А. И. ПЕТРОСЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ В БИЦИЛИНДРЕ

В в е д е н и е

Бергману [1] принадлежит идея каждой вещественной дважды гармонической функции $u(z_1, z_2)$ в бидилиндре ставить в соответствии комплексную функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ следующим образом:

- 1) при фиксированном z_2 функция $f(z_1, z_2)$ аналитична по z_1 ;
- 2) $v(0, z_2) \equiv 0$.

Полученное множество функций, названное им расширенным классом комплексных функций, можно изучать методами теории потенциала, так как задача Дирихле с заданными значениями на остове бидилиндра в классе всех дважды гармонических функций разрешима. Если условие 2) заменить на условие

$$2^1) f(0, z_2) \text{ аналитична,}$$

то полученный класс функций, который будем называть классом полуаналитических функций, уже является расширением класса аналитических функций в том смысле, что для бигармонической функции $u(z_1, z_2)$ соответствующая функция $f(z_1, z_2)$ аналитична.

Основным результатом статьи является распространение на класс полуаналитических функций теоремы М. М. Джрбашяна об интегральном представлении по существу произвольных гармонических в круге функций [2]. Эта теорема является существенным расширением известной теоремы Герглотца и сводится к ней в специальном случае.

В работах М. М. Джрбашяна введен обобщенный оператор типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$, с помощью которого построена теория факторизации функций, мероморфных в круге, а также получены обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона. Напомним некоторые определения и результаты из работы [2].

Рассматривается множество $\mathcal{Q}$ положительных и непрерывных на $[0, 1)$ функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\omega(0) = 1, \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty.$$

Каждой функции $\omega(x) \in \mathcal{Q}$ ставится в соответствие последовательность положительных чисел

$$\Delta(0) = 1, \Delta(k) = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1)$$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$ оператор $L^{(\omega)}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\} = -\frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^1 \varphi(\tau r) d\rho(\tau) \right\}, \quad r \in (0, 1),$$

где функция $\rho(\tau)$ имеет вид

$$\rho(0) = 1, \rho(\tau) = \tau \int_0^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx.$$

Отметим, что на степенные ряды оператор $L^{(\omega)}$ действует следующим образом:

$$L^{(\omega)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (re^{i\varphi})^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(k) a_k (re^{i\varphi})^k.$$

Затем строятся функции, аналитические в круге $|z| < 1$

$$C(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k)}, \quad S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1, \quad (2)$$

являющиеся аналогами ядер Коши и Шварца. При этом аналог интегральной формулы Шварца имеет вид:

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\theta}; \omega\right) \operatorname{Re} f(\omega) (\rho e^{i\theta}) d\theta, \quad (3)$$

где $0 < \rho < 1$ и $f_{(\omega)}(re^{i\theta}) = L^{(\omega)}\{f(re^{i\theta})\}$.

Пусть R_{ω} — класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций, для которых выполняется условие

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} < +\infty.$$

В работе [2] установлена следующая теорема о представлении класса R_{ω} .

Теорема А (М. М. Джрбашян). Класс R_{ω} совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = iC + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(ze^{-i\theta}; \omega) d\psi(\theta) \quad (|z| < 1),$$

где $\text{Im } C = 0$, $\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечной полной вариацией на $[0, 2\pi]$.

Для распространения интегрального представления (3) на случай функций n комплексных переменных следует, очевидно, вместо одной функции $\omega(x)$ взять систему из n функций $\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ и применить последовательно операторы $L^{(\omega_1)}, \dots, L^{(\omega_n)}$ соответственно по каждой переменной $z_1, \dots, z_n$. Таким образом, легко можно получить аналог формулы (3), что и было сделано в заметке [3].

Однако, получаемое при этом n -мерное ядро Шварца обладает тем недостатком, что оно не положительно и, более того, его вещественная часть по модулю в среднем не ограничена, поэтому аналог теоремы А с таким ядром неверен. В настоящей работе в случае пространства C^2 вводится новое ядро с положительной вещественной частью, причем это ядро годится для представления не только аналитических, но и полуаналитических функций.

