ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

К. А. АБГАРЯН, В. В. ВАРДАНЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При анализе процессов в линейных системах автоматического управления и, в частности, при определении реакций системы на те или иные входные воздействия, применяются динамические характеристики систем—импульсная переходная функция и передаточная функция.

Рассмотрим нестационарную многомерную линейную систему, описываемую векторно-матричным уравнением

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)\,x + H(t)\,u, \tag{1}$$

где x — столбцовая матрица выходных сигналов $x_1, x_2, \cdots, x_n$, u — столбцовая матрица входных сигналов $u_1, u_2, \cdots, u_l$, A, B, H — матрицы динамических коэффициентов системы с размерами $n\times n$, $n\times n$ и $n\times l$ соответственно.

1. Реакция предварительно не возбужденной системы на входной сигнал в виде импульсной функции δ(дельта-функции) называется импульсной переходной функцией (или весовой функцией). Если на j-ый вход предварительно невозбужденной системы в момент времени ξ подается сигнал в виде дельта-функции $\delta(t-\xi)$, то выходной сигнал на i-ом выходе в момент времени t, обозначаемый $g_{ij}(t, \xi)$, будет импульсной переходной функцией. Матрица $G(t, \xi) = (g_{ij}(t, \xi))$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, l)$ называется матрицей импульсных переходных функций.

Таким образом, по определению $G(t, \xi)$ есть решение уравнения

$$A(t)\frac{dG}{dt} = B(t)\,G + H(t)\,\delta(t-\xi) \tag{2}$$

при начальном условии

$$G(\xi-0, \xi) = 0. \tag{3}$$

Имея $G(t, \xi)$, можно найти решение (1) по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Можно показать, что $G(t, \xi)$ можно найти как решение однородного уравнения

$$A(t)\frac{dG}{dt} = B(t)\,G \tag{5}$$

при неоднородных начальных условиях

$$G(\xi, \xi) = A^{-1}(\xi)\,H(\xi), \tag{6}$$

а это решение, как известно, имеет вид

$$G(t, \xi) = X(t)\,X^{-1}(\xi)\,A^{-1}(\xi)\,H(\xi), \tag{7}$$

где $X(t)$—фундаментальная матрица однородного уравнения

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x. \tag{8}$$

Таким образом, для построения $G(t, \xi)$ требуется знание фундаментальной матрицы $X(t)$ уравнения (8). В случае произвольного дифференциального уравнения (8) определение $X(t)$ сопряжено со значительными трудностями, и не всегда эта матрица может быть выражена в замкнутой форме. Поэтому, имея в виду произвольную линейную нестационарную систему, можно лишь говорить о приближенном построении фундаментальной матрицы и, тем самым, импульсных переходных функций.

Возможны различные пути построения приближенного выражения импульсных переходных функций, и существующая литература содержит описание некоторых способов такого построения [1]. Ниже приводится один метод построения выражения для $G(t, \xi)$, основанный на использовании разложения в ряд фундаментальной матрицы $X(t)$. Идея этого метода приведена в [2], согласно которому построение приближенного выражения для $X(t)$ сводится к следующему.

Пусть собственные значения матрицы $U(t) = A^{-1}(t)\,B(t)$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$|U(t) - \lambda E_n| = 0 \tag{9}$$

на сегменте $t \in [0, T]$ разбиты на p непересекающиеся группы $\lambda_1^{(\sigma)}, \lambda_2^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}\left(\sigma = 1, 2, \cdots, p; \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ так, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(t) - \lambda_j^{(s)}(t)| \geqslant c > 0. \tag{10}$$

$$(\sigma \neq s,\ i = 1, 2, \cdots, k_\sigma;\ j = 1, 2, \cdots, k_s;\ t \in [0, T]).$$

Тогда можно построить [3] квадратные матрицы K и $M = K^{-1}$ так, что U представляется в виде $U = K\Lambda M$, где Λ—квазидиагональная матрица, K и M—коагулированные матрицы

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_p),$$

$$K = (K_1, K_2, \cdots, K_p),\quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_p \end{pmatrix},$$

