А. И. СЕРГЕЕВА

ПРОСТРАНСТВА АНТИИНВОЛЮЦИЙ ВТОРОГО РОДА
 ОБОБЩЕННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

В своей известной монографии [1] Эли Картан подробно рассмотрел своеобразную модель 3-мерного пространства Лобачевского L_3 , в которой роль точек пространства L_3 играют так называемые антиинволюции 2-го рода комплексной прямой z , дополненной точкой $z = \infty$ (сферы Римана):

$$z' = \frac{az+b}{c\bar{z}-\bar{a}}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}, \quad a\bar{a} = bc = -1. \quad (1)$$

Антиинволюцию (1) можно характеризовать коэффициентами a, b, c соответствующей дробно-линейной функции комплексного переменного, т. е. матрицей

$$\pm X, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -\bar{a} \end{pmatrix}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}, \quad a\bar{a} + bc = -1 \quad (1a)$$

(ясно, что матрицы X и $-X$ отвечают одному и тому же преобразованию (1)); эту матрицу X можно записать и так

$$X = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = y, \quad z = \bar{z}, \quad x\bar{x} + y^2 - z^2 = -1. \quad (16)$$

Движения в пространстве антиинволюций (1) (или в пространстве пар матриц $\pm X$) Картан определял формулами

$$X' = AXA^{-1}, \quad \det A = 1, \quad (2)$$

где A — квадратная матрица 2-го порядка над полем C комплексных чисел.

Настоящая заметка посвящена обобщению этой конструкции Картана: поле C мы заменяем алгебрами чисел

$$Z = x^0 + Ix^1 + I^2x^2 + \dots + I^{n-1}x^{n-1},$$

где $x^0, x^1, \dots, x^{n-1} \in R$, а

$$I^n = \begin{cases} 0 & (\text{плуральные числа}), \\ -1 & (\text{антициклические числа}), \\ 1 & (\text{циклические числа}), \end{cases}$$

(см., например, [2]). При этом нам будет удобно сперва рассмотреть случаи

$n = 1$ (действительные числа) и $n = 2$, $R^2 = \begin{cases} 0 & (\text{дуальные числа}), \\ 1 & (\text{двойные числа}) \end{cases}$

(ср. [3]).

1. Действительная прямая. Условимся обозначать символом A^2 пространство, точками которого являются пары матриц $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & x \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in R; \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad (1в)$$

а движения задаются формулами

$$X = AXA^{-1}, \quad \det A = \pm 1, \quad (2а)$$

где A — квадратные матрицы 2-го порядка над полем R действительных чисел; преобразования (2а), где $\det A = 1$ и $\det A = -1$, удобно называть движениями 1-го рода, соответственно движениями 2-го рода. Группа преобразований (2а) действует на пространстве A^2 транзитивно, а две точки $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 + z_1 \\ y_1 - z_1 & x_1 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 + z_2 \\ y_2 - z_2 & x_2 \end{pmatrix}$ (где можно условиться, например, считать, что $z_1 > 0$, $z_2 > 0$) имеют единственный независимый инвариант

$$\text{tr}(X_1 X_2) = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2). \quad (4)$$

Если принять за расстояние между точками X_1 и X_2 пространства A^2 число φ , определяемое равенством

$$2 \operatorname{ch} \varphi = -\text{tr}(X_1 X_2), \quad (5)$$

то метризованное таким образом многообразие A^2 обратится в плоскость Лобачевского L_2 . Инволютивные движения (2а) пространства A^2 распадаются на два класса: а) инволюции 2-го рода, матрицу A каждой из которых соответствующей заменой координат x, y, z в пространстве A^2 можно привести к виду

$$A = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

б) инволюции 1-го рода, матрицу A каждой из которых заменой координат можно привести к виду

$$A = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Преобразование (2а) с матрицей (6) имеет единственную неподвижную точку

$$\pm J, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6а)$$

т. е. это преобразование можно отождествить с симметрией относительно точки (6а) в пространстве A^2 (или L_2); преобразование же (2а) с матрицей (7) имеет множество неподвижных точек $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & y+z \\ y-z & 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 - z^2 = -1, \quad (8)$$

заполняющих прямую плоскости Лобачевского; такое преобразование естественно отождествить с симметрией относительно прямой (8) плоскости L_2 .