§ 1. Полуаналитические функции

Пусть C^2 — двумерное комплексное пространство; $z = (z_1, z_2)$ — точка этого пространства; $B = \{z \in C^2: |z_i| < 1, i = 1, 2\}$ — единичный бицилиндр; $T = \{z \in C^2: |z_i| = 1, i = 1, 2\}$ — остов этого бицилиндра. Функция $u(z_1, z_2) = u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, определенная в B , называется бигармонической, если выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \equiv 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \equiv 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} \equiv 0. \quad (1.3)$$

Если же выполняются лишь условия (1.1) и (1.2), то функция $u(z_1, z_2)$ называется дважды гармонической.

Определение. Функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, определенную в B , назовем полуаналитической, если

- $u(z_1, z_2)$ — дважды гармоническая;
- при фиксированном z_2 , $|z_2| < 1$ функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в круге $|z_1| < 1$;
- $f(0, z_2)$ аналитична в круге $|z_2| < 1$.

Связь между аналитичностью и полуаналитичностью дается в следующей лемме.

Лемма. *Всякая полуаналитическая функция $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, вещественная часть $u(z_1, z_2)$ которой бигармонична, является аналитической функцией.*

Доказательство. Известно, (см., например, [4]), что всякая бигармоническая в бицилиндре функция $u(z_1, z_2)$ является веществен-

ной частью аналитической функции $\tilde{f}(z_1, z_2)$. Итак, $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + i\tilde{v}(z_1, z_2)$. В силу условия в) при фиксированном z_2 функции $f(z_1, z_2) - \tilde{f}(z_1, z_2) = i[v(z_1, z_2) - \tilde{v}(z_1, z_2)]$, вещественная часть которой есть тождественный нуль, аналитична в круге $|z_1| < 1$.

Поэтому

$$f(z_1, z_2) - \tilde{f}(z_1, z_2) = i\varphi(z_2), \quad (1.4)$$

где $\varphi(z_2)$ — некоторая вещественная функция. Далее, из (1.4) и условия с) следует, что функция $i\varphi(z_2) = f(0, z_2) - \tilde{f}(0, z_2)$ аналитична в $|z_2| < 1$, т. е. $\varphi(z_2) \equiv C$, где C — константа. Отсюда и из (1.4) имеем

$$f(z_1, z_2) = \tilde{f}(z_1, z_2) + iC,$$

что и доказывает лемму.

Пусть $\omega_1(x), \omega_2(x) \in \mathcal{Q}$; $\{\Delta_1(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Delta_2(k)\}_{k=0}^{\infty}$ — соответствующие этим функциям по формуле (1) последовательности чисел. Пусть, далее

$$S(z; \omega) = P(z; \omega) + iQ(z; \omega)$$

— обобщенное ядро Шварца, определяемое по формуле (2). Введем функцию

$$\tilde{S}(z_1, z_2; \omega) = S(z_1; \omega_1) P(z_2; \omega_2) + iQ(z_2; \omega_2), \quad (1.5)$$

где для краткости используется обозначение $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Следующая теорема дает интегральное представление для полуаналитических функций.

Теорема 1. Пусть $f(z_1, z_2)$ — полуаналитическая функция, ρ_1 и ρ_2 — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Тогда при любом $|z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2$ справедливо равенство

$$f(z_1, z_2) = i \operatorname{Im} f(0, 0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}; \omega\right) \operatorname{Re} f(\omega) (\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2, \quad (1.6)$$

где

$$f(\omega) (r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = L^{(\omega)} \{f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})\}. \quad (1.7)$$

Здесь оператор $L^{(\omega_1)}$ действует как на функцию от r_1 , а $L^{(\omega_2)}$ — как на функцию от r_2 .

