ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 6, 1973 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КЛАССОВ ХАРДИ H_p $(1<p<\infty)$

Если $\{a_k\}_1^\infty$ $(0<|a_k|<1)$ — произвольная последовательность отличных друг от друга точек единичного круга, то, как хорошо известно, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<+\infty \tag{1}$$

система рациональных функций

$$r_k(z)=\frac{1}{1-\bar{a}_k z}\quad (k=1,2,\cdots) \tag{2}$$

не замкнута в классах H_p $(1\leqslant p<\infty)$ Харди.

В ряде работ (см. [1] и [2]) была дана полная внутренняя характеристика линейной оболочки $\lambda_p\{a_k\}\subset H_p$ незамкнутой системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$.

В работах [3] и [4] существенно пользуясь тем, что H_2 — гильбертово пространство, было установлено, что условие

$$\inf_{k>1}\prod_{l\neq k}\left|\frac{a_l-a_k}{1-\bar{a}_l a_k}\right|\geqslant\delta>0 \tag{3}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ была базисом в своей линейной оболочке $\lambda_p\{a_k\}$ в метрике L_2 на окружности $|z|=1$.

В настоящей статье исследуется вопрос о базисности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в подпространствах $\lambda_p\{a_k\}$ негильбертовых классов Харди H_p $(1<p<\infty)$, когда методы, развитые в случае гильбертового пространства H_2 непосредственно не применимы.

В основе метода решения нашей задачи лежит тождество

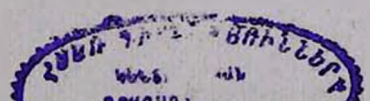
$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=\sum_{k=1}^{m}r_k(z)\overline{\Omega_{m,k}(\zeta)}+\frac{B_m(z)\overline{B_m(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}, \tag{4}$$

где

$$\Omega_{m,k}(\zeta)=\frac{B_m(\zeta)}{(\zeta-a_k)B_m'(a_k)},\quad B_m(\zeta)=\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k-\zeta}{1-\bar{a}_k\zeta}\frac{|a_k|}{a_k}\quad (m=1,2,\cdots), \tag{5}$$

а также простой факт биортогональности систем $\{r_k(z),\ \Omega_{m,k}(z)\}_1^m$ $(1\leqslant m\leqslant\infty)$ на окружности $|z|=1$.

Отметим, что как это тождество, так и свойство биортогональности указанных систем являются лишь специальными случаями более



общих результатов такого же рода, установленных в недавней работе М. М. Джрбашяна [5].

В § 1 статьи приводится ряд предварительных сведений и лемм. Здесь, в частности, при условии (1) определяется система функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, которая наряду с системой $\{\Omega_{m,k}\}_1^m$ биортогональна с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

В § 2 в предположении, что последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3), доказываются следующие два основных утверждения.

I. *Для любой функции $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$ $(1<p<\infty)$ имеет место представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z),\ z\in CK, \tag{6}$$

где K есть замыкание множества точек $\{1/\bar{a}_k\}_1^\infty$

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt| \quad (k=1,\ 2,\cdots), \tag{7}$$

и ряд сходится по метрике L_p на окружности $|z|=1$.

II. *Для любой функции $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$ $(1<p<\infty)$ имеет место разложение*

$$f(z)=B(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(a_k)}{(z-a_k)\,B'(a_k)},\ z\in CK, \tag{8}$$

причем ряд сходится по метрике L_p на окружности.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1 (а). Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ $(0<|a_k|<1)$ — произвольная последовательность отличных друг от друга комплексных чисел. Всюду дальше будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|^2)<+\infty \tag{1.1}$$

и писать $\{a_k\}_1^\infty\in B$.

В этом предположении нашу последовательность отнесем к классу BC и будем писать $\{a_k\}_1^\infty\in BC$, если при некотором δ $(0<\delta<1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\left|\frac{a_l-a_k}{1-\bar{a}_l\,a_k}\right|\geqslant\delta>0. \tag{1.2}$$

(б). С последовательностью $\{a_k\}_1^\infty$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\frac{|a_k|}{a_k}, \tag{1.3}$$

а также функции

$$B_m(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\frac{|a_k|}{a_k}\ (m=1, 2,\cdots). \tag{1.4}$$

Далее введем в рассмотрение следующие системы функций

$$r_k(z)=\frac{1}{1-\bar{a}_k z}, \tag{1.5}$$

$$(k=1, 2,\cdots)$$

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(z-a_k)B'(a_k)}, \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{k,m}(z)=\frac{B_m(z)}{(z-a_k)\,\overline{B_m(a_k)}}\quad (m=1, 2,\cdots)\ (k=1, 2,\cdots, m). \tag{1.7}$$

Заметим, что системы функций $\{r_k(t), \Omega_k(t)\}_1^{\infty}$, а также $\{r_k(t), \Omega_{k,m}(t)\}_1^{m}$ биортогональны на окружности $|t|=1$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\overline{r_p(t)}\,\Omega_k(t)\,|dt|=\delta_{k,p}=\begin{cases}1, & k=p\\ 0, & k\neq p,\end{cases} \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\overline{r_p(t)}\,\Omega_{k,m}(t)\,|dt|=\delta_{k,p}=\begin{cases}1, & k=p\\ 0, & k\neq p.\end{cases} \tag{1.9}$$

В самом деле, поскольку функции $\{b_k(z)\}_1^{\infty}$ голоморфны и ограничены в круге $|z|<1$, то по формуле Коши имеем

$$\Omega_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\Omega_k(t)\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\Omega_k(t)\frac{|dt|}{1-\bar{t}z},$$

откуда и непосредственно следует наше утверждение (1.8). Аналогично убеждаемся в справедливости утверждения (1.9).

