

Ф. А. ШАМОЯН

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ,
СВЯЗАННЫХ С ДЕЛИМОСТЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

1°. Пусть U — единичный круг, Γ — его граница, H^p — класс Харди аналитических функций с обычной L^p -нормой. Пусть $f \in H^p$, тогда f допускает каноническую факторизацию

$$f = BSQ,$$

где B — произведение Бляшке, S — сингулярная внутренняя, Q — внешняя функция. Следуя Бёрлингу, будем называть BS внутренней, Q — внешней частями функции f . Некоторая внутренняя функция $\tilde{f} = \tilde{B}\tilde{S}$ называется делителем функции f , если $BS\tilde{f}^{-1}$ является регулярной ограниченной функцией в U .

Пусть X — некоторое пространство функций, аналитических в круге $X \subset H^p$. При изучении инвариантных подпространств оператора умножения $(Tf)(z) = zf(z)$, существенно иметь утверждение, устанавливающее, что если $f \in X$ и $\tilde{f}$ — делитель функции f , то $\tilde{f}^{-1} \in X$.

Первые результаты подобного рода для пространств A , H^p и для пространств D — функций с конечным интегралом Дирихле содержатся в [1] и [14].

Для различных классов функций, аналитических в круге и гладких вплоть до единичной окружности, утверждения такого рода были получены в [5] — [10].

В статьях [8], [9] (см. также [6]) для некоторых классов аналитических функций доказано, что если $h \in H^p$, то функция

$$g(z) = P(\bar{h}f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{h}(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

не „хуже“ в смысле гладкости, чем f . В частности, в [8] доказано следующее утверждение.

Пусть $H(U)$ — множество функций, аналитических в U , n — натуральное число, а

$$H_n^p = \{f; f^{(n)} \in H^p, \|f\|_{H_n^p} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{H^p}\},$$

$$A_n^p = \{f \in H(U); f \in L^p(U), \|f\|_{A_n^p} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{L^p(U)}\}.$$

Тогда, если $f \in H_1^p$ или $f \in A_1^p$ ($1 < p < +\infty$), то функция $g = P(\bar{h}f)$ тоже принадлежит пространству H_1^p и, соответственно, пространству A_1^p ; аналогичные утверждения верны для пространства A_n^2, H_n^2 при любом натуральном $n \geq 1$ (см. также [6]).

2°. В данной статье мы установим, что аналогичные утверждения верны также в пространствах A_n^p, H_n^p при всех $n \geq 1$, $1 < p < +\infty$ (теоремы 1, 4) и для A_n^1 при всех $n \geq 2$ (теорема 3).

В то же время доказывается (теорема 2), что существуют функция $h \in H^\infty$ и множество M второй категории в A^1 ($A^1 = A_0^1$) такие,

что для любого $\varphi \in M$ и $f(z) = \int_0^z \varphi(t) dt = (J\varphi)(z)$ функция $g = P(\bar{h}f) \in A_1^1$. Здесь же доказывается эквивалентность следующих утверждений:

- а) $P(\bar{h}f) \in A_1^1$ для любого $f \in A_1^1$,
- б) $\sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1 - |z|) \log \frac{1}{1 - |z|} \right] < +\infty$.

Таким образом, в последнем случае налицо новый эффект, состоящий из необходимости дополнительной „гладкости“ функций h , $h \in H^\infty$ для того, чтобы для всех $f \in A_1^1$ имели $P(\bar{h}f) \in A_1^1$.

Отметим, что в работе существенно используется тот факт, что рассмотренные нами пространства можно „отождествить“ с сопряженными пространствами некоторых пространств функций, аналитических в круге.

§ 1. Ограниченность оператора $P(\bar{h} \cdot)$ в пространствах A_n^p ($1 < p < +\infty$)

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. Пусть $f \in A_n^p$, $h \in H^\infty$, тогда функция $g = P(\bar{h}f)$ принадлежит A_n^p .

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $f \in A_1^1$, тогда $f \in H^1$.

Доказательство. Положим $z_1 = r e^{i\varphi}$, тогда

$$f(re^{i\varphi}) = f(0) + \int_0^r f^{(1)}(te^{i\varphi}) e^{i\varphi} dt.$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leq |f(0)| + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r |f^{(1)}(te^{i\varphi})| dt d\varphi < +\infty.$$

Лемма доказана.

