6.4 следует из леммы 6.3.

Используя вариационные принципы § 5, леммы 6.2 и 6.4, получим новые вариационные принципы для вогнутых и выпуклых с.Р. (они интересны тем, что в них не участвует функционал p , а все выражено через L_α и L'_α).

Теорема 6.5. *Пусть с.Р. (L, p) выпукла на Λ и выполнено условие (6.1), тогда справедливы следующие принципы:*

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \max_{\substack{[x, x_i]_{i=1, \dots, n-1} = 0 \\ i=1, \dots, n-1}} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \max_{\substack{[x, x_i]_{i=1, \dots, n-1} = 0 \\ i=1, \dots, n-1}} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \\ &= \min_{E \in E^{n-1}} \sup_{x \in E} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \min_{y_1, \dots, y_{n-1}} \sup_{[x, y_i]_{i=1, \dots, n-1} = 0} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \\ &= \max_{E \in E_n} \min_{x \in E} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \min_{\alpha \in \Lambda} \sup_{E \in E_n} \min_{x \in E} p_\alpha(x), \\ \lambda_{n+i} &= \min_{E \in E^i} \max_{F \in E_n(E)} \min_{x \in F} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x), \end{aligned}$$

где $p_\alpha(x) = \alpha - (L_\alpha x, x)/(L'_\alpha x, x)$, $n=1, 2, \dots$; $i=0, 1, 2, \dots$.

7. Некоторые следствия

1°. В работе [4] Роджерс показал, что в случае конечномерного пространства H существует базис из собственных элементов с.Р., а для собственных значений справедливы принципы (5.6) и (5.8). В [5] Хаделер установил справедливость принципа (5.1). В этом случае $\pi_1 =$

$= \pi_2 = \emptyset$. Указанные результаты следуют из теорем 5.4, 5.6 и 5.8.

2°. В работе [11] Вернер доказал, что для собственных значений из интервала $(\gamma_d^{(w)}, \gamma_d]$ справедлив принцип Пуанкаре-Ритца. Его результат, а также справедливость и других принципов следуют из леммы 2.6 и теорем § 5.

3°. Пусть (L, p) —система Релея с функцией

$$L_\lambda = r(\lambda) B_\lambda - A_\lambda, \lambda \in (c, d), \quad (7.1)$$

где $r(\lambda)$ —непрерывная на (c, d) функция, $B_\lambda, A_\lambda: (c, d) \rightarrow S$ —непрерывные операторозначные функции, причем $|(B_\lambda x, x)| \geq k |x|^2, k > 0$ и $A_\lambda \in S_-, \lambda \in \mathbb{W}$. Считая $r(c) = r(d) = 0$, положим $\Lambda_r = \{\lambda \in \mathbb{W}: r(\lambda) = 0\}$. Нетрудно видеть, что $\pi_1 = \Lambda_r$ и, тем самым, для собственных значений из $(\beta, \gamma_d]$ справедливы все принципы § 5 с $\beta = \max\{\lambda: \lambda \in \Lambda_r\}$.

4°. В работе [8] Хаделер рассмотрел с.Р. с функцией

$$L_\lambda = r(\lambda) I - A_\lambda, \lambda \in (c, d), \quad (7.2)$$

где $r(\lambda)$ и A_λ удовлетворяют условиям п. 3. Так как (7.2) есть (7.1) при $B_\lambda = I$, то результаты Хаделера следуют из п. 3.

5°. В работе [6] Тёрнер рассмотрел с.Р. с функцией

$$L_\lambda = \lambda^n B_n + \dots + \lambda^2 B_2 + \lambda I - A, \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (7.3)$$

где $B_i \in S, A \in S_-, B_i \geq 0, i=2, \dots, n, A > 0$, а $p(x)$ есть единственное решение уравнения

$$(L_\lambda x, x) = 0, \lambda \in R^+. \quad (7.4)$$

Тёрнер при некоторых ограничениях установил принципы (5.1), (5.6) и (5.8). В рассматриваемом случае $\pi_1 = \pi_2 = \{0\}, \gamma_c = 0$. И из п. 3 при $B_\lambda = I + \sum_{\nu=2}^n \lambda^{\nu-1} B_\nu, A_\lambda = A$ следует существование счетного множества

собственных значений, скапливающихся лишь к точке 0. Система Релея (7.3), (7.4) выпукла на R^+ , и справедливы все принципы §§ 5 и 6.

6°. Пусть с.Р. (L, p) задана функцией

$$L_\lambda = \lambda^k I - \sum_{\nu=0}^{k-1} \lambda^\nu A_\nu, \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (7.5)$$

где $A_\nu \in S_-, A_\nu > 0, \nu = 0, \dots, k-1, A_{i_0} > 0$ для некоторого $i_0, 0 \leq i_0 \leq k-1$, а $p(x)$ есть единственное решение (7.4). В этом случае $\gamma_c = 0, \pi_1 = \pi_2 = \{0\}$, существует счетное множество собственных значений, для которых справедливы принципы § 5. Это есть следствие того, что (7.5) есть частный случай (7.1) при $r(\lambda) = \lambda^k$,

$$B_\lambda = I, A_\lambda = \sum_{\nu=0}^{k-1} \lambda^\nu A_\nu.$$

7°. Пусть (L, p) с.Р. с функцией

$$L_\lambda = B + \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \lambda^\nu A_\nu, \lambda \in \infty, \infty),$$

где $B = B_0 - A_0$, $A_\nu \in S_\infty$, $\nu = 0, \dots, k$, $B \geq 0$, $A_1 > 0$, $A_\nu \geq 0$, $\nu = 2, \dots, k$, $(B_0 x, x) > h \|x\|^2$, $h > 0$ и $p(x)$ есть единственное решение уравнения $(L_\lambda x, x) = 0$, $\lambda \in R^-$. В этом случае $\gamma_c = -\infty$, $W \subset (-\infty, 0]$, $\pi_1 = \pi_2 = \{-\infty\}$. Существует счетное множество собственных значений, скапливающихся лишь к $-\infty$. Система Релея вогнута на R^- , и справедливы все принципы §§ 5 и 6.