Таким образом, множество точек плоскости Лобачевского L_2 взаимно однозначно отображается на множество инволюций 2-го рода пространства A^2 (матрицы этих инволюций можно записывать в виде (16), после чего мы снова приходим к исходной модели плоскости L_2 !), а множество прямых плоскости L_2 взаимно однозначно отображается на множество инволюций 1-го рода пространства A^2 , которые можно задавать, например, матрицами $\pm U$, где

$$U = \begin{pmatrix} u & v+w \\ v-w & -u \end{pmatrix}, \quad u^2 + v^2 - w^2 = 1 \quad (1г)$$

(инволюции 1-го рода действительной прямой; ср. [1]). Отсюда легко получить формулу для расстояния ψ от точки X (см. (1в)) до прямой U (см. (1г)):

$$\text{sh } \psi = ux + vy - wz. \quad (9)$$

Из (9) легко выводится условие инцидентности точки X и прямой U :

$$ux + vy - wz = 0.$$

2. Дуальная прямая. Все матрицы, рассматриваемые в п. 2, являются квадратными матрицами 2-го порядка над алгеброй дуальных чисел. Мы рассмотрим пространство A_0^3 , точки которого определяются как пара матриц (6а) и все пары матриц, получаемые из (6а) преобразованиями

$$X' = AX\bar{A}^{-1}, \quad \det A = \pm 1 \quad (2б)$$

(движения 1-го рода пространства A_0^3) или

$$X' = A\bar{X}A^{-1}, \quad \det A = \pm 1 \quad (2в)$$

(движения 2-го рода). Движения 1-го рода (2б), оставляющие на месте точку (6а) (вращения вокруг точки (6а)) характеризуются матрицами

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \quad (10)$$

или

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \quad (10а)$$

Таким образом, группа вращений вокруг точки является 3-параметрической, что соответствует очевидному равенству $\dim A_0^3 = 3$, и состоит из двух несвязных компонент. Так как из (2б) (и из (2в)) сле-

дует, что $X'_0 = A_0 X_0 A_0^{-1}$, где A_0 , X_0 и X'_0 — действительные части дуальных матриц A , X и X' , то за первые координаты точки X (которую можно записывать в форме (16)) естественно принять координаты действительной части X_0 матрицы X , т. е. пару матриц $\pm X_0$, где (действительная) матрица $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 + z_0 \\ y_0 - z_0 & -x_0 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию (1в). Последнюю координату точки X мы обозначим через x^1 .

Группа движений пространства A_0^3 , оставляющая на месте две фиксированные точки этого пространства, не принадлежащие линии

$$x^0 = \text{const}, y^0 = \text{const}, \quad (11)$$

является 1-параметрической; поэтому две точки X_1 и X_2 пространства A_0^3 , не принадлежащие одной линии (11), имеют единственный независимый инвариант, за который можно принять, например, число φ , определяемое по формуле (5), — *расстояние* между точками X_1 и X_2 . При этом $\varphi=0$ в том и только в том случае, когда точки X_1 и X_2 принадлежат одной линии (11); поэтому линии (11) можно назвать *изотропными линиями* пространства A_0^3 . Группа движений пространства A_0^3 , поточечно оставляющих на месте фиксированную линию (11), является 2-параметрической; любые две точки X_1 и X_2 линии (11) имеют единственный независимый инвариант, за который можно принять, например, разность $x_2^1 - x_1^1$ — *расстояние* между точками X_1 и X_2 , *изотропной линии* (11) пространства A_0^3 .

Все *антиинволюции* пространства A_0^3 (т. е. инволютивные движения (2в) 2-го рода) распадаются на три семейства, которым отвечают три вида пар матриц A :

$$\pm \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon x^1 & y^0 + z^0 \\ y^0 - z^0 & -x^0 + \varepsilon x^1 \end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2 + (y^0)^2 - (z^0)^2 = \pm 1 \quad (12-13)$$

и

$$\pm \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon x^1 & \varepsilon (y^1 + z^1) \\ \varepsilon (y^1 - z^1) & x^0 - \varepsilon x^1 \end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2 = 1, \quad (14)$$

$\varepsilon^2 = 0$. Матрицы (12-14) заменой координат x_0, y_0, z_0, x_1 в пространстве A_0^3 могут быть сведены к „каноническим“ видам

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12a-14a)$$

Отсюда непосредственным вычислением получаем, что *антиинволюции* 2-го рода (12) оставляют на месте единственную точку пространства A_0^3 , а множество неподвижных точек *антиинволюции* 1-го рода (13) и *антиинволюции* 3-го рода (14) получается движением из поверхности $x^0=0$, соответственно, из поверхности $x^1=0$; эти поверхности мы назовем *плоскостью* 1-го рода, соответственно, *плоскостью* 2-го рода. Таким образом, антиинволюции пространства A_0^3 можно отождествить с сим-

метриями относительно точек, симметриями относительно плоскостей 1-го рода и симметриями относительно плоскостей 2-го рода.