Лемма 1.1. *Для произвольных значений переменных z и ζ имеет место тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=\sum_{k=1}^{m}r_k(z)\,\overline{\Omega_{k,m}(\zeta)}+\frac{B_m(z)\,\overline{B_m(\zeta)}^{*}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, достаточно установить справедливость (1.10), предполагая дальше, что $|z|<1$, $|\zeta|<1$.

---

* Специальный случай теоремы из [5] при условии, что все числа последовательности $\{a_k\}_1^{\infty}$ отличны друг от друга.

Рассмотрим теперь рациональную функцию от ζ

$$R_m(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta\bar{z}} - \sum_{k=1}^{m} \overline{r_k(z)}\, \omega_{k,m}(\zeta),$$

очевидно удовлетворяющую интерполяционным данным

$$R_m(\alpha_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, m).$$

Следовательно функция $R_m(\zeta)/B_m(\zeta)$ голоморфна в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$, и по формуле Коши будем иметь

$$\frac{R_m(\zeta)}{B_m(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{R_m(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{1}{B_m(t)(1-t\bar{z})}\,\frac{dt}{t-\zeta} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_k z)(t-\alpha_k)(t-\zeta)}\,dt = \frac{\overline{B_m(z)}}{1-\zeta\bar{z}}.$$

Переходя здесь к сопряженным величинам, получаем (1.10).

1.2. (а). Следуя М. М. Джрбашяну [3], введем следующие классы функций. Пусть

$$D^{(+)} = \{z;\ |z|<1\},\ D^{(-)} = \{z;\ |z|>1\}.$$

Обозначим через $H_p\{\alpha_k\}$ $(1\leqslant p<\infty)$ класс мероморфных в $D^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$f(z) = \frac{B(z)}{z}\,\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)}, \tag{1.11}$$

где $\tilde{f}(z)\in H_p$ произвольно.

Очевидно, что если $f(z)\in H_p\{\alpha_k\}$, то почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$ существует предел

$$\lim_{r\to 1+0} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi).$$

Далее обозначим через $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1\leqslant p<\infty)$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям:

1) $f(z)\in H_p,\ z\in D^{(+)}$,

2) $f(z)\in H_p\{\alpha_k\},\ z\in D^{(-)}$,

3) почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1+0} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta}).$$

Что класс $\lambda_p\{\alpha_k\}$ не пуст показывает простой пример функций $B(z)/(z-\alpha_k)$.

(б). Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ $(0<p<\infty)$ множество голоморфных в $D^{(+)}$ функций $F(z)$, принадлежащих известному классу H_p Харди с нормой

$$\|F\|_p = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \right\}^{1/p}.$$

Аналогично, через $H_p(D^{(-)})$ будем обозначать множество голоморфных в $D^{(-)}$ функций $\Phi(z)$ с нормой

$$\|\Phi\|_p = \sup_{1<r<\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \right\}^{1/p},$$

представимых в виде

$$\Phi(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)}, \tag{1.12}$$

где $F(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Отметим, что из представления (1.10) следует, что

$$\|\Phi\|_p = \|F\|_p.$$

Докажем лемму.

Лемма А. 1°. *Для любого p $(0 < p < \infty)$ последовательность функций*

$$\overline{B}_m(z) = B(z) / B_m(z)$$

сходится к единице на окружности $t = e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$ по норме $L_p(0,2\pi)$, то есть

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |1 - \overline{B}_m(t)|^p \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) \right|^p |dt| = 0. \tag{1.13}$$

2°. *Если последовательность функций*

$$\{f_m(t)\}_1^\infty, \; f_m(e^{i\vartheta}) \in L_p(0,2\pi) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

сходится к функции $f(e^{i\vartheta}) \in L_p(0,2\pi)$ в метрике $L_p(0,2\pi)$, то имеем также

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} |f(t) - \widetilde{B}_m(t) f_m(t)|^p \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} \left| f(t) - \right.$$

$$\left. - \overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) f_m(t) \right|^p |dt| = 0. \tag{1.14}$$

Доказательство. Как хорошо известно

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} |B_m(t) - B(t)|^2 \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} \left| B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right) \right|^2 |dt| = 0. \tag{1.15}$$

Для любого $\sigma > 0$ на окружности $|t|=1$ рассмотрим дополняющие друг друга множества

$E_m(\sigma) = E\{t;\ |B_m(t) - B(t)| < \sigma\}$, $E_m^*(\sigma) = E\{t;\ |B_m(t) - B(t)| > \sigma\}$

и

$$F_m(\sigma) = E\left\{t; \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right)\right| < \sigma\right\},\quad F_m^*(\sigma) = E\left\{t; \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right)\right| > \sigma\right\}.$$

Из (1.15) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} E_m^*(\sigma) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} F_m(\sigma). \tag{1.16}$$

Тогда поскольку $|B_m(t)| = \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|$, то следующие оценки очевидны:

$$\int_{|t|=1} |1 - B_m(t)|^p\,|dt| = \int_{|t|=1} \left|1 - \bar{B}_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|^p |dt| = \int_{|t|=1} |B(t) - B_m(t)|^p\,|dt| +$$

$$+ \int_{|t|=1} \left|B\left(\frac{1}{t}\right) - B_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|^p |dt| \leqslant 2\pi\sigma^p + 2^p \operatorname{mes} E_m^*(\sigma).$$

Отсюда, ввиду произвольности $\sigma > 0$ приходим к соотношениям (1.13).