Следующие две леммы являются некоторым обобщением соответствующих теорем Литтльвуда-Пели (см. [3], стр. 316).

Лемма 2. Пусть $f \in H^p$, $1 \leq p < +\infty$ и n — натуральное число. Положим

$$g_n(\theta, f) = \left(\int_0^1 (1-r)^{2n-1} |f^{(n)}(re^{i\theta})|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда существует постоянная $C(n, p)$ такая, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(\theta, f) d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p) \|f\|_{H^p}.$$

Доказательство. Отметим, что при $n=0$, $g_0(\theta, f) = g(\theta)$, $g(\theta)$ — известная функция Литтльвуда-Пели (см. [3], стр. 316). Выразим $f^{(n)}$ через контурный интеграл от функции $f^{(1)}$

$$f^{(n)}(re^{i\theta}) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f^{(1)}(t) dt}{(t - re^{i\theta})^n},$$

где Γ_ρ — окружность радиуса ρ , $\Gamma = \Gamma_1$, ($r < \rho < 1$). Имеем

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(re^{i\theta})|^2 &\leq \left(\frac{(n-1)!}{2\pi} \right)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}(\rho e^{i(\theta-\tau)})|^2 d\tau}{|\rho - re^{i\tau}|^{2(n-1)}} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{|\rho - re^{it}|^2} = \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{2\pi} \right)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 dt}{|\rho - re^{it}|^{2(n-1)}} \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(\rho-r)^2 + 4\rho r \sin^2 \frac{t}{2}} \right). \end{aligned}$$

Положим $\rho = \frac{1+r}{2}$. Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\frac{(1-r)^2}{4} + 2(1+r)r \sin^2 \frac{t}{2}} = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-r)^2 + 8(1+r) \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{16}{(1-r)}.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{1+r}{2} - re^{it} \right|^2 \geq \frac{1}{4} \left[(1-r)^2 + 4\rho r \sin^2 \frac{t}{2} \right] = \frac{|1 - re^{it}|^2}{4}.$$

Поэтому

$$\|f^{(n)}(re^{i\theta})\|^2 \leq \frac{4^n}{(1-r)} \left(\frac{(n-1)!}{\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}\left(\frac{1+r}{2} e^{i(\theta+t)}\right)|^2 dt}{|1 - re^{it}|^{2(n-1)}}.$$

Отсюда получаем

$$g_n(\theta, f) \leq \frac{2^n (n-1)!}{\pi} \left(\int_0^1 (1-r)^{2n-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}\left(\left(\frac{1+r}{2}\right) e^{i(\theta+t)}\right)|^2}{|1 - r e^{it}|^{2n-2}} dt dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

или же

$$g_n(\theta, f) \leq \frac{2^n (n-1)!}{\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2) |f^{(1)}(\rho e^{i(\theta+t)})|^2}{|1 - (2\rho-1) e^{it}|^2} dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

так как

$$|1 - (2\rho-1) e^{it}|^2 \geq C_0 (1-\rho e^{it})^2, \quad \frac{1}{2} \leq \rho < 1,$$

где C_0 не зависит от t и ρ , то

$$g_n(\theta, f) \leq C(n, p) \left(\int_0^1 (1-\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 (1-\rho^2) dt}{|1 - \rho e^{it}|^2} d\rho \right)^{\frac{1}{2}} = g_*(\theta, f), \quad (1)$$

$g_*(\theta, f)$ — известная функция А. Зигмунда. Доказательство леммы следует из неравенства (1) и соответствующего результата А. Зигмунда (см. [15]).

Лемма 3. Пусть $1 < p < +\infty$, n — натуральное число,

$$f \in H^p, f^{(k)}(0) = 0, k=0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда существует постоянная $C(n, p)$ такая, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(\theta, f) d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство этой леммы, по существу, не отличается от случая $n=1$, только нужно применить вместо теоремы Литтльвуда-Пели лемму 2.

Лемма 4. Пусть $f \in A^p$, $1 < p < +\infty$, предположим $f^{(k)}(0) = 0$, $k=0, 1, \dots, n-1$, положим $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $0 < \rho < 1$, тогда существуют положительные числа $C_1(n, p)$, $C_2(n, p)^*$ такие, что

$$\begin{aligned} C_1(n, p) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p \rho d\rho dt &\leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(t, f_\rho) \rho d\rho dt \leq \\ &\leq C_2(n, p) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p \rho d\rho dt. \end{aligned}$$

* В дальнейшем $C_k(\)$ будет обозначать положительное число, значение которого не будет играть никакой роли.