Инволюции пространства A_0^3 (инволютивные движения (26) 1-го рода) заменой координат сводятся к тем, которым отвечают следующие „канонические“ пары матриц A :

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неподвижными точками этих последних инволюций будут, соответственно, все точки линии

$$x^0 = y^0 = 0 \tag{15a}$$

и все точки линии

$$x^0 = x^1 = 0. \tag{156}$$

Неподвижные точки произвольных инволюций пространства A_0^3 заполняют линии, получаемые из линий (15a) и (156) всевозможными движениями. Эти линии можно считать *геодезическими* относительно двух существующих в пространстве A_0^3 типов метрик, где геодезическая характеризуется условием аддитивности вдоль нее расстояний между точками; их естественно назвать *прямыми 1-го рода* (линия (15a) и ее образы) и *прямыми 2-го рода* (линия (156) и ее образы) пространства A_0^3 . Таким образом, инволюции пространства A_0^3 можно трактовать как *симметрии относительно прямых (1-го и 2-го рода)* этого пространства.

Итак, множество антиинволюций пространства A_0^3 можно отождествить с его точками и плоскостями, а множество инволюций — с его прямыми.

Используя методы, аналогичные примененным в п. 1, можно получить формулу для расстояния ψ от точки $X = \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon x^1 & y^0 + z^0 \\ y^0 - z^0 & -x^0 + \varepsilon x^1 \end{pmatrix}$ пространства A_0^3 до плоскости $U = \begin{pmatrix} u^0 + \varepsilon u^1 & v^0 + w^0 \\ v^0 - w^0 & -u^0 + \varepsilon u^1 \end{pmatrix}$, соответственно, $\begin{pmatrix} u^0 + \varepsilon u^1 & \varepsilon (v^1 - w^1) \\ \varepsilon (v^1 - w^1) & u^0 - \varepsilon u^1 \end{pmatrix}$:

$$\text{sh } \psi = u^0 x^0 + v^0 y^0 - w^0 z^0, \tag{9a}$$

если U является плоскостью 1-го рода, и

$$\psi = -x^1 + u^1 x^0 + v^1 y^0 - w^1 z^0, \tag{96}$$

если U — плоскость 2-го рода; отсюда следуют также условия инцидентности точки и плоскости.

Рассмотрим теперь пару матриц

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

и все пары матриц, получаемые из (16) движениями (26). Действительная часть всех этих матриц имеет вид

$$\pm \begin{pmatrix} x^0 & y^0 + z^0 \\ y^0 - z^0 & -x^0 \end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2 + (y^0)^2 - (z^0)^2 = 0. \quad (17)$$

Так как для пары матриц (17) и любой пары матриц (16) имеем $\varphi = \infty$, где φ определяется по формуле (5), то пары матриц (17) можно отождествить с точками *абсолюта* пространства A_0^3 . Вращению

вокруг точки абсолюта $\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ соответствуют пары матриц

А вида

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} = 1, \quad (18)$$

откуда можно вывести, что абсолют пространства A_0^3 является 2-мерным многообразием. Аналогично пара матриц $\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, разнесенная движениями (26), образует 3-мерное многообразие *идеальных точек* пространства A_0^3 .

3. *Двойная прямая.* Обратимся теперь к пространству A_1^3 антиинволюций *двойной прямой*, дополненной несобственными элементами: парой несобственных прямых и несобственной точкой „пересечения“ этих прямых; в результате такого пополнения (ср. [3]) двойная прямая обращается в многообразие, гомеоморфное тору.