2°. Заметим, что для любого $p \geqslant 1$

$$2^{-p} \int_{|t|=1} |f(t) - f_m(t)\,\bar{B}_m(t)|^p\,|dt| \leqslant \int_{|t|=1} |f_m(t) - f(t)|^p\,|dt| +$$

$$+ \int_{|t|=1} |f(t)|^p\,|\bar{B}_m(t) - 1|^p\,|dt| = J_m^{(1)} + J_m^{(2)},$$

причем мы полагаем, что $\lim\limits_{m\to\infty} J_m^{(1)} = 0$.

Далее, очевидно, что

$$J_m^{(2)} = \int_{|t|=1} |f|^p\,|B_m(t) - B(t)|^p\,|dt| \leqslant \sigma^p \int_{|t|=1} |f|^p\,|dt| + 2^p \int_{E_m^*(\sigma)} |f|^p\,|dt|,$$

откуда ввиду произвольности $\sigma > 0$ и (1.16) следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} J_m^{(2)} = 0$.

Таким образом, мы доказали первое соотношение (1.14). Второе соотношение (1.14) доказывается аналогично.

(в). Нам в дальнейшем понадобятся следующие теоремы М. Рисса и Шапиро-Шилдса.

Теорема А [5]. *Для любой функции* $f(e^{i\theta}) \in L_p(0, 2\pi)\ (1 < p < \infty)$ *интегралы типа Коши*

$$F^{(+)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,\quad z \in D^{(+)}$$

и

$$F^{(-)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,\quad z \in D^{(-)}$$

обладают следующими свойствами

1) $F^{(+)}(z) \in H_p(D^{(+)}),\ z \in D^{(+)};$

2) $F^{(-)}(z) = \frac{1}{z}\,\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) \in H_p(D^{(-)}),\ z \in D^{(-)},$

где $\overline{\Phi}(z) \in H_p(D^{(+)}),\ z \in D^{(+)};$

3) $\|F^{(+)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,\ \|F^{(-)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$

где $A_p > 0$ *— постоянная, не зависящая от* f *и*

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} |f(e^{i\vartheta})|^p\, d\vartheta\right\}^{1/p}.$$

Теорема B [6]. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in BC$, *то для любой функции* $g(z)$ *из* H_p $(1 \leqslant p < \infty)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2) \leqslant K_p \|g\|_p^p,$$

где K_p *— постоянная, не зависящая от* g.

Наконец, отметим, что из известной теоремы о сильной сходимости биортогональных разложений в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ в случае ограниченных биортогональных систем, непосредственно следует

Теорема C [9]. *Пусть системы ограниченных функций* $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$ *и* $\{\Psi_n(t)\}_1^\infty$ *составляют биортогональную систему на окружности* $|t|=1$. *Тогда, если разложение каждой функции* $f(t) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ *типа*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(t),\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \overline{\Psi_k(t)}\, f(t)\,|dt| \tag{1.17}$$

слабо сходится, то для каждой функции $f(t) \in L_p$ *разложение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(f)\,\Psi_k(t),\quad d_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \overline{\varphi_k(t)}\, f(t)\,|dt| \tag{1.18}$$

будет сильно сходящимся, более того, разложение (1.17) *также будет сходиться сильно.*

(г) Лемма B. *Пусть функция* $f(z) \in H_p(D^{(+)})$. *Для того чтобы* $f(z)$ *принадлежала классу* $i_p\{\alpha_k\}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z} \equiv 0,\ z \in D^{(+)}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Если $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$, то из определения класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ следует, что существует функция $\tilde f(z)\in H_p$ такая, что

$$f(t)=\frac{B(t)}{t}\,\tilde f\left(\frac{1}{t}\right)\ (|t|=1).$$

Теперь непосредственной проверкой получаем

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}=\int\limits_{|t|=1}\frac{\tilde f\left(\frac{1}{t}\right)}{t(t-z)}\,dt\equiv 0,\quad z\in D^{(+)},$$

так что необходимость условия леммы доказана. С другой стороны, пусть выполняется условие (1.19). Тогда по теореме И. И. Привалова следует, что функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},$$

которая согласно теореме A допускает представление вида

$$F(z)=\frac{1}{z}\,\tilde F\left(\frac{1}{z}\right)\in H_p(D^{(-)}),\ \text{где}\ \tilde F(z)\in H_p(D^{(+)}),$$

обладает граничными значениями $F(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi)$, совпадающими со значениями $f(e^{i\vartheta})/B(e^{i\vartheta})$ почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$. Следовательно, согласно определению (1.12)

$$\Phi(z)\equiv B(z)\,F(z)=\frac{B(z)}{z}\,\tilde f\left(\frac{1}{z}\right)\in H_p\{\alpha_k\}.$$

Таким образом, граничные значения функции $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ почти всюду на $|t|=1$ совпадают с граничными значениями функции $\Phi(z)\in H_p\{\alpha_k\}$. Это и значит, что $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и лемма полностью доказана.

Лемма 1.2. *Любая функция* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *допускает представление вида*

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\ z\in D^{(+)},$$

где

$$\begin{gathered}f_1(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\},\\ f_2(z)=B(z)\,f_2^*(z)\in H_p(D^{(+)})\end{gathered}\tag{1.20}$$

$$f_2^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}\in H_p(D^{(+)}).\tag{1.21}$$

Доказательство. Поскольку $f(e^{i\vartheta})/B(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi)$, то по теореме А утверждение (1.21) справедливо.