Доказательство. В силу лемм 2, 3 существуют $C_1(n, p)$, $C_2(n, p)$ такие, что для любого $\rho \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} C_1(n, p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta &\leq \int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(t, f_\rho) dt \leq \\ &\leq C_2(n, p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta. \end{aligned}$$

Остается умножить это неравенство на ρ и проинтегрировать по ρ .

Лемма 5. Пусть T — линейный* функционал на A^p , $1 < p < +\infty$, предположим, что $g(z) = T\left(\frac{1}{1-z}\right)$, тогда $g \in A_q^1$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, кроме того

$$T(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta, \quad (2)$$

и обратно, для любых $f \in A^p$, $g \in A_q^1$ предел (2) существует и определяет линейный функционал на A^{p**} .

Доказательство. Предположим, что $T \in (A^p)^*$, докажем (2), для этого заметим, что $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T(z^k) z^k$. Пусть $f \in A^p$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \|f_\rho - f\|_{A^p} = 0, \quad f_\rho(z) = f(\rho z),$$

потому

$$T(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} T(f_\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(z^k) \rho^k. \quad (3)$$

Поскольку A^p является подпространством $L_p(U)$, то по теореме Хана—Банаха функционал T можно с сохранением нормы продолжить до линейного функционала F , определенного на всем пространстве $L^p(U)$. Используя известный вид линейного функционала в $L^p(U)$, получим

$$g^{(1)}(z) = T\left(\frac{t}{(1-tz)^2}\right) = \int_U \int \frac{th(t)}{(1-tz)^2} d\xi d\eta,$$

$$t = \xi + i\eta, \|T\| = \|F\| = \|h\|_{L^q(U)}.$$

* т. е. аддитивный ограниченный функционал.

** В [11] дано другое представление линейных функционалов в A^p , однако для применений нам удобно представление (2).

Пусть

$$G(w) = \int \int_{|t| > +\infty} \frac{h_1(t) d\bar{z} d\gamma}{(t-w)^2}, \quad (4)$$

$$h_1(t) = \begin{cases} th(t), & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Сингулярный интеграл (4) принадлежит к типу интегралов, исследованных А. П. Кальдероном и А. Зигмундом (см. [4], стр. 207). Пользуясь их результатом, получим

$$\|g^{(1)}\|_{A^p} \leq \|G\|_{L_q(C)} < +\infty, \text{ т. е. } g \in A_1^p.$$

Учитывая (3) и лемму 1, получаем (2). Предположим теперь, что $g \in A_1^p$, тогда по лемме 1 $g \in H^p$. Докажем, что предел (2) существует и определяет линейный функционал на A^p .

Пусть

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta,$$

заметим, что

$$\rho \varphi^{(1)}(\rho^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g^{(1)}(\rho e^{-i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^2 |\varphi^{(1)}(\rho^2)| d\rho &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^{\frac{1}{2}} |\varphi^{(1)}(\rho)| d\rho \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |f(\rho e^{i\theta}) g^{(1)}(\rho e^{-i\theta})| \rho d\rho d\theta \leq \|f\|_{A^p} \|g\|_{A_1^q}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$T(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta$$

существует и

$$|T(f)| \leq \|g\|_{A_1^q} \|f\|_{A^p}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 5 можно получить характеристику тех множеств $E \subset C^1/U$, для которых $\left\{ \frac{1}{z-\zeta} \right\}_{\zeta \in E}$ плотно в пространствах A^p .