а K_σ, Λ_σ, M_σ—матрицы с размерами $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$, $k_\sigma\times n$ соответственно. При этом фундаментальная матрица уравнения (8) представляется в виде

$$X(t)=\bar{K}Y, \tag{11}$$

где $\bar{K}=(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \cdots, \bar{K}_p)$, $Y=\operatorname{diag}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_p)$, а Y_σ являются фундаментальными матрицами подсистем

$$\frac{dy_\sigma}{dt}=\bar{\Lambda}_\sigma y_\sigma. \tag{12}$$

Матрицы $\bar{K}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ представляются асимптотическими рядами

$$\bar{K}_\sigma=K_\sigma+K_\sigma^{[1]}+K_\sigma^{[2]}+\cdots, \tag{13}$$

$$\bar{\Lambda}_\sigma=\Lambda_\sigma+\Lambda_\sigma^{[1]}+\Lambda_\sigma^{[2]}+\cdots, \tag{14}$$

где $K_\sigma^{[k]}$, $\Lambda_\sigma^{[k]}$ $(k=1, 2, \cdots)$ определяются рекуррентным соотношением

$$\Lambda_\sigma^{[k]}=-M_\sigma\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\Lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{15}$$

$$K_\sigma^{[s]}=k\,Q_\sigma^{[k]}, \tag{16}$$

$$(\Lambda_\sigma^{[0]}\equiv\Lambda_\sigma,\ K_\sigma^{[0]}\equiv K_\sigma).$$

Здесь $Q_\sigma^{[k]}$—коагулированная матрица с размерами $n\times k_\sigma$, субматрицы которой $Q_{s\sigma}^{[k]}$ размерами $k_s\times k_\sigma$ определяются из соотношений

$$Q_{\sigma\sigma}^{[k]}=0, \tag{17}$$

$$\Lambda_s\,Q_{s\sigma}^{[k]}=Q_{s\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma+M_s\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\Lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{18}$$

$$(s\neq\sigma)$$

причем равенства (18) однозначно определяют $Q_{s\sigma}^{[k]}$, так как согласно (10) матрицы Λ_s и Λ_σ не имеют общих собственных чисел.

Рассмотрим частный случай, когда матрица U имеет простые корни.

В этом случае матрица Λ будет диагональной

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

субматрицы $\Lambda_\sigma^{[k]}$, $\bar{\Lambda}_\sigma$ будут числами $\lambda_\sigma^{[k]}$, $\bar{\lambda}_\sigma$, матрицы $Q_\sigma^{[k]}$, $K_\sigma^{[k]}$, $\tilde{K}$ будут столбцовыми с размерами $n\times1$, матрицы M_σ — строчными с размерами $1\times n$, субматрицы $Q_{s\sigma}^{[k]}$ — числами $q_{s\sigma}^{[k]}$. Вместо (18) будем иметь

$$q_{s\sigma}^{[k]}=\frac{1}{\lambda_s-\lambda_\sigma}M_s\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{19}$$

а вместо подсистем (10) будем иметь отдельные уравнения

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \tilde{\lambda}_\sigma y_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, n). \tag{20}$$

Фундаментальные матрицы Y_σ для уравнений (20) будут скалярами

$$Y_\sigma = \exp \int \tilde{\lambda}_\sigma (t)\, dt. \tag{21}$$

В качестве примера рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, представленную скалярным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2q}{dt^2} + a_1(t)\frac{dq}{dt} + a_2(t)\, q = u. \tag{22}$$

Записав это уравнение в векторно-матричной форме, имеем

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\, x + H(t)\, u, \tag{23}$$

где $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} q \\ \dfrac{dq}{dt} \end{pmatrix}$.

Корни характеристического уравнения (9) будут

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Пусть при $t \in [0, T]$ имеем $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$, тем самым $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда будем иметь

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (15)—(19) имеем

$$K^{[1]} = a^2 \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_1\lambda_2 & \lambda_1\dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{[1]} = a\begin{pmatrix} -\dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{[2]} = a^3\begin{pmatrix} -\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 \end{pmatrix},$$

$$K^{[2]} = a^4 \begin{pmatrix} 3\dot{\lambda}_1^2 - \dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 - \dfrac{1}{a}\ddot{\lambda}_1 & 3\dot{\lambda}_2^2 - \dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 + \dfrac{1}{a}\ddot{\lambda}_2 \\ \lambda_2(3\dot{\lambda}_1^2 - \dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 - \dfrac{1}{a}\ddot{\lambda}_1) & \lambda_1\left(3\dot{\lambda}_2^2 - \dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 + \dfrac{1}{a}\ddot{\lambda}_2\right) \end{pmatrix},$$