Положив далее

$$f_1(z)=f(z)-f_2(z)$$

и применяя лемму B, достаточно установить справедливость условия (1.19) для функции $f_1(z)$. Действительно, при $z \in D^{(+)}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=f_2(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt\equiv 0.$$

§ 2. Разложения по биортогональным системам $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$

2.1. (а). Лемма 2.1. *Для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1\leqslant p<\infty)$ *имеет место тождество*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}c_k^{(m)}(f)\,r_k(z)+\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}, \tag{2.1}$$

где

$$c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{k,\,m}(t)}\,f(t)\,|dt|\ (k=1,\,2,\cdots,\,m), \tag{2.2}$$

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}f(a_k)\,\Omega_{k,\,m}(z)+\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}. \tag{2.3}$$

В самом деле, поскольку

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|,$$

то достаточно воспользоваться основным тождеством (1.10) леммы 1.1, чтобы получить (2.1). В этом же тождестве, поменяв местами z и ζ, приходим к (2.3).

(б) Лемма 2.2. *Если* $\{a_k\}_1^\infty\in BC$, *то для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|, \tag{2.4}$$

равномерно и абсолютно сходится вне замыкания $\overline{E}$ *точек множества* $E=\{1/\bar{a}_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Заметим сначала, что по (1.6)

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|=\frac{1}{2\pi B'(\alpha_k)}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{|dt|}{t-\alpha_k}=$$

$$=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\pi_k}\cdot\frac{1}{\alpha_k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-\frac{1}{\alpha_k}}\,, \tag{2.5}$$

где

$$\pi_k=-\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\frac{\alpha_l-\alpha_k}{1-\alpha_l}\,\frac{|\alpha_l|}{\alpha_k\alpha_l}\,, \tag{2.6}$$

причем согласно условию (1.2) $|\pi_k|\geqslant\delta>0$. Но поскольку при $|t|=1$ $f(t)/B(t)\in L_p$, то согласно теореме А функция

$$F(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(-)}$$

принадлежит классу $H_p(D^{(-)})$. Отсюда следует, что $\Phi(z)\equiv F\left(\frac{1}{z}\right)\in$ $\in H_p(D^{(+)})$ и, тем самым, по (2.5)

$$c_k(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\pi_k}\,\Phi(\alpha_k)\quad(k=1,\,2,\cdots). \tag{2.7}$$

Ввиду условия (1.2) и из (2.7) приходим к неравенствам

$$|c_k(f)|\leqslant\delta^{-1}\,(1-|\alpha_k|^2)\,|\Phi(\alpha_k)|\quad(k=1,\,2,\cdots),$$

где $\delta>0$ не зависит от k. Положив $q=p/p-1$, по неравенству Гельдера будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)|\leqslant\delta^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/q}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\,|\Phi(\alpha_k)|^p\right\}^{1/p}<\infty. \tag{2.8}$$

Поскольку для любого компакта $K\subset\overline{CE}$

$$\sup_{\substack{z\in K\\ k\geqslant 1}}|r_k(z)|<+\infty,$$

то из (2.8) следует утверждение леммы.

(в). Пусть теперь $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$, тогда по лемме 1.2 имеем

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=f_1(z)+B(z)\,f_2^{*}(z),$$

где $f_1(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и, следовательно, на окружности $|t|=1$

$$f_1(t)=\frac{B(t)}{t}\,\tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right),\ \tilde{f}(z)\in H_p(D^{(+)}), \tag{2.9}$$

а функция $f_2^{*}(z)$ определяется формулой (1.20).

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)\,\overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right)}{t-z}\,dt\quad(m=1,\,2,\cdots)\tag{2.10}$$

и

$$\rho_m(z)=\prod_{l=m+1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}_l-z}{1-\alpha_l\,z}\,\frac{|\alpha_l|}{\alpha_l}=\frac{\overline{B}(z)}{\overline{B}_m(z)}\quad(m=1,\,2,\cdots).\tag{2.11}$$

Ясно, что по теореме А $\varphi_m(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(m=1,\,2,\cdots)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $f(z)\in H_p(D^{(+)})(1<p<\infty)$, *тогда*

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\overline{\pi}_k}\,\left|\overline{f}(\overline{\alpha}_k)-\rho_m(\overline{\alpha}_k)\,\varphi_m(\overline{\alpha}_k)\right|\quad(k=1,\,2,\cdots,\,m),\tag{2.12}$$

где π_k *определяется по формуле* (2.6).

Доказательство. Пользуясь леммой 1.2, можно утверждать, что

$$\frac{f_2(z)}{B(z)}\in H_p(D^{(+)})\text{ и }\frac{f_2(z)}{B_m(z)}\in H_p(D^{(+)})\quad(m=1,\,2,\cdots)$$

и поэтому

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{B(t)}\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}=\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{B_m(t)}\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}=0\quad(m=1,\,2,\cdots)\ (k=1,\,2,\cdots).\tag{2.13}$$

Так как по (2.2) и (2.4)

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{B(t)}\,\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{B_m(t)}\,\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k},$$

то в силу равенств (2.13) и (2.9) имеем

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)}{(t-\overline{\alpha}_k)\,\overline{B'(\alpha_k)}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)\,\overline{\widetilde{B}}_m\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-\overline{\alpha}_k)\,\overline{B'_m(\alpha_k)}}\,dt\equiv$$

$$\equiv U_k(f)-U_k^{(m)}(f).$$

Заметим, что ввиду принятого нами обозначения (2.9) и обозначений (2.10), (2.11) имеем, соответственно

$$U_k(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\overline{\pi}_k}\,\overline{f}(\alpha_k)=c_k(f)\quad(k=1,\,2,\cdots)\tag{2.14}$$

и

$$U_k^{(m)}(f) = \frac{1-|a_k|^2}{\bar{\pi}_k}\, p_m(\bar{a}_k)\, \varphi_m(\bar{a}_k) \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ m). \qquad (2.15)$$

Теперь из (2.14) и (2.15) получаем утверждение леммы.