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in A^p$, $1 < p < +\infty$, $h \in H^\infty$,

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(t) \bar{h}(t) dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Пусть, далее, $\psi \in A^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и

$$(J\psi)(z) = \int_0^z \psi(t) dt.$$

Из леммы 1 имеем $J\psi \in H^1$. Пусть $\varphi = J\psi$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\varphi(e^{i\theta})} d\theta &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(e^{i\theta})} \frac{d\theta det}{(e^{i\theta} - re^{i\theta})^{n+1}} = \\ &= -\frac{n!}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta}) e^{in\theta} e^{in\theta} de^{i\theta}}{(e^{i\theta} - re^{i\theta})^{n+1}} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\varphi(e^{i\theta})} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta}) e^{in\theta} (\varphi(z) z^n)^{(n)}} dt, \quad (5)$$

$$z = re^{i\theta}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta}) e^{in\theta} (\varphi(z) z^n)^{(n)}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_{n-1}(e^{i\theta}) \overline{F_r(e^{i\theta})} e^{in\theta} d\theta,$$

$$z = re^{i\theta}$$

где $f_{n-1}(z) = (f(z) z^{n-1})^{(n-1)}$,

$$\begin{aligned} F_r(z) &= \int_0^z dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-3} \cdots \int_0^{t_1} h(t) t^n \varphi_n(rt) dt = \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^z (z-t)^{n-2} h(t) t^n \varphi_n(rt) dt, \text{ где } \varphi_n(z) = (\varphi(z) z^n)^{(n)}. \end{aligned}$$

По лемме 4 $F_r \in A^q$, $0 < r \leq 1$, $f_{n-1} \in A^p$, кроме того

$$\|F_r\|_{A^q} \leq C(g, n) \|h\|_{\infty} \|\psi\|_{A^q}.$$

Следовательно

$$T(\varphi_0) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(\rho e^{i\theta}) f_{n-1}(e^{i\theta}) dt$$

определяет линейный функционал на A^q . Из леммы 4 следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|F_r - F\|_{A^q} = 0,$$

где $F = F_1$.

Повтому

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} T(F_r) = T(F) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) \overline{f_{n-1}(e^{i\theta})} d\theta,$$

$$|T(F)| \leq C(p, n) \|h\|_{A^q} \|f\|_{A^p_n}.$$

В силу этого

$$T_1(\psi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (J\psi)(e^{i\theta}) \overline{g^{(n)}(re^{i\theta})} d\theta$$

представляет линейный функционал на A^q . По доказанному функция

$$G(z) = T_1\left(\frac{z}{(1-tz)^2}\right) \text{ принадлежит } A^p,$$

$$J\left(\frac{z}{(1-tz)^2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{z d\tau}{(1-\tau z)^2} = \frac{1}{1-wz} - 1.$$

В то же время

$$G(z) = -g^{(n)}(0) + \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{g^{(n)}(re^{i\theta})} d\theta}{1-zre^{i\theta}} =$$

$$= \overline{g^{(n)}(0)} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \overline{g^{(n)}(re^{i\theta})} d\theta z = \overline{g^{(n)}(z)} - \overline{g^{(n)}(0)}, \text{ т. е. } g^{(n)} \in A^p.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f \in A^p_n$, $1 < p < +\infty$, $f = JF$, где J — внутренняя функция, $F \in H^1$, тогда $F \in A^p_n$.

§ 2. Случай пространства A^1_n

Теорема 2. Пусть $h \in H^\infty$, тогда

1. Следующие утверждения равносильны:

$$a) \sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] < +\infty,$$

б) $P(\overline{h}f)$ принадлежит A^1_1 для любого $f \in A^1_1$.

2. Если

$$\sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] = +\infty,$$

то существует множество M второй категории в A_1 такое, что

для любого $\varphi \in M$ и $f(z) = \int_0^z \varphi(t) dt$ функция

$$g = P(\bar{h} f) \in A_1^1.$$

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Пусть $\lambda^{(n)}$ — пространство функций, аналитических в U и таких, что $f^{(n)} \in C_A$ (C_A — множество функций, аналитических в U и непрерывных в $\bar{U}$),

$$|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = o(|t|)$$

равномерно по $\theta \in (-\pi, \pi]$.

$\Delta^{(n)}$ — множество функций, аналитических в U и таких, что $f^{(n)} \in C_A$ и

$$|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = O(|t|)$$

равномерно по $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Эти пространства превращаются в банахово пространство по норме

$$\|f\|_\Lambda = \|f\|_\infty + \sup_{\theta, t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})|}{|t|},$$

где $\Lambda = \lambda^{(n)}$, $\Lambda^{(n)}$.

Обозначим $\lambda_* = \lambda^{(0)}$, $\Lambda_* = \Lambda^{(n)}$.