Точками пространства A_1^3 будем считать антиинволюции двойной прямой или пары двойных матриц $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} x + ey & z + t \\ z - t & -x + ey \end{pmatrix}, \quad x, y, t, z \in R \text{ и } x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 1, \quad (19)$$

и $e^2 = 1$, а *движениями* — преобразования

$$X' = AX\bar{A}^{-1}, \text{ где } \det A = \pm 1 \text{ или } \det A_1 = \pm e \quad (2г)$$

(*движения 1-го рода*) и преобразования

$$X' = AX\bar{A}^{-1}, \text{ где } \det A = \pm 1 \text{ или } \det A = \pm e \quad (2д)$$

(*движения 2-го рода*). При этом любую точку пространства A_1^3 можно перевести движением в точку (6а) и две точки X_1 и X_2 имеют единственный независимый инвариант

$$\text{tr}(X_1\bar{X}_2) = 2(x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2). \quad (20)$$

Расстояние φ между точками X_1 и X_2 пространства A_1^3 мы определим формулой

$$\operatorname{tr}(X_1 \bar{X}_2) = \begin{cases} 2 \operatorname{ch} \varphi, & \text{если } |x_1 x_2 - y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2| > 1, \\ 2 \cos \varphi, & \text{если } |x_1 x_2 - y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2| < 1; \end{cases} \quad (21)$$

при этом, если $\varphi=0$, то точки X_1 и X_2 совпадают. Множество пар матриц

$$\pm \begin{pmatrix} x + ey & z + t \\ z - t & -x + ey \end{pmatrix}, \text{ где } x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 0 \quad (22)$$

определяет абсолют пространства A_1^3 ; его можно также описать как орбиту точки (16) при всевозможных движениях (2г).

Пара матриц $\pm A$, отвечающая произвольному инволютивному движению (2д) 2-го рода (антиинволюции пространства A_1^3) заменой координат может быть приведена к виду (6), откуда непосредственным вычислением получаем, что неподвижные точки такого движения образуют пару: точка (6а) и плоскость, т. е. множество точек

$$\pm \begin{pmatrix} x + ey & z \\ z & -x + ey \end{pmatrix}, \text{ где } x^2 - y^2 + z^2 = 1. \quad (23)$$

Говорят, что точка (6а) и плоскость (23) взаимно полярны относительно абсолюта (22) пространства A_1^3 .

Виды пар матриц $\pm A$, соответствующих „каноническим“ типам инволютивных движений (2г) 1-го рода (инволюциям пространства A_1^3) и множества неподвижных точек этих преобразований собраны в

следующей таблице; здесь $e_1 = \frac{1}{2}(1 + e)$ и $e_2 = \frac{1}{2}(1 - e)$ — идемпотентные элементы алгебры двойных чисел:

№№ п/п	Виды пар матриц	Множества неподвижных точек
1	$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$x = z = 0$ и $y = t = 0$
2	$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x = y = 0$ и $z = t = 0$
3	$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$	нет
4	$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$	нет
5	$\pm \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & -e_1 \end{pmatrix}$	нет
6	$\pm \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{pmatrix}$	нет
7	$\pm \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 & -e_2 \end{pmatrix}$	нет
8	$\pm \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 & e_2 \end{pmatrix}$	нет

Полученные в случаях 1 и 2 пары линий пространства A_1^3 называются парами *взаимно полярных* относительно абсолюта *прямых* этого пространства. При этом в случае 1 мы приходим к паре: действительная прямая $y = t = 0$ + мнимая прямая $x = z = 0$ (ибо в действительной области равенства $x = z = 0$ несовместимы с условием $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 1$); в случае 2 мы приходим к паре действительных прямых. Прямые $y = t = 0$, $x = y = 0$ и $z = t = 0$, а также образы этих линий при движениях (2г), мы назовем *прямыми 1-го, соответственно 2-го и 3-го рода* пространства A_1^3 . Таким образом, и здесь, как и выше, можно связать точки и плоскости рассматриваемого пространства с его антиинволюциями, а прямые — с инволюциями.

Аналогично пп. 1 и 2 можно также найти метрические инварианты пар введенных нами геометрических образов пространства A_1^3 .