Лемма 2.4. *Если* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *и* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, *то последовательность функций*

$$T_m(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)}(f)\, r_k(z) \quad (m=1,\ 2,\cdots)$$

равномерно сходится к функции леммы 2.2

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) \qquad (2.16)$$

на любом компакте $K\subset CE$.

Доказательство. Заметим сначала, что для определенных нами выше функций $\tilde{f}(z)$ и $\{p_m(z)\}_1^\infty$ из класса $H_p(D^{(+)})$ будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} \|\tilde{f}(t) - p_m(t)\|_p = 0. \qquad (2.17)$$

Действительно, поскольку $\tilde{f}(z)\in H_p(D^{(+)})$, то из (2.10) имеем

$$p_m(z) - \tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\tilde{f}(t)\,\tilde{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) - \tilde{f}(t)}{t-z}, \quad z\in D^{(+)}.$$

Но, согласно теореме А

$$\|\tilde{f} - p_m\|_p \leqslant A_p \left\|\tilde{f}(t)\,\tilde{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) - \tilde{f}(t)\right\|_p,$$

откуда по лемме А следует (2.17).

Пусть теперь $K\subset \overline{CE}$, тогда

$$\rho = \inf_{\substack{z\in K\\ \zeta\in E}} |z-\zeta| > 0$$

и легко видеть, что

$$\sup_{z\in K} |r_k(z)| = \sup_{z\in K} \left|\frac{1}{1-\bar{a}_k z}\right| \leqslant C_0\,\rho^{-1} \quad (k=1,\ 2,\cdots), \qquad (2.18)$$

где, очевидно

$$C_0 = \inf_{k\geqslant 1} \{|a_k|^{-1}\} < \infty.$$

Из леммы 1.4 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $N\geqslant 1$ такое, что

$$\sup_{z\in K}\left|\sum_{k=m}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad m>N.$$

Отсюда ввиду (2.16) и (2.18) вытекает, что при $m\geqslant N$

$$|\varphi(z)-\tau_m(z)|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,r_k(z)-c_k^{(m)}(f)\,r_k(z)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\,\rho^{-1}\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|+\frac{\varepsilon}{2},\ z\in K. \tag{2.19}$$

Теперь по лемме 2.3 имеем

$$\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|\leqslant\delta^{-1}\sum_{k=1}^{m}(1-|\alpha_k|^2)\,|\widetilde{f}(\overline{\alpha}_k)-\rho_m(\overline{\alpha}_k)\,\varphi_m(\overline{\alpha}_k)|.$$

Применяя неравенство Гельдера и теорему B, получаем

$$\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|\leqslant M\cdot K_p\,\delta^{-1}\,\|\widetilde{f}-\rho_m\,\varphi_m\|, \tag{2.20}$$

где

$$M=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2\right\}^{1/q}.$$

Поскольку $\rho_m(z)$ есть функция типа $\widetilde{B}(z)$, ассоциированная с последовательностью $\{\overline{\alpha}_k\}_1^m$, то из (2.18) согласно соотношению (1.14) леммы A непосредственно следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\|\widetilde{f}(t)-\rho_m(t)\,\varphi_m(t)\|_p=0.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ достаточно перейти к пределу в неравенстве (2.19), чтобы завершить доказательство леммы.

2.2 (a). Теорема 1. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in B\mathrm{C}$, *то*

1°. *Для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z},\ z\in D^{(+)}, \tag{2.21}$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно на любом компакте $K\subset C\overline{E}$, *где* $E=\{1/\overline{\alpha}_k\}$.

2°. *Для любой функции* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),\ z\in D^{(+)} \tag{2.22}$$

с тем же характером сходимости ряда.

Доказательство. 1°. Заметим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\int\limits_{|t|=1}|f(t)\,\overline{B}_m(t)-$$

$$-f(t)|\,|dt|. \tag{2.23}$$

Тогда, пользуясь соотношением (1.14) леммы А в специальном случае, когда $f_m(z)=f(z)$ $(m=1, 2,\cdots)$, можем утверждать, что при $m\to\infty$ интегралы (2.23) стремятся к нулю.

Переходя к пределу в тождестве (2.1) леммы 2.1 при $m\to\infty$ и пользуясь леммой 2.4, получим разложение (2.21).

2°. Отметим, что в ходе доказательства леммы 1.2 было установлено, что если $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$, то интегральный член в разложении (2.21) в области $D^{(+)}$ тождественно равен нулю. Отсюда и приходим к разложению (2.22). Позднее мы установим гораздо более сильное утверждение, что разложение (2.22) остается справедливым на всем множестве $C\overline{E}$, а сейчас докажем следующую лемму.