Следующая лемма вытекает из теоремы А. Зигмунда (см. [12], стр. 76).

Лемма 6. Пусть $f \in C_A$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 2$, тогда

$$1^\circ. \quad f \in \Delta_* \Leftrightarrow f^{(n)}(z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{n-1}}\right),$$

$$2^\circ. \quad f \in \lambda_* \Leftrightarrow f^{(n)}(z) = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^{n-1}}\right),$$

$$3^\circ. \quad \|f\|' = \|f\|_\infty + \sup_{|z| < 1} [(1-|z|) |f^{(2)}(z)|]$$

эквивалентно норме $\|f\|_\Lambda$, $\Lambda = \Lambda_*$, λ_* .

Пусть $0 < r < 1$, $h \in H^\infty$, $\psi \in \Lambda_*$. Обозначим

$$T_r(\psi)(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^z h(t) t^2 \psi^{(1)}(rt) dt.$$

Из леммы 6 следует, что $T_r \in L(\Lambda_*, \Lambda_*)$, где $L(\Lambda_*, \Lambda_*)$ — пространство линейных операторов $\Lambda_* \rightarrow \Lambda_*$.

Лемма 7.

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\| < +\infty \Leftrightarrow \sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] < +\infty,$$

где $\|T_r\|$ — норма T_r в $L(\Lambda_*, \Lambda_*)$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Легко заметить, что

$$(T_r(\psi)(z))^{(2)} = \frac{6}{z^4} \int_0^z h(t) t^3 \psi^{(1)}(rt) dt + \frac{rh^{(1)}(z) \psi^{(1)}(rz)}{z} + \\ + r h(z) \psi^{(2)}(rz). \quad (6)$$

По лемме 6 и (6)

$$|(T_r(\psi)(z))^{(2)}| \leq C \left(|h^{(1)}(z)| \|\psi\|_{\Lambda_*} \log \frac{1}{1-|z|} + \frac{\|h\|_{\Lambda_*} \|\psi\|_{\Lambda_*}}{(1-|z|)} \right)$$

при $|z| < 1$, поэтому

$$\|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} \leq \left(C_1 \|h\|_{\Lambda_*} + \|\psi\|_{\Lambda_*} \left(\log \frac{1}{1-|z|} \right) \|h^{(1)}(z)\| \right),$$

то есть

$$\sup_{\|\psi\|_{\Lambda_*} < 1} \|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} \leq C_1 \|h\|_{\Lambda_*},$$

следовательно

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\| \leq C_1 \|h\|_{\Lambda_*} < +\infty.$$

Предположим теперь, что

$$\sup_{|z| < 1} \left| |h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right| = +\infty \quad (7)$$

и докажем, что

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\| = +\infty.$$

Из (7) следует существование последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|\lambda_k| < 1$, $|\lambda_k| \rightarrow 1 - 0$, при $k \rightarrow \infty$ такой, что

$$\sup_k \left[|h^{(1)}(\lambda_k)| (1-|\lambda_k|) \log \frac{1}{1-|\lambda_k|} \right] = +\infty.$$

Положим

$$\psi_k(z) = \int_0^z \log \frac{1}{1-\bar{\lambda}_k t} dt,$$

тогда, как легко видеть, $\psi_k \in \Lambda_*$, $k=1, 2, \dots$, и

$$\sup_k \|\psi_k\|_{\Lambda_*} < +\infty. \quad (8)$$

Из (6) имеем

$$\left| h^{(1)}(z) \log \frac{1}{1-\bar{\lambda}_k z} \right| \leq C_2 \|h\|_{\Lambda_*} \left[|(T_r(\psi_k)(z))^{(2)}| + \frac{\|\psi_k\|_{\Lambda_*}}{1-|z|} \right].$$

Повторю для любого $z \in U$

$$(1-|z|) |h^{(1)}(z)| \left| \log \frac{1}{1-\bar{\lambda}_k z \cdot r} \right| \leq C_3 \|h\|_{\Lambda_*} [\|T_r(\psi_k)\|_{\Lambda_*} + \|\psi_k\|_{\Lambda_*}],$$