где $a = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$, а точка сверху означает d/dt. Останавливаясь на втором приближении в рядах (13) и (14), получим

$$\bar{K} \approx K + K^{[1]} + K^{[2]} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Lambda} \approx \Lambda + \Lambda^{[1]} + \Lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - a\dot{\lambda}_1 - a^3\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2, \tag{24}$$

$$\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + a\dot{\lambda}_2 + a^3\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2, \tag{24}$$

$$k_{11} = 1 + a^2\dot{\lambda}_1 - a^3\ddot{\lambda}_1 + 3a^4\dot{\lambda}_1^2 - a^4\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2,$$

$$k_{12} = 1 + a^2\dot{\lambda}_2 + a^3\ddot{\lambda}_2 + 3a^4\dot{\lambda}_2^2 - a^4\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2. \tag{25}$$

Коэффициенты же k_{21} и k_{22} выражаются через k_{11} и k_{12} соотношениями

$$k_{21} = k_{11}\bar{\lambda}_1 + \frac{dk_{11}}{dt},$$

$$k_{22} = k_{12}\tilde{\lambda}_2 + \frac{dk_{12}}{dt}. \tag{26}$$

Формулы (26) выражают тот факт, что вторая строка решения уравнения (23) является производной первой строки. Фундаментальная матрица решения уравнения (23) будет

$$X(t) = \bar{K}Y = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp\int \bar{\lambda}_1\,dt & 0 \\ 0 & \exp\int \bar{\lambda}_2\,dt \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Обратная матрица будет

$$X^{-1}(\xi) = Y^{-1}\bar{K}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \exp\left(-\int \bar{\lambda}_1\,d\xi\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\int \tilde{\lambda}_2\,d\xi\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{22}(\xi) & -k_{12}(\xi) \\ -k_{21}(\xi) & k_{11}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $\Delta = k_{11}(\xi)\,k_{22}(\xi) - k_{12}(\xi)\,k_{21}(\xi)$, или же с учетом (26)

$$\Delta = k_{11}(\xi)\,k_{12}(\xi)\,[\tilde{\lambda}_2(\xi) - \bar{\lambda}_1(\xi)] + k_{11}(\xi)\frac{dk_{12}(\xi)}{d\xi} - k_{12}(\xi)\frac{dk_{11}(\xi)}{d\xi}. \tag{29}$$

Подставляя (27) и (28) в (7), где $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим выражение для $G(t, \xi) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$. Для интересующей нас импульсной переходной функции $g_1 = g(t, \xi)$ заданного уравнения (22) получим

$$g(t, \xi) = \frac{k_{11}(t)\,k_{12}(\xi)\exp\int_\xi^t \tilde{\lambda}_1\,dt - k_{12}(t)\,k_{11}(\xi)\exp\int_\xi^t \bar{\lambda}_2\,dt}{k_{11}(\xi)\,k_{12}(\xi)[\tilde{\lambda}_1(\xi) - \bar{\lambda}_2(\xi)] + k_{12}(\xi)\frac{dk_{11}(\xi)}{d\xi} - k_{11}(\xi)\frac{dk_{12}(\xi)}{d\xi}}. \tag{30}$$

В случае, когда по (25) получается $k_{11}, k_{12} = \text{const}$, формула (30) принимает вид

$$g(t, \xi) = \frac{\exp \int_{\xi}^{t} \bar{\lambda}_1(t')\, dt' - \exp \int_{\xi}^{t} \bar{\lambda}_2(t')\, dt'}{\tilde{\lambda}_1(\xi) - \tilde{\lambda}_2(\xi)}, \qquad (31)$$

которая по форме совпадает с формулой, приведенной в [1], стр. 249, и отличается способом определения $\bar{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$.

Пример:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dq}{dt} - \frac{1}{t^2}\, q = u.$$

В данном случае $\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2t}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2t}$, $a = \frac{t}{\sqrt{5}}$. По (24) получается $\bar{\lambda}_1 = \frac{\beta}{t}$, $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{\beta}{t}$, где $\beta = \frac{11\sqrt{5}}{25}$. По (25) получается $k_{11} = \frac{28-3\sqrt{5}}{25} = \text{const}$, $k_{12} = \frac{28+3\sqrt{5}}{25} = \text{const}$ и формула (25) дает

$$g(t, \xi) = \frac{1}{2\beta}\,(t^{\beta}\, \xi^{1-\beta} - t^{-\beta}\, \xi^{1+\beta}).$$

Это решение отличается от точного тем, что имеем значение $\beta = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984$, а в точном решении $\beta = 1$.