(б). Лемма 2.5. *Биортогональное разложение функции* $f(e^{i\theta})\in L_p(0,2\pi)$ $(1<p<\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|, \tag{2.24}$$

совпадает с биортогональным разложением некоторой функции $\varphi(z)\in\lambda_p\{a_k\}$.

Доказательство. Пользуясь теоремой А и известными свойствами интегралов типа Коши, легко убедиться, что любая функция $f(e^{i\theta})\in L_p(0,2\pi)$ $(1<p<\infty)$ допускает представление вида

$$f(t)=F^{(+)}(t)-F^{(-)}(t),\ |t|=1,$$

где $F^{(+)}(z)\in H_p(D^{(+)})$ и $F^{(-)}(z)\in H_p(D^{(-)})$, причем существует функция $\Phi(z)\in H_p(D^{(+)})$ такая, что

$$F^{(-)}(z)=\frac{1}{z}\,\Phi\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)}.$$

Из этого представления функции $f(t)$ следует, что

$$c_k(f)=c_k(F^{(+)})-c_k(F^{(-)})\quad(k=1, 2,\cdots).$$

Но из (2.24), принимая во внимание определение (1.4) функции $b_k(z)$, получаем

$$\overline{B'(a_k)}\,c_k(F^{(-)})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{F^{(-)}(t)}{t-\overline{a}_k}|dt|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi\left(\frac{1}{t}\right)}{B(t)(1-t\overline{a}_k)\,t}\,dt=0\quad(k=1, 2,\cdots),$$

поскольку подынтегральная функция аналитична в $D^{(-)}$ и при $|t| \to \infty$ имеет порядок $O(1/|t|^2)$, то

$$c_k(f) = c_k(F^{(+)}) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Но так как по лемме 1.2 $F^{(+)}(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z)$, где

$$\varphi(z) \in \lambda_p\{a_k\} \text{ и } \varphi_1(z) = B(z)\,\varphi_1^*(z), \quad \varphi_1^*(z) \in H_p(D^{(+)}),$$

то легко видеть, что

$$c_k(f) = c_k(F^{(+)}) = c_k(\varphi).$$

Теорема 2. *Если* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, *то для произвольной функции* $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ $(1 < p < \infty)$

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, r_k(t) \right\|_p = 0 \quad (|t| = 1). \tag{2.25}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, r_k(t) \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{2.26}$$

Согласно теореме С и лемме 2.5, для доказательства теоремы достаточно установить слабую сходимость последовательности $S_m(t)$ на окружности $|t|=1$. Но по теореме 1 и ввиду слабой компактности пространств L_p $(1 < p < \infty)$ заключаем, что достаточно установить равномерную ограниченность норм в L_p последовательности $\{S_m(t)\}_1^\infty$.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(t)\|_p = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\|_q \le 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{S_m(t)}\, g(t)\, |dt| \right|, \tag{2.27}$$

где $q = p/(p-1) > 1$. Но по (2.26) и (2.24) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{S_m(t)}\, g(t)\, |dt| = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{m} \overline{c_k(f)}\, \frac{g(t)}{1 - \bar{t}\,\bar{a}_k} |dt| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{c_k(f)}}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t - a_k}\, dt = \sum_{k=1}^{m} \frac{1 - |a_k|^2}{\pi_k}\, \bar{f}(a_k)\, g^*(a_k), \tag{2.28}$$

где

$$g^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t - z}\, dt \in H_p(D^{(\pm)}).$$

Заметим теперь, что ввиду условия $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ $|\pi_k| \ge \delta > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Поэтому, применяя неравенство Гельдера, в силу теорем A и B, из (2.28) будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{S_m(t)}\,g(t)\,|dt|\right| \leqslant \delta^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}|\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)|^p\,(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{m}|g^*(\alpha_k)|^q\,(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-1}\,K_q^{1/q}\,K_p^{1/p}\,\|\tilde{f}\|_p\,\|g^*\|_q \leqslant \delta^{-1}\,K_p^{1/p}\,K_q^{1/q}\,A_q\,\|g\|_q\,\|\tilde{f}\|_p.$$

Отсюда и из (2.27) следует неравенство

$$\|S_m(t)\|_p \leqslant \delta^{-1}\,M_{p,q}\,\|\tilde{f}\|_p \quad (m=1,\,2,\cdots),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

2.3 (а). Утверждение, аналогичное теоремам 1 и 2, справедливо и для системы $\{b_k(z)\}_1^\infty$.

Отметим сначала следующее свойство единственности для функций из класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Лемма 2.6. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in BC$ *и* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$. *Если* $f(\alpha_k)=0$ $(k=1,\,2,\cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Действительно, по формуле (2.3) леммы 2.1 имеем

$$f(z)=\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(+)}\ (m=1,\,2,\cdots). \tag{1.29}$$

Но заметим, что при $z\in D^{(+)}$

$$\left|\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-z}-\int\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\int\limits_{|t|=1}|f(t)\,\tilde{B}_m(t)-f(t)|\,|dt|,$$

так что, переходя к пределу в (2.29), при $m\to\infty$, учитывая соотношение (1.14) леммы А, получим

$$f(z)=\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(+)}.$$

Но поскольку $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$, то по лемме В утверждаем, что $f(z)\equiv 0$.

Теорема 3. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in BC$, *то для произвольной функции* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f(\alpha_k)\,\Omega_k(z)=B(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)\,\overline{B}'(\alpha_k)},\quad z\in D^{(+)}, \tag{2.30}$$

а также

$$\lim_{m\to\infty}\left\|f(t)-\sum_{k=1}^{m}f(\alpha_k)\Omega_k(t)\right\|_p=0, \tag{2.31}$$

причем ряд (2.30) *сходится равномерно на любом компакте* $K\subset C\overline{E}$.