Доказательство. При фиксированном $z_2, |z_2| < 1$ функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в круге $|z_1| < 1$. По теореме 3 М. М. Джрбашяна [2] имеем

$$f(z_1, z_2) = i \operatorname{Im} f(0, z_2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}; \omega_1\right) L^{(\omega_1)} \{ \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, z_2) \} d\theta_1. \quad (1.8)$$

Далее, при фиксированном $\rho_1 e^{i\theta_1}$ функция $L^{(\omega_1)} \{ \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, z_2) \}$ гармонична в $|z_2| < 1$. По теореме 4 из [2]

$$L^{(\omega_1)} \{ \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, z_2) \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}; \omega_2\right) \operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_2. \quad (1.9)$$

Приравнявая мнимые части в обобщенной формуле Шварца, получим:

$$\operatorname{Im} f(0, z_2) = \operatorname{Im} f(0, 0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}; \omega_2\right) L^{(\omega_2)} \{ \operatorname{Re} f(0, \rho_2 e^{i\theta_2}) \} d\theta_2. \quad (1.10)$$

Далее, написав формулу (1.9) для функции $L^{(\omega_2)} \{ \operatorname{Re} f(z_1, \rho_2 e^{i\theta_2}) \}$ при фиксированном $\rho_2 e^{i\theta_2}$ и, положив в ней $z_1 = 0$, будем иметь

$$L^{(\omega_2)} \{ \operatorname{Re} f(0, \rho_2 e^{i\theta_2}) \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{(\omega_1)} \{ L^{(\omega_1)} \{ \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) \} \} d\theta_1. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) получаем

$$\operatorname{Im} f(0, z_2) = \operatorname{Im} f(0, 0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}; \omega_2\right) \operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}; \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2. \quad (1.12)$$

Подставляя в правую часть равенства (1.8) соотношения (1.9) и (1.12), получим утверждение теоремы.

Рассмотрим частный случай теоремы 1, когда $\omega_1(x) \equiv 1$, $\omega_2(x) \equiv 1$. Формула (1.6) тогда примет вид

$$f(z_1, z_2) = i \operatorname{Im} f(0, 0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2, \quad (1.13)$$

где положено $\tilde{S}(z_1, z_2) \equiv \tilde{S}(z_1, z_2; 1)$.

Формула (1.13) является аналогом формулы Шварца для полуаналитических функций.

Теорема 2. *Мнимая часть полуаналитической функции $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ есть функция дважды гармоническая.*
Доказательство. Отделив мнимые части в формуле (1.13), получим

$$v(z_1, z_2) = v(0, 0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \bar{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2. \quad (1.14)$$

Согласно определению (1.5) ядра $\bar{S}$ имеем

$$\operatorname{Im} \bar{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) = P\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) Q\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}\right) + Q\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right). \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что $\operatorname{Im} \bar{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right)$ есть функция, дважды гармоническая в бидлиндре $\{|z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2\}$. Отсюда и из формулы (1.14), учитывая, что ρ_1 и ρ_2 — произвольные числа из интервала $(0, 1)$, получаем утверждение теоремы.

§ 2. Представление некоторых классов функций

Пусть $\omega_1(x)$, $\omega_2(x) \in \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Обозначим через A_ω — множество полуаналитических в бидлиндре B функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < \rho_1, \rho_2 < 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})| d\theta_1 d\theta_2 < +\infty. \quad (2.1)$$

В следующей теореме дается представление класса A_ω .

Теорема 3. *Класс A_ω совпадает с множеством функций, имеющих вид*

$$f(z_1, z_2) = iC + \int_T \bar{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2), \quad (2.2)$$

где $\operatorname{Im} C = 0$, μ — произвольная конечная мера на торе T .

Доказательство. Пусть $f(z_1, z_2) \in A_\omega$. Тогда для фиксированных чисел ρ_1 и ρ_2 ($0 < \rho_1, \rho_2 < 1$) имеет место формула (1.6). Рассмотрим семейство мер на острове T

$$d\mu_{\rho_1, \rho_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2. \quad (2.3)$$

Полные вариации этих мер в силу условия (2.1) равномерно ограничены. По теореме Алаоглу [5] существует последовательность мер

$\mu_n = \mu_{\rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}}$, $\rho_1^{(n)} \rightarrow 1$, $\rho_2^{(n)} \rightarrow 1$, слабо сходящаяся к некоторой конечной мере μ , т. е. для любой непрерывной на T функции $F(\theta_1, \theta_2)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T F(\theta_1, \theta_2) d\mu_n(\theta_1, \theta_2) = \int_T F(\theta_1, \theta_2) d\mu(\theta_1, \theta_2).$$