2. Матрица $W(\lambda, t)$ передаточных функций определяется через матрицу импульсных переходных функций $G(t, \xi)$ при помощи соотношения

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \xi)\, e^{-\lambda(t-\xi)}\, d\xi. \qquad (32)$$

Отсюда для передаточных функций $w_{ij}(\lambda, t)$ будем иметь

$$w_{ij}(\lambda, t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} g_{ij}(t, \xi)\, e^{\lambda\xi}\, d\xi}{e^{\lambda t}}, \qquad (33)$$

т. е. $W(\lambda, t)$ есть отношение реакции системы на сигнал в виде показательной функции $e^{\lambda t}$ (по всем входам) к этому сигналу. Таким образом, $W(\lambda, t)\, e^{\lambda t}$ удовлетворяет данному уравнению (1). Подставляя в (1) вместо x $W(\lambda, t)\, e^{\lambda t}$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $W(\lambda, t)$:

$$\frac{dW}{dt} = [U(t) - \lambda E_n]\, W + A^{-1}(t)\, H(t), \qquad (34)$$

причем $W(\lambda, t)$ является решением уравнения (28) при нулевых начальных условиях.

Смысл $W(\lambda, t)$ заключается в том, что ее произведение на изображение по преобразованию Лапласа входного сигнала u является изображением выходного сигнала x, т. е.

$$L\{x\} = W(\lambda, t)\, L\{u\}, \tag{35}$$

где $L\{x\}$ и $L\{u\}$ — изображения x и u соответственно. В самом деле, имеем

$$L\{x\} = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-\lambda t}\, dt, \tag{36}$$

$$L\{u\} = \int_0^{\infty} u(t)\, e^{-\lambda t}\, dt. \tag{37}$$

Подставляя в (36) значение $x(t)$ по (4) и поменяв порядок интегрирования с учетом (32) и (37) получим (35).

Таким образом, имея $W(\lambda, t)$, часто можно найти искомое решение, пользуясь лишь таблицами преобразования Лапласа, или же, в худшем случае, по интегралу обратного преобразования Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L\{x\}\, e^{\lambda t}\, d\lambda \tag{38}$$

($c > c_0$, где c_0 — абсцисса абсолютной сходимости преобразования Лапласа). Применение формулы (38) обычно проще, чем определение $x(t)$ по (4) даже при известном $G(t, \xi)$ [4].

Для определения приближенного выражения $W(\lambda, t)$ можно использовать вышеприведенный метод определения $G(t, \xi)$.

Если собственные значения матрицы $U(t)$ разбиты на непересекающиеся группы $\lambda_i^{(\sigma)}$ ($i=1, 2, \cdots, k_\sigma$, $\sigma=1, 2, \cdots, p$, $\sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n$), то собственные значения матрицы $U(t) - \lambda E$, равные $\lambda_i^{(\sigma)} - \lambda$ могут быть разбиты на те же непересекающиеся группы. Введя матрицы K, Λ, M и асимптотические ряды (13) и (14) как и в предыдущем случае, решение системы (34) представится в виде

$$W(\lambda, t) = \sum_{\sigma=1}^{p} \tilde{K}_\sigma Z_\sigma, \tag{39}$$

где Z_σ являются решениями подсистем

$$\frac{dZ_\sigma}{dt} = (\tilde{\Lambda}_\sigma - \lambda E_{k_\sigma})\, Z_\sigma + \tilde{M}_\sigma A^{-1} H. \tag{40}$$

Здесь $\tilde{M}_\sigma$ являются субматрицами матрицы $\tilde{M}$, представляемой асимптотическим рядом

$$\tilde{M} = M + M^{[1]} + M^{[2]} + \cdots, \tag{41}$$

где $M^{[k]}$ $(k=1, 2, \cdots)$ определяются по рекуррентным формулам

$$M^{[k]} = -M \sum_{l=1}^{k} K^{[l]} M^{[k-l]}, \tag{42}$$

$$(M^{[0]} \equiv M).$$

Для рассмотренного выше уравнения (23) имеем матрицу—столбец передаточных функций $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Для интересующей нас передаточной функции $w_1 = w(\lambda, t)$ уравнения (22) по (39) получим

$$w(\lambda, t) = k_{11} z_1 + k_{12} z_2, \tag{43}$$

где $z_\sigma (\sigma = 1, 2)$ определяются из независимых уравнений

$$\frac{dz_\sigma}{dt} = (\bar{\lambda}_\sigma - \lambda) z_\sigma + m_{\sigma 2}. \tag{44}$$