отсюда

$$\sup_{0 < r < 1} \sup_k \|T_r(\psi_k)\|_{\Lambda_*} = +\infty.$$

Из (8) получаем

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\| = +\infty,$$

доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, что

1°. а) $\Rightarrow$ б). Воспользуемся тем фактом, что сопряженное пространство $(\lambda_*)^*$ эквивалентно пространству A^1 (см. [13], теорему 11). Пусть $f \in A_1^1$ и

$$g^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) \overline{h(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Предположим, что $\psi \in \lambda_*$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt &= r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{h(e^{it}) \psi(re^{it}) e^{2it}} dt + \\ &+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{h(e^{it}) \psi(re^{it}) e^{it}} dt = r \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(1)}(\rho e^{it}) \overline{T_r(\psi)(e^{it})} dt + \\ &+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{it} \overline{T_r(\psi)(e^{it})} dt + r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{h(e^{it}) \psi(re^{it}) e^{it}} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем теперь, что для любого $\psi \in \lambda_*$

$$\|T_r(\psi) - T_1(\psi)\|_{\lambda_*} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 1-0. \quad (10)$$

Очевидно (10) выполняется для любого $P \in P_A$, (P_A — множество всех многочленов), но так как $P_A = \lambda_*$, то (10) следует из леммы 7 и теоремы Банаха-Штейнгауза (см. [2], стр. 232). Пусть Φ — линейный функционал в λ_* , порожденный функцией $f^{(1)}$. Ввиду (9) и (10), предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(1)}(re^{it})} \psi(e^{it}) dt$$

существует и равен

$$\begin{aligned} \Phi(T_1(\psi)) + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it}) e^{it}} T_1(\psi)(e^{it}) dt + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it}) h(e^{it}) \psi(e^{it}) e^{it}} dt. \end{aligned}$$

Повторю, если

$$T_{g^{(1)}}(\psi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g^{(1)}(re^{it})}{1-re^{it}} \psi(e^{it}) dt,$$

$$|T_{g^{(1)}}(\psi)| \leq C_0 \|h\|_{A^1} \|\psi\|_{A^1}.$$

Следовательно $T_{g^{(1)}}$ — линейный функционал в Λ_* . Из результатов работы [13] получим

$$T\left(\frac{1}{1-z}\right) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-re^{it}} \overline{g^{(1)}(re^{it})} dt = \overline{g^{(1)}(z)},$$

$g^{(1)}$ принадлежит A^1 . Легко заметить, что из 2 следует б) $\rightarrow$ а). Поэтому докажем пункт 2 теоремы.

В силу леммы 7, имеем

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\|_{L(\Lambda_*, \Lambda_*)} = +\infty.$$

Поэтому по принципу равномерной ограниченности существует функция $\psi \in \Lambda_*$ такая, что

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} = +\infty. \quad (11)$$

Пусть

$$F_r(z) = T_r(\psi)(z).$$

Предположим Φ_r — функционал в A^1 , порожденный функцией F_r . Ввиду эквивалентности норм $\|F_r\|_{\Lambda_*}$ и $\|\Phi_r\|$ (см. [13]), по (11) получаем

$$\sup_{0 < r < 1} \|\Phi_r\| = +\infty.$$

Снова применяя принцип равномерной ограниченности, докажем существование множества M второй категории в A^1 такого, что

$$\sup_{0 < r < 1} |\Phi_r(f)| = +\infty$$

для любого $f \in M$. Пусть $f_0 \in M$.

$$f = Jf_0, \quad g = P(\bar{h}f).$$

Тогда из (9) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt &= r\Phi_r(f_0) + \\ &+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{e^{it} T_r(\psi)(e^{it})} dt + \\ &+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{h(e^{it}) \psi(re^{it})} e^{it} dt. \end{aligned}$$

Очевидно последние два слагаемых равномерно ограничены на $0 < r < 1$ откуда имеем

$$\sup_{0 < r < 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt \right| = \sup_{0 < r < 1} |\Phi_r(f_0)| + O(1) = +\infty.$$

Из результатов работы [13] следует, что $g^{(1)} \notin A^1$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f = JF$ принадлежит пространству A где J — внутренняя функция и $F \in H^1$, тогда если

$$\sup_{z \in U} \left| |J^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right| < +\infty,$$

то функция F тоже принадлежит A^1 .