Доказательство. Пользуясь обозначением (2.6), имеем $B'(a_k)=\pi_k/(1-|a_k|^2)$ и так как $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, то

$$|B'(a_k)|^{-1} \leqslant \delta^{-1}(1-|a_k|^2). \qquad (2.32)$$

Пусть $K \subset C\overline{E}$ — произвольный компакт. Очевидно, что

$$\max_{a_k \in K} |k| = p < \infty,$$

и поэтому

$$\inf_{\substack{k \geqslant p+1 \\ z \in K}} |z-a_k| = \rho_p > 0.$$

Но тогда из (2.32) следует, что

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{f(a_k)}{(z-a_k)B'(a_k)} \right| \leqslant (\delta\rho_p)^{-1}(1-|a_k|^2)|f(a_k)| \quad (k \geqslant p+1). \qquad (2.33)$$

С другой стороны, пользуясь неравенством Гельдера и теоремой B, легко выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|^2)|f(a_k)| < +\infty.$$

Отсюда в силу (2.33) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z-a_k)B'(a_k)}$$

на K и, следовательно, утверждение теоремы о характере сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\, b_k(z).$$

Согласно лемме 2.5 и теореме 2 для любой функции $\varphi(t) \in L_p$ на окружности $|t|=1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi)\, r_k(t), \quad c_k(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \varphi(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|$$

сильно сходится в L_p, определяя некоторую функцию из класса $\lambda_p\{a_k\}$.

Заметим теперь, что для любой функции $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$

$$d_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{r_k(t)}\,|dt| = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t-a_k}\,dt = f(a_k) \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Поэтому, согласно теореме C можем утверждать, что ряд

$$f^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\,\Omega_k(z)$$

также сильно сходится в L_p, определяя некоторую функцию $f^*(z) \in H_p(D^{(+)})$. Легко видеть, что это же утверждение справедливо и для любой функции класса $H_p(D^{(+)})$. Покажем, что более того $f^*(z) \in \lambda_p\{a_k\}$. В самом деле, легко видеть, что для всех $(k=1, 2, \cdots)$

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z-a_k)B'(a_k)} \in \lambda_p\{a_k\},$$

и поэтому имеем также

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^{m} f(a_k)\,\Omega_k(z) \in \lambda_p\{a_k\} \quad (m=1, 2, \cdots).$$

Тогда согласно лемме B имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{S_m(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)} \quad (m=1, 2, \cdots). \tag{2.32}$$

Но поскольку сумма $S_m(t)$ сильно сходится к $f^*(t)$ в L_p, то переходя к пределу при $m \to \infty$ из (2.32) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f^*(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}.$$

Вновь пользуясь леммой B, отсюда заключаем, что $f^*(z) \in \lambda_p\{a_k\}$.

Так как функция $f^*(z)$ очевидно удовлетворяет интерполяционным данным $f^*(a_k) = f(a_k)$ $(k=1, 2, \cdots)$, то по лемме 2.6 можем утверждать, что $f^*(z) \equiv f(z)$. Итак, теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть* $f(e^{i\theta}) \in L_p(0, 2\pi)(1<p<\infty)$, *тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z), \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|, \tag{2.33}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(f)\,\Omega_k(z), \quad d_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{r_k(t)}\,|dt| \tag{2.34}$$

абсолютно и равномерно сходятся на любом компакте $K \subset CE$, ***определяя функции из класса*** $\lambda_p\{a_k\}$.

Доказательство. Утверждение о природе сходимости для ряда (2.33) было установлено нами в лемме 2.2, а для ряда (2.34)—в теореме 3.

Далее согласно лемме 2.5 существует функция $F_+(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ такая, что $c_k(f) = c_k(F_+)(k=1, 2, \cdots)$,

$$F_+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z), \quad z \in D^{(+)}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \left\| F_+(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,r_k(e^{i\theta}) \right\|_p = 0. \tag{2.35}$$

При этом функция $F_+(z)$ допускает представление

$$F_+(z) = \frac{B(z)}{z}\widetilde{F}_+\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)}, \tag{2.36}$$

где $\widetilde{F}_+(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Введем в рассмотрение системы функций

$$\overline{r_k}(z) = \frac{1}{1-\bar{a}_k z} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

$$\overline{\Omega}_k(z) = \frac{\overline{B}(z)}{(z-\bar{a}_k)\overline{B}'(a_k)} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

которые, очевидно, также биортогональны на окружности $|t|=1$. Как было отмечено в ходе доказательства теоремы 3 ряд

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{F}_+(a_k)}\,\overline{\Omega}_k(z), \quad z \in D^+$$

определяет функцию $\Phi(z) \in H_p(D^{(+)})$, причем

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \Phi(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}\,\Omega_k(e^{i\theta}) \right\|_p = 0. \tag{2.37}$$

Далее, из представления (2.35) легко следует

$$c_k(F_+) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} F_+(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt| = \frac{1}{B'(a_k)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{F_+(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-\bar{a}_k} = \frac{\overline{\widetilde{F}_+(a_k)}}{\overline{B'(a_k)}},$$

так что

$$c_k(f) = c_k(F_+) = \frac{\overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}}{\overline{B'(a_k)}} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.38}$$

Поэтому ряд (2.33) можно записать также в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}}{\overline{B'(a_k)}}\, r_k(z). \tag{2.33'}$$