В частности, при фиксированном $z = (z_1, z_2)$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu_n(\theta_1, \theta_2) = \\ = \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом (2.3) напомним интегральную формулу (1.6) для точки $(z_1, \rho_1^{(n)}, z_2, \rho_2^{(n)})$ в виде

$$\begin{aligned} f(z_1 \rho_1^{(n)}, z_2 \rho_2^{(n)}) = i \operatorname{Im} f(0, 0) + \\ + \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu_n(\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует представление (2.2). Докажем обратное. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ допускает представление (2.2). Покажем, что $f \in A_\omega$. Учитывая, что $L^{(\omega)} \{\tilde{S}(z_1, z_2; \omega)\} \equiv \tilde{S}(z_1, z_2)$ и $\operatorname{Re} \tilde{S}(z_1, z_2) = = P(z_1) P(z_2)$, где $P(z) = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z}$ — ядро Пуассона, применим оператор $L^{(\omega)}$ к равенству (2.2) и, отделяя вещественные части, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = \\ = \int_T P(r_1 e^{i(\varphi_1 - \theta_1)}) P(r_2 e^{i(\varphi_2 - \theta_2)}) d\mu(\theta_1, \theta_2), \end{aligned}$$

где $r_1 e^{i\varphi_1} = z_1$, $r_2 e^{i\varphi_2} = z_2$. Отсюда

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| \leq \\ \leq \int_T P(r_1 e^{i(\varphi_1 - \theta_1)}) P(r_2 e^{i(\varphi_2 - \theta_2)}) |d\mu(\theta_1, \theta_2)|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Проинтегрировав неравенство (2.6) и применив теорему Фубини, получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| d\varphi_1 d\varphi_2 <$$

$$\leq \int_T \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_1 e^{i(\varphi_1 - \theta_1)}) P(r_2 e^{i(\varphi_2 - \theta_2)}) d\varphi_1 d\varphi_2 \right\} d\mu(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= 4\pi^2 \int_T |d\mu(\theta_1, \theta_2)| < +\infty,$$

т. е. функция f принадлежит классу A_∞ . Теорема доказана.

В частном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, теорема 3 является аналогом теоремы Герглотца для полуаналитических функций.

Теорема 4. Для того чтобы ассоциированная с мерой μ функция

$$f(z_1, z_2) = i \operatorname{Im} f(0, 0) + \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2) \quad (2.7)$$

была бы аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_T e^{-in\theta_1} e^{ik\theta_2} d\mu(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (n, k = 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Доказательство. По определению (1.5) ядра $\tilde{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) &= S(z_1 e^{-i\theta_1}; \omega_1) P(z_2 e^{-i\theta_2}; \omega_2) + iQ(z_2 e^{-i\theta_2}; \omega_2) = \\ &= 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n e^{-in\theta_1}}{\Delta_1(n)} - 1 \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k e^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_2^k e^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} - 1 \right) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k e^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_2^k e^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^k e^{-in\theta_1} e^{-ik\theta_2}}{\Delta_1(n) \Delta_2(k)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^k e^{-in\theta_1} e^{ik\theta_2}}{\Delta_1(n) \Delta_2(k)} - 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Это разложение сходится равномерно относительно $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in T$ при любом фиксированном $z = (z_1, z_2) \in B$. Подставляя в (2.7) разложение (2.9), получим

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_1^n z_2^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,-k} z_1^n \bar{z}_2^k - \frac{a_0}{2}, \quad (2.10)$$

где

$$a_{n,k} = \frac{2}{\Delta_1(n) \Delta_2(k)} \int_T e^{-in\theta_1} e^{-ik\theta_2} d\mu(\theta_1, \theta_2) \quad (2.11)$$

($n=0, 1, \dots, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Из разложения (2.10) ясно, что функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в том и только в том случае, если

$$a_{n,-k} = 0 \quad (n, k=1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Условия (2.12) с учетом (2.11) эквивалентны (2.8). Теорема доказана.