Замечание. Отметим, что существует достаточно широкий класс функций, удовлетворяющих условию 2. Простым примером функции с таким свойством является

$$S(z) = \exp \left(\frac{z+1}{z-1} \right).$$

Для производных высших порядков справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $f \in A_n^1$, $n > 2$, тогда для любого $h \in H$ функция $g = P(\bar{h}f)$ принадлежит пространству A_n^1 , кроме того

$$\|g\|_{A_n^1} \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|f\|_{A_n^1}.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} T_r(\psi)(z) &= \int_0^z dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} h(t) t^n (\psi(z) - \psi(t))^{(n)}_{t=rt} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} t^n h(t) (\psi(z) - \psi(t))^{(n)}_{t=rt} dt, \quad \psi \in \lambda_*. \end{aligned}$$

Сначала докажем, что

$$T_r \in L(\lambda_*, \lambda_*)$$

и

$$\sup_{0 < r < 1} \|T_r\| \leq C(n) \|h\|_{\infty}. \quad (12)$$

Для этого используем лемму 6

$$(T_r(\psi)(z))^{(n)} = h(z) z^n (\psi(t) - \psi(z))^{(n)}_{t=rz}.$$

По лемме 6 $T_r(\psi) \in \lambda_*$, кроме того

$$\|T_r(\psi)\|_{\lambda_*} \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|\psi\|_{\lambda_*},$$

т. е. $T_r \in L(\lambda_*, \lambda_*)$ и (12) выполняется. Пусть теперь $f \in A_n^1$, $g = P(\bar{h}f)$ тогда учитывая (5), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(ze^{it}) (ze^{it})^n)^{(n)} e^{int} \overline{T_r(\psi)(e^{it})} dt.$$

Предположим Φ — линейный функционал на $\mathcal{H}_*$, порожденный функцией $(f(z) z^n)^{(n)} z^n$. Тогда имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(n)}(re^{it})} \psi(e^{it}) dt = \Phi(T_r(\psi)).$$

Аналогично, как и при доказательстве (10), получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|T_r(\psi) - T_1(\psi)\|_{\mathcal{H}_*} = 0$$

для любого $\psi \in \mathcal{H}_*$. Следовательно предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(n)}(re^{it})} \psi(e^{it}) dt$$

существует и равен $\Phi(T_1(\psi))$.

Учитывая (12) и результаты работы [13] получаем, что если

$$T_{g^{(n)}}(\psi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(n)}(re^{it})} \psi(e^{it}) dt,$$

то

$$\|T_{g^{(n)}}(\psi)\| \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|f\|_{A_n^1} \|\psi\|_{\mathcal{H}_*}.$$

Поэтому из [13] следует, что $g^{(n)} \in A^1$ и

$$\|g\|_{A_n^1} \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|f\|_{A_n^1}.$$

Доказательство закончено.

Для пространств H_n^p ($1 < p < +\infty$) имеет место аналог теоремы 1, а именно:

Теорема 4. Пусть $f \in H_n^p$ и $h \in H^{\infty}$, тогда функция $g = P(\bar{h}f)$ принадлежит пространству H_n^p и

$$\|g^{(n)}\|_{H^p} \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|f\|_{H_n^p}.$$

Доказательство. Пусть $f \in H^n$, $h \in H^{\infty}$, $g = P(\bar{h}f)$. Из теоремы М. Рисса (см. [12], стр. 55) и теоремы Ф. Рисса (см. [2], стр. 90) следует, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g^{(n)}(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_q \sup_{\|h\|_{H^q} < 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} d\theta \right|, \quad (13)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, A_q — постоянная из теоремы М. Рисса. Пусть $\psi \in H^q$, тогда (см. (5))

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{it}) e^{int})^{(n)} e^{int} \overline{F_r(e^{it})} dt,$$

где

$$F_r(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} t^n (\psi(w) w^n)^{(n)}_{w=r} dt.$$

Теперь, используя леммы 2 и 3, получаем

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt \right| \leq C(n) \|h\|_{\infty} \|\psi\|_{H^q} \|f\|_{H_n^p},$$

отсюда и из (13) следует, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g^{(n)}(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p) \|h\|_{\infty} \|f\|_{H_n^p}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть X совпадает с одним из следующих пространств: H_n^p , $n \geq 0$, $1 < p < +\infty$, A_n^1 при $n \geq 2$. Предположим $f = J$, где J — внутренняя функция, а $F \in H^1$, тогда функция F тоже принадлежит пространству X .