4. *Плюральная прямая.* Точками пространства A_0^n , где уместно различать случаи $n = 2k$ четно и $n = 2k + 1$ нечетно, мы будем называть пару матриц (6а), а также все пары матриц, получаемые из (6а) движениями 1-го рода $X' = AX\bar{A}^{-1}$ и движениями 2-го рода $\bar{X}' = AX\bar{A}^{-1}$, где $\det A = \pm 1$; при этом теперь под A мы понимаем квадратные матрицы 2-го порядка над алгеброй *плюральных чисел*. Движению, оставляющему точку (6а) на месте (вращению вокруг точки (6а)) отвечают либо пары матриц $\pm A$ строения

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \quad (106)$$

либо пары матриц $\pm A$ строения

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \quad (10в)$$

Отсюда следует, что группа вращений вокруг точки состоит из двух несвязных компонент и является $(3k)$ -параметрической, соответственно $(3k+1)$ -параметрической, а само пространство A_0^n является $(3k)$ -мерным, соответственно $(3k+2)$ -мерным.

Любой точке пространства A_0^n можно поставить в соответствие пару (плюральных) матриц $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad x\bar{x} + y^2 - z^2 = -1. \quad (24)$$

Подгруппа группы движений пространства A_0^n , оставляющая на месте две точки этого пространства, не принадлежащие одной поверхности

$$x^0 = \text{const}, \quad y^0 = \text{const} \quad (11)$$

является k -параметрической, откуда вытекает, что пара точек, не принадлежащих одной поверхности (11), имеет k , соответственно $k+1$ независимых инвариантов, за которые можно принять, например, компоненты следа матрицы $(X_1 \bar{X}_2)$:

$$\text{tr} (X_1 \bar{X}_2) = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1 + 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2. \quad (25)$$

Рассмотрим плюральное число $\varphi = \varphi^0 + I^2 \varphi^2 + \dots + I^{2l} \varphi^{2l} + \dots$, определяемое формулой

$$\text{ch } \varphi = -\frac{1}{2} \text{tr} (X_1 \bar{X}_2), \quad (26)$$

где косинус плюрального аргумента φ вводится как обычно:

$$\text{ch } \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2m}}{(2m)!}. \quad (27)$$

Компоненту φ^{2l} плюрального числа φ мы назовем $(2l)$ -м расстоянием между точками X_1 и X_2 ; все эти расстояния являются инвариантами группы движений пространства A_0^n . При этом расстояние φ^0 между двумя точками обращается в нуль в том и только в том случае, когда эти точки принадлежат одной поверхности (11), являющейся $(3k-2)$ -мерным, соответственно $(3k)$ -мерным многообразием. Подгруппа группы движений пространства A_0^n , оставляющая на месте фиксированную точку этого пространства и проходящую через эту точку поверхность (11), является $(3k-1)$ -параметрической, соответственно $(3k)$ -параметрической, а ее подгруппа, оставляющая на месте еще одну точку поверхности (11)— $(k+1)$ -параметрической. Отсюда следует, что точки X_1 и X_2 пространства A_0^n , принадлежащие поверхности (11), но не принадлежащие никакой подповерхности

$$x^0 = \text{const}, y^0 = \text{const}, x^1 = \text{const} \quad (28)$$

поверхности (11) имеют k , соответственно $k+1$ независимых инвариантов, последним из которых является число $\det [(X_1 \bar{X}_2)^1]^{k-2}$, где $(X_1 \bar{X}_2)^1$ — коэффициент при I в плюральной матрице $X_1 \bar{X}_2$.

Если точки X_1 и X_2 принадлежат $(3k-3)$ -мерной, соответственно $(3k-1)$ -мерной поверхности (28), то, вообще говоря, они имеют $k-1$, соответственно k , независимых инвариантов—это можно вывести из того, что подгруппа группы движений пространства A_0^n , оставляющая на месте фиксированную точку этого пространства и проходящую через эту точку поверхность (28), будет $(3k-3)$ -параметрической, соответственно $(3k-2)$ -параметрической, а подгруппа этой последней группы, оставляющая на месте поверхность (28) и две точки этой поверхности— $(k-1)$ -параметрической. Исключение здесь составляют точки, принадлежащие поверхности

$$x^0 = \text{const}, y^0 = \text{const}, x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}, y^2 = \text{const}, x^3 = \text{const} \quad (29)$$

(ясно, что поверхность (28) „расслаивается“ на поверхности (29), каждая из которых имеет размерность, на 3 меньшую размерности поверхности (28)): две точки, принадлежащие поверхности (29), вообще говоря, имеют на единицу меньше независимых инвариантов чем точки поверхности (28).