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в бицилиндре B . Величину

$$T_\infty(r_1, r_2; f) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\infty)} \{ \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \} d\theta_1, d\theta_2,$$

где

$$L_{(+)}^{(\infty)} \{ \varphi(r) \} = \max [0, L^{(\infty)} \{ \varphi(r) \}],$$

по аналогии с одномерным случаем (см. [6]) назовем ω -характеристической функции $f(z_1, z_2)$. Обозначим через N_ω^0 множество функций, аналитических в B и не обращающихся в нуль, которые имеют ограниченную характеристику, т. е. для которых выполняется условие

$$\sup_{0 < r_1, r_2 < 1} T_\infty(r_1, r_2; f) < +\infty.$$

Теорема 5. Класс N_ω^0 совпадает с множеством функций (z_1, z_2) , представимых интегральной формулой

$$f(z_1, z_2) = \exp \left\{ iC + \int_T \bar{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2) \right\}, \quad (2.13)$$

где $\text{Im } C = 0$, μ — конечная мера на T , удовлетворяющая условию (2.8).

Доказательство. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична и не обращается в нуль в бицилиндре B . Тогда функция $\log f(z_1, z_2)$ регулярна в B . Покажем, что условия

$$\sup_{0 < r_1, r_2 < 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\infty)} \{ \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \} d\theta_1 d\theta_2 < +\infty \quad (2.14)$$

и

$$\sup_{0 < r_1, r_2 < 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |L^{(\infty)} \{ \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \}| d\theta_1 d\theta_2 < +\infty \quad (2.15)$$

эквивалентны. В самом деле, напомним формулу (1.6) для функций $\log f(z_1, z_2)$ и, подставив $z_1 = z_2 = 0$, получим

$$\log f(0, 0) = i \arg f(0, 0) + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{(\infty)} \{ \log |f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})| \} d\theta_1 d\theta_2. \quad (2.16)$$

Используя очевидное равенство

$$L^{(\omega)} \{ \varphi(r) \} = 2L_{(+)}^{(\omega)} \{ \varphi(r) \} - |L^{(\omega)} \{ \varphi(r) \}|,$$

из соотношения (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \log f(0, 0) = i \arg f(0, 0) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} |\log |f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})|| d\theta_1 d\theta_2 - \\ - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |L^{(\omega)} |\log f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})|| d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что условия (2.14) и (2.15) выполняются одновременно. По теореме 3 функция $\log f(z_1, z_2)$ представляется интегралом

$$\log f(z_1, z_2) = iC + \int \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2) \quad (2.17)$$

в том и только в том случае, если выполнено условие (2.15), которое, по доказанному выше, эквивалентно (2.14), т. е. если $f \in N_{\omega}^0$. Из (2.17) очевидным образом следует (2.13). Так как функция $\log f(z_1, z_2)$ аналитична, то, в силу теоремы 4, соответствующая мера μ удовлетворяет условию (2.8).

Отметим, что в теореме 3 дано интегральное представление по существу произвольных полуаналитических функций. Это следует из того, что класс A_{ω} можно сделать сколь угодно широким, выбрав соответствующим образом функцию ω . Точнее, справедлива следующая

Теорема 6. *Для произвольной полуаналитической функции f существует функция $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ такая, что $f \in A_{\omega}$.*

Доказательство этой теоремы идентично доказательству для одномерного случая, приведенного в [6].

В заключение автор выражает благодарность профессору М. М. Джрбашяну за полезные обсуждения и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1973

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆԻ ԵՐԿՂԱՆՈՒՄ ՖՈՆԿԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԿՐՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ
(սամմարի)

Հ2 տարածության մեջ երկզանոս որոշված կիսաանալիտիկ ֆունկցիաների համար ստացված է Հերզլոտցի թեորեմայի, ինչպես նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի որոշ արդյունքների անալիզը:

A. I. PETROSIAN. *On integral representation of function in bicylinder*
(summary)

Analogues of Herglotz's theorem as well as of some results of Džrbašian for semi-analytic function in the bicylinder of the C^2 space are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S. Bergman*. The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc., 1970, 214—215.
2. *М. М. Джрбашян*. Обобщенный оператор Римана-Акувилла и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1968, 1075—1111.
3. *И. И. Баерин*. Обобщенные интегральные представления в случае полицилиндра, ДАН СССР, 196, № 1, 1971, 9—11.
4. *Б. В. Шабат*. Введение в комплексный анализ, Изд. „Наука“, 1969, стр. 478.
5. *Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц*. Линейные операторы, том 1, Изд. ИЛ, 1962, стр. 459.
6. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), вып. 4, 1969, 517—615.