8°. Пусть $L_\lambda = \lambda^2 A + \lambda B + C$ — сильно демпфированный квадратичный пучок, т. е. $(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) > 0$, $x \neq 0$. Из последнего условия следует (см. [9]) постоянство знака формы (Bx, x) на множестве $a_0 = \{x \neq 0; (Ax, x) = 0\}$. Пусть $(Bx, x) > 0$, $x \in a_0$. Положим

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(Ax, x)} [-(Bx, x) + d(x)], & x \notin a_0 \\ -(Cx, x)/(Bx, x), & x \in a_0, \end{cases}$$

где $d(x) = \{(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x)\}^{1/2}$. Из вышеуказанных условий легко следует, что (L, p) — система Релея. В работе [9] Кюне показал справедливость принципов (5.5) и (5.6). На самом деле, в рассматриваемом случае, как это следует из § 5, справедливы все вариационные принципы § 5.

9°. Лангер в [10] рассмотрел сильно демпфированный квадратичный пучок при следующих дополнительных ограничениях:

а) $C \geq 0$, б) $(Bx, x) > 0$, $x \in a_+ \cup c_0$, где $a_+ = \{x \neq 0; (Ax, x) \geq 0\}$, в) $0 \notin \sigma(A)$, г) $\sigma(A) \cap R^-$ состоит из $N < \infty$ собственных значений. Результаты Лангера легко следуют из теоремы 5.4 и результатов § 5.

Автор благодарен Д. Ф. Харазову за помощь в работе.

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

Поступила 25.I.1973

ՅՈՒ. Շ. ԱՐՐԱՄՈՎ. Պարամետրի էկստրմալ ոչ-գծային ուղղ խնդիրների սեփական արժեքների վարիացիոն հատկությունները (ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ ոչ-գծային խնդրի սեփական արժեքները բնութագրվում են վարիացիոն սկզբունքներով, որոնք հանդիսանում են Ռեյլի, Ֆիշեր-Կուրանտ-Վելլի, Պուանկարե-Ռիտցի դասական վարիացիոն սկզբունքների և Ստենչերի սկզբունքի նմանատիպերը:

Ju. Sh. ABRAMOV. Variational properties of eigenvalues of some nonlinear problems (summary)

It is proved that the eigenvalues of some nonlinear problem are characterized by variational principles analogous to the classical ones for linear problems.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *W. Stenger*. On the variational principles for eigenvalues for a class of unbounded operators, *J. Math. Mech.*, 17, 1968, 641—648.
2. *Л. Коллатц*. Задачи на собственные значения, М., 1968.
3. *R. J. Duffin*. A minimax theory for overdamped network, *J. of Rat. Mech. Anal.*, 4, 1955, 221—233.
4. *E. H. Rogers*. A minimax theory for overdamped systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, 1964, 89—96.
5. *K. P. Hadeler*. Mehrparametrische und nichtlineare Eigenwertaufgaben, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 27, 1967, 306—328.
6. *R. E. L. Turner*. A class of nonlinear eigenvalue problems, *J. of Func. Anal.*, 2, 1968, 297—322.
7. *R. E. L. Turner*. Some variational principles for a nonlinear eigenvalue problem, *J. Math. Anal. and Appl.*, 17, 1967, 151—160.
8. *K. P. Hadeler*. Variationsprinzipien bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 30, 1968, 297—307.
9. *R. Kühne*. Minimaxprinzip für stark gedämpfte Scharen, *Acta Sci Math. Szeqed.*, 29, №№ 1—2, 1968, 39—68.
10. *H. Langer*. Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum, *J. Math. Mech.*, 17, 1968, 685—705.
11. *B. Werner*. Das Spectrum von Operatorscharen mit verallgemeinerten Rayleighquotienten, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 42, № 3, 1971, 223—238.
12. *E. H. Rogers*. Variational properties of nonlinear spectra, *J. of Math. Mech.*, 18, 1968, 479—490.
13. *М. В. Колдыш*. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов взаимосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, 71, № 4, 1951, 11—14.
14. *Д. Ф. Харасов*. Спектральная теория вполне непрерывных линейных операторов, зависящих квадратично от параметра, *Труды Тбл. мат. инст.*, 26, 1959, 172—187.
15. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, *Труды межд. симп. „Приложение теории функций в механике сплошной среды“*, М., 1965.
16. *W. Reid*. Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, *Duke Math. Journ.*, 18, № 1, 1951, 41—56.
17. *Т. Като*. Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.
18. *И. М. Глазман*. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963.
19. *Р. Беллман*. Введение в теорию матриц, М., 1969.
20. *Р. Беллман, Р. Калаба*. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., 1968.