Продолжая рассуждать таким же образом и далее, мы убедимся, что через каждую точку пространства A_0^n проходит система вложенных друг в друга p -поверхностей:

$$x^{2l} = \text{const}, y^{2l} = \text{const}, x^{2l+1} = \text{const}; l=0, 1, 2, \dots, p \quad (30)$$

(начинающаяся с не описываемых уравнениями (30) поверхностей (11)); при увеличении значения p на единицу размерность соответствующей поверхности понижается на три, а число инвариантов, принадлежащих p -поверхностям пар точек уменьшается на единицу. Если условиться называть линию пространства A_0^n , характеризующуюся аддитивностью вдоль нее j -го инварианта пар точек, j -й геодезической, то мы отметим также понижение на единицу числа проходящих через две точки геодезических при переходе от точек p -поверхности к точкам $(p+1)$ -поверхности: так, например, через две точки, не принадлежащие поверхности (28), проходит k , соответственно $k+1$ геодезических, а через точки, принадлежащие поверхности (28), но не принадлежащие поверхности (29) — уже только $k-1$, соответственно, k геодезических. Такая структура пространств A_0^n делает их близкими к n -мерным флаговым пространствам F_n (см., например, [4]); однако более детальное изучение геометрических свойств пространств A_0^n требует дальнейших исследований.

5. Антициклическая и циклическая прямые. Точкой пространства A_{-1}^n , соответственно, пространства A_1^n , мы будем называть пару матриц (6а) и любую пару матриц, получаемую из (6а) движением $X' = AX\bar{A}^{-1}$ или $X' = A\bar{X}\bar{A}^{-1}$, где теперь A — квадратная матрица 2-го порядка над алгеброй антициклических, соответственно, циклических чисел и $\det A = \pm 1$ при $n = 2k + 1$ нечетном, $\det A = 1$ при $n = 2k$ четном в случае антициклических чисел и $\det A = \pm 1$ или $\det A = \pm e$ — в случае циклических чисел и $n = 2k$; здесь $e = I^k$, так что $e^2 = 1$. Так как алгебра антициклических чисел при $n = 2k$ разлагается в прямую сумму k полей комплексных чисел: алгебра циклических чисел при $n = 2k$ разлагается в прямую сумму $n-1$ полей комплексных чисел и алгебру двойных чисел, а при $n = 2k + 1$ и алгебра циклических чисел и алгебра антициклических чисел разлагаются в прямую сумму k полей комплексных чисел и поля действительных чисел, то пространство A_{-1}^{2k} является прямой суммой k пространств L_3 , пространство A_1^{2k} является прямой суммой $k-1$ пространств L_3 и пространства A_3^3 , а пространства A_{-1}^{2k+1} и A_1^{2k-1} представляют собой прямую сумму k пространств L_3 и пространства L_2 .

Ա. Ի. ՍԵՐՂԵԵՎԱ. Բնդհանրացված կոմպլեքս ուղիղների երկրորդ սեռի անտիինվոլյուցիաների տարածություններ (ամփոփում)

[1]-ում է. Կարտանը դիտարկել է կորաշևակու եռաչափ տարածության մոդելը, որում որպես կետեր հանդես են գալիս կոմպլեքս ուղղի երկրորդ սեռի անտիինվոլյուցիաները: Աշխատանքում այդ կառուցումն ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ կոմպլեքս թվերի դաշտը փոխարինվում է n կարգի պլուրալ, անտիցիկլիկ, ցիկլիկ թվերի հանրահաշիվներով: Ուսումնասիրվում է այդ դեպքում ստացվող տարածությունների երկրաչափությունը: Առանձին և ավելի մանրամասնորեն դիտարկված են $n=1,2$ դեպքերը:

A. I. SERGEEVA. *The spaces of the second kind antiinvolutions of generalised complex lines (summary)*

E. Cartan [1] has considered a model of three-dimensional Lobatchevski space, in which second kind antiinvolutions of the complex line serve as points.

The present paper generalised this construction to the case, when the field of complex numbers is replaced by algebras of plural, anticiclic or ciclic numbers of order n . The geometry of the spaces so obtained is investigated. The cases of $n=1, 2$ are considered in more detail.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. Cartan. *Lecons sur la geometrie projective complexe*, Paris, 1950.
2. Л. Б. Выжмина. Проективные пространства над алгебрами циклических, антициклических и плюральных чисел, Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, 173, вып. 2, 1967, 17—25.
3. И. М. Ялом. Комплексные числа и их применение в геометрии, М., Физматгиз, 1963.
4. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы пространства, М., Изд. „Наука“, 1969.