Здесь $\bar{\lambda}_\sigma$ и $k_{1\sigma}$ определяются по (24) и (25), а по (42) получается

$$M^{[1]} = a^3 \begin{pmatrix} -\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 & \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_1 & -\dot{\lambda}_1 \end{pmatrix},$$

$$M^{[2]} = a^4 \begin{pmatrix} -3a\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1 \ddot{\lambda}_2 + \ddot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 & 3a\dot{\lambda}_2^2 + \ddot{\lambda}_2 \\ 3a\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1 \ddot{\lambda}_2 & -3a\dot{\lambda}_1^2 + \ddot{\lambda}_1 \end{pmatrix}.$$

Останавливаясь на втором приближении, определим матрицу $\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. Для интересующих нас величин $m_{\sigma 2}$ будем иметь

$$\begin{aligned} m_{12} &= a + a^3 \dot{\lambda}_2 + 3a^5 \dot{\lambda}_2^2 + a^4 \ddot{\lambda}_2, \\ m_{22} &= -a - a^3 \dot{\lambda}_1 - 3a^5 \dot{\lambda}_1^2 + a^4 \ddot{\lambda}_1. \end{aligned} \tag{45}$$

Для рассмотренного выше примера по (45) получается $m_{12} = \mu_1 t$, $m_{22} = -\mu_2 t$, где

$$\mu_1 = \frac{108 + 12\sqrt{5}}{100\sqrt{5}}, \quad \mu_2 = \frac{108 - 12\sqrt{5}}{100\sqrt{5}}.$$

Система (34) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \left(\frac{\beta}{t} - \lambda\right) z_1 + \mu_1 t, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \left(-\frac{\beta}{t} - \lambda\right) z_2 - \mu_2 t, \end{aligned} \tag{46}$$

и искомая передаточная функция $w(\lambda, t)$ по (37) получается

$$w(\lambda, t) = \frac{(k_{11}\mu_1 - k_{12}\mu_2)}{\lambda} t + \frac{2k_{12}\mu_2}{\lambda^2} - \frac{2k_{12}\mu_2}{\lambda^3 t}. \quad (47)$$

В случае входного сигнала $u(t) = at$ по (37) будем иметь изображение $L\{u\} = \frac{a}{\lambda^2}$, а согласно (35)

$$L\{x\} = \frac{a(k_{11}\mu_1 - k_{12}\mu_2)}{\lambda^3} t + \frac{2k_{12}\mu_2 a}{\lambda^4} - \frac{2k_{12}\mu_2 a}{\lambda^5 t}. \quad (48)$$

Оригинал изображения (48) получается

$$x(t) = at^3\left(\frac{k_{11}\mu_1}{2} - \frac{k_{12}\mu_2}{4}\right) \approx 0{,}131\, at^3. \quad (49)$$

Это решение достаточно близко к точному решению $x = \frac{a}{8} t^3$.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 10.I.1973

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ, Վ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ. Ոչ ստացիոնար գծային սիստեմների դինամիկ բնութագրերի որոշման վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բերված է բազմաչափ ոչ ստացիոնար գծային սիստեմների իմպուլսային անցումային ֆունկցիաների և փոխանցման ֆունկցիաների մատրիցաների որոշման ասիմպտոտիկ մեթոդ։ Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ։

K. A. ABGARIAN, V. V. VARTANIAN. *Ondetermination of dynamic characteristics of nonstacionary linear systems* (summary)

The paper gives an asymptotic method for definition of impulse transition functions matrices and transfer functions of multidimensional nonstationary linear systems.

The specific examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. А. Михайлов* и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами, Изд. „Наука", М., 1971.
2. *К. А. Абгарян.* Асимптотическое расщепление уравнений линейной системы автоматического управления, ДАН СССР, 166, № 2, 1966.
3. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем., XVIII, № 2, 1965.
4. *L. A. Zadeh.* Frequency analysis of variable networks, Proc. IRE, 1950, 58.