Замечание. После того как статья была готова к печати автор узнал о недавно опубликованной заметке Н. А. Широкова [10], где без доказательства анонсирована теорема 4. Н. А. Широков сообщил мне, что леммы 2 и 3 другим методом ранее были доказаны в статье [16].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12.III.1977

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Մի դասի օպերատորների մասին, կապված անալիտիկ ֆունկցիաների բաժանելիության հետ (ամփոփում)

Դիցուք A_n^p , H_n^p այն ֆունկցիաների դասերն են, որոնք անալիտիկ են $\mathbb{U}$ միավոր շրջանում, և որոնց n -րդ կարգի ածանցյալը պատկանում է $L_p(U)$ -ին համապատասխանաբար H^p -ին:

Հետզհետե ապացուցվում է, որ եթե $h \in H^\infty$ և X -ը համընկնում է հետևյալ դասերից մեկին: A_n^p , H_n^p , $n \geq 1$, $1 < p < +\infty$, A_n^1 , $n \geq 2$,

և ԷՔԷ $f \in X$, ապա $P(\bar{h}f)$ -ը նույնպես պատկանում է X -ին, որտեղ P -ն Մ. Ռիսսի պրոեկտորն է: A_1^1 -ի համար ապացուցվում է հետևյալ երկու պնդումների էկվիվալենտությունը.

$$\omega) \quad P(\bar{h}f) \in A_1^1, \quad \text{ցանկացած} \quad f \in A_1^1 \quad \text{դեպքում}$$

$$\rho) \quad \sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1 - |z|) \log \frac{1}{1 - |z|} \right] < +\infty:$$

F. A. SHAMOIAN. *On a bounded class of operators in the theory of divisibility of analytical functions* (summary)

Let X denote one of the spaces A_n^p , H_n^p , $n \geq 1$, $1 < p < +\infty$, A_n^1 , $n \geq 2$, where A_n^p (H_n^p) are the spaces of functions analytical in the unit disc U with n -th derivative belonging to $L^p(U)$ (H^p).

The paper's main result is the following: $f \in X$ and $h \in H^\infty$ implies $P(\bar{h}f) \in X$, P is the projector of M. Riss.

For A_1^1 space the following statements a) and b) have been proved to be equivalent:

$$a) \quad P(\bar{h}f) \in A_1^1 \quad \text{for every} \quad f \in A_1^1,$$

$$b) \quad \sup_{|z| < 1} \left[|h^{(1)}(z)| (1 - |z|) \log \frac{1}{1 - |z|} \right] < +\infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. Гoffman. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
2. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1958.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. II, «Мир», М., 1965.
4. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы, т. II, 1966.
5. Б. И. Коренблум. Об одном экстремальном свойстве внешних функций, Мат. заметки, 10, № 1, 1971, 53—56.
6. Б. И. Коренблум, В. М. Файвишевский. Об одном классе сжимающих операторов, связанных с делимостью аналитических функций, УМЖ, 24, № 5, 1972, 692—694.
7. С. А. Виноградов, Н. А. Широков. О факторизации функций с производной из H^p , Зап. научн. семинар., ЛОМИ, 22, 1971, 8—27.
8. В. П. Хавин. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Зап. научн. семинар. ЛОМИ, 22, 1971, 202—205.
9. Ф. А. Шамоян. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Зап. научн. семинаров, ЛОМИ, 22, 1972, 206—208.
10. Н. А. Широков. Обобщение теоремы Литтльвуда-Пэли, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 30, 1972, 179—180.
11. В. П. Захарюта и В. И. Юдович. Общий вид линейного функционала в H_1^1 , УМН, 19, вып. 2 (16), 1964.

12. *P. L. Duren*. Theory of H^p spaces, Acad. Press, New York, 1970.
13. *P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields*. Linear functionals on H^p space with $0 < p < 1$, Journ. reine und angew. Math. Bd. 238, 1969, 32—60.
14. *L. Carleson*. A representation formula the Dirichlet integral, Math. Z., 73, 1960.
15. *A. Zygmund*. On certain integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 55, 1944, 170—204.
16. *T. M. Flett*. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, Proc. London Math. Soc., 7, № 25, 1957, 113—149.