Сумму ряда (2.33) в области $D^{(-)}$ обозначим через $F_-(z)$ и заметим, что

$$r_k(z) = \overline{B'(a_k)}\,\frac{B(z)}{z}\,\overline{\Omega}_k\left(\frac{1}{z}\right) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.39}$$

Тогда будем иметь

$$F_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) = \frac{B(z)}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{F}(a_k)}\,\overline{\Omega}_k\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{B(z)}{z}\,\Phi\left(\frac{1}{z}\right),\quad z \in D^{(-)}.$$

Если мы покажем, что почти для всех $\vartheta \in (0,2\pi)$

$$\lim_{r\to 1-0} F_+(re^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1+0} F_-(re^{i\vartheta}), \tag{2.40}$$

то тем самым будет установлено утверждение теоремы относительно ряда (2.33).

С этой целью заметим, что почти для всех $\vartheta \in [0,2\pi]$ существует предел

$$F_-(e^{i\vartheta}) = \frac{B(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta}}\,\Phi(e^{-i\vartheta}). \tag{2.41}$$

С другой стороны, в силу (2.39) и (2.38) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{F(a_k)}\,\overline{\Omega}_k(e^{-i\vartheta}) \equiv \frac{e^{i\vartheta}}{B(e^{i\vartheta})} \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, r_k(e^{i\vartheta}).$$

Из (2.35) и (2.37) следует, что почти для всех $\vartheta \in [0,2\pi]$

$$\Phi(e^{-i\vartheta}) = \frac{e^{i\vartheta}}{B(e^{i\vartheta})}\,F_+(e^{i\vartheta}),$$

откуда и из (2.41) вытекает равенство (2.40). Что касается утверждения теоремы относительно ряда (2.34), то она устанавливается вполне аналогичным образом, на чем мы останавливаться не будем.

Из теорем 2, 3 и 4 получаем следующее

Следствие. Если $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, то для любой функции $\{f(z)\} \in \lambda_p\{a_k\}$ справедливы разложения

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z), \quad z \in C\overline{E}, \tag{2.42}$$

$$f(z) = B(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z-a_k)\,B'(a_k)}, \quad z \in C\overline{E}. \tag{2.43}$$

(б). Известно, что если $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ и $\{w_k\}$ — произвольные последовательности комплексных чисел, подчиненные условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} (w_k)^p\,(1-|a_k|^2) < \infty, \tag{2.44}$$

то существует функция $F(z) \in H_p(D^{(+)})$, удовлетворяющая интерполяционным данным

$$F(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.45}$$

Но результаты настоящей статьи позволяют утверждать несколько большее: а именно, справедлива

Теорема 5. *Пусть* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ *и* $\{w_k\}_1^\infty$ *— произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненных условиям* (2.44). *Тогда существует единственная функция* $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ *такая, что*

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.46}$$

и допускающая разложение

$$f(z) = B(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{(z-a_k) B'(a_k)}, \quad z \in C\overline{E}. \tag{2.47}$$

Доказательство. Как уже было отмечено, в классе $H_p(D^{(+)})$ существует функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям (2.45), но по лемме 1.2 указанная функция допускает представление

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in D^{(+)},$$

где $f_1(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ и $f_2(z) = B(z) f_2^*(z)$, $f_2^*(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Поскольку, таким образом, $f_2(a_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то функция $f(z) \equiv f_1(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ удовлетворяет условию (2.45) и по теореме 3 имеет разложение вида (2.47). Единственность функции $f(z)$ при условии (2.46) была установлена в лемме 2.6.

В заключение, считаю своим приятным долгом выразить признательность моему научному руководителю, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.IX.1973

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. H_p $(1 < p < \infty)$ Հարդիի դասերի ենթատարածություններում ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ապացուցված է, որ $\{a_k\}_1^\infty$ $(0 < |a_k| < 1)$ *հաջորդականության վրա դրված* ֆունկցիաների բազիսի մասին *(ամփոփում)*,

$$\{r_k(z) = 1/(1 - \overline{a_k} z)\}_1^\infty, \quad \{\Omega_k(z) = B(z)/(z - a_k) B'(a_k)\}_1^\infty$$

H_p $(1 < p < \infty)$ *դասերում իրենց գծային թաղանթների մեջ կազմում են բազիս*։

H. M. HAIRAPETIAN. *On the basis of rational functions in subspaces of Hardy's* H_p *classes* $(1 < p < \infty)$ (summary)

The paper proves that under some conditions imposed on the $\{a_k\}_1^\infty (0 < |a_k| < 1)$ sequences the systems of functions

$$\{r_k(z) = 1/(1 - \overline{a_k} z)\}_1^\infty \text{ and } \{\Omega_k(z) = B(z)/(z - a_k) B'(a_k)\}_1^\infty$$

form bases in their linear shell in H_p $(1 < p < \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональны дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., № 1, 1961, 9—31.
2. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксир ванными полюсами, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967.
3. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.* Базисы из собственных векторов вполне н унитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, се матем., 34, № 1, 1970, 90—133.
4. *В. Э. Кацнельсон.* Об условиях базисности системы корневых векторов нек торых классов операторов, „Функциональный анализ и его приложения", вып. 2, 1967, 39—51.
5. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и предста ления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
6. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
7. *P. L. Duren.* Thery of H_p spaces, New York and London, 1970.
8. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On some interpolation problems for analytic fun tions, Amer. J. Math., vol. 83, 1961, 513—532.
9. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
10. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.