ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

ОБ ОЦЕНКЕ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ МЕТРИКИ БЕРГМАНА

В работе [2] Б. А. Фуксом была получена оценка $\rho_D(z, U) < n+1$, где $\rho_D(z, U)$—кривизна Риччи бергмановой метрики, вычисленной в точке z ограниченной области $D \subset C^n$ в направлении вектора $U \in C^n$. В работе [4] было построено семейство областей голоморфности в C^n, для которых кривизны Риччи в точке $z=0$ имеют точную верхнюю грань, равную 7/5. Позже был получен результат (см. [5]), устанавливающий, что указанная выше оценка точна в C^2.

Ниже устанавливается, что оценка Фукса для кривизны Риччи бергмановой метрики точна в C^n $(n \geqslant 3)$.

1. Пусть $D \subset C^n$ — ограниченная область пространства C^n, $n > 2$ комплексных переменных, $K = K(z, \bar{z})$ — бергманова керн-функция области D. Рассмотрим в области D бергманову метрику

$$ds^2 = dz^* \, T^{(D)}(z, \bar{z}) \, dz, \quad T^{(D)} = (\ln K^{(D)})''_{z^*z} .$$

Как известно (см. [3]) кривизна Риччи бергмановой метрики определяется формулой

$$\rho_D(z, U) = -U^* (\ln \det T^{(D)})''_{z^*z} \, U \{U^* T^{(D)} U\}^{-1},$$

$$(\ln \det T^{(D)})''_{z^*z} = \frac{\partial^2}{\partial z^* \partial z} \ln \det T^{(D)} = \frac{\partial}{\partial z^*} \times \frac{\partial}{\partial z} \ln \det T^{(D)} .$$

Известно также (см. [4]), что для n-круговых областей D, содержащих свой центр $z=0$ имеют место равенства

$$\max_U \rho_D(0, U) = \max_{1<j<n} \sigma_j^{(D)}(0), \quad \min_U \rho_D(0, U) = \min_{1<j<n} \sigma_j^{(D)}(0),$$

где

$$\sigma_j^{(D)}(0) = n+1 - \left\{ K^{(D)} \left(K^{(D)''}_{z_j \bar{z}_j}\right)^{-1} \sum_{s=1}^{n} K^{(D)(IV)}_{z_j z_s \bar{z}_j \bar{z}_s} \left(K^{(D)''}_{z_s \bar{z}_s}\right)^{-1} \right\}_{z=0}, \tag{1.1}$$

$j = 1, \cdots, n$. Поскольку керн-функция n-круговых областей имеет вид (см. [1])

$$K^{(D)}(z, \bar{z}) = \sum_{l_1 \cdots l_n = 0}^{\infty} a^{-1}_{l_1 \cdots l_n} |z_1|^{2l_1} \cdots |z_n|^{2l_n},$$

где

$$a_{l_1 \cdots l_n} = \int_D |z_1|^{2l_1} \cdots |z_n|^{2l_n} \, dv,$$

то формулы (1.1) для n-круговых областей примут следующий вид:

$$\sigma_j^{(D)}(0)=n+1-\left(\int_D dv\right)^{-1}\int_D |z_j|^2\,dv\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_D |z_jz_s|^2\,dv\right)^{-1}\int_D |z_s|^2\,dv, \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_{js}=\begin{cases}1, & j\neq s\\ 4, & j=s\end{cases},\quad dv=dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n,\quad x_j+iy_j=z_j.$$

Обозначая $|z_j|^2=r_j$, $\arg z_j=\varphi_j$, получаем

$$dv=\frac{1}{2^n}\,dr_1\wedge d\varphi_1\wedge\cdots\wedge dr_n\wedge d\varphi_n.$$

Тогда в пространстве квадратов модулей R_n^+, (1.2) преобразуются в следующие формулы:

$$\sigma_j^{(D)}(0)=n+1-\left(\int_{D^+} d\omega\right)^{-1}\int_{D^+} r_j\,d\omega\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_{D^+} r_jr_s\,d\omega\right)^{-1}\int_{D^+} r_s\,d\omega, \quad (1.3)$$

где $d\omega=dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$.

2. В пространстве C^n $(n>3)$ рассмотрим n-круговую область

$$D_a^{(\alpha)}=\left\{\begin{array}{l} z\in C^n,\ D_1\cup D_2,\ D_1=\{|z|^2<\sqrt{n}\},\ D_2=\{\sqrt{n}\leqslant|z|^2<\sqrt{n}\,a,\\ |z|^{4\alpha}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\left[(k-1)|z_k|^2-\sum_{m=1}^{k-1}|z_m|^2\right]^2<\frac{n^\alpha}{n-1},\ \alpha>0\end{array}\right\}, \quad (2.1)$$

содержащую свой центр $z=0$.

Вычислим кривизну Риччи области $D_a^{(\alpha)}$ в точке $z=0$.

При преобразовании $z\to r=(r_1,\cdots,r_n)$, $r_j=|z_j|^2$, $j=1,\cdots,n$, область $D_a^{(\alpha)}$ переходит в область $D_a^{(\alpha)+}$, лежащую в R_n^+

$$D_a^{(\alpha)+}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} r\in R_n^+,\ D_1^+\cup D_2^+,\ D_1^+=\left\{\displaystyle\sum_{m=1}^{n} r_m<\sqrt{n}\right\};\ D_2^+=\left\{\sqrt{n}\leqslant\displaystyle\sum_{m=1}^{n} r_m<\sqrt{n}\,a,\right.\\ \left(\displaystyle\sum_{m=1}^{n} r_m\right)^{2\alpha}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\left[(k-1)r_k-\sum_{m=1}^{k-1} r_m\right]^2<\frac{n^\alpha}{n-1},\ \alpha>0\Big\}\end{array}\right\} \quad (2.2)$$

Из формулы (1.3) имеем

$$\sigma_j^{(D_a^{(\alpha)})}(0)=n+1-\left(\int_{D_1^+} d\omega+\int_{D_2^+} d\omega\right)^{-1}\left(\int_{D_1^+} r_j\,d\omega+\int_{D_2^+} r_j\,d\omega\right)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_{D_1^+} r_jr_s\,d\omega+\int_{D_2^+} r_jr_s\,d\omega\right)^{-1}\left(\int_{D_1^+} r_s\,d\omega+\int_{D_2^+} r_s\,d\omega\right). \quad (2.3)$$

Соответствующий подсчет показывает, что

$$\int\limits_{D_1^+} d\omega = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}, \quad \int\limits_{D_1^+} r_j d\omega = \frac{1}{2}\, n^{\frac{n+1}{2}}, \int\limits_{D_1^+} r_j^2 d\omega = \frac{1}{3}\, n^{\frac{n+2}{2}}, \quad \int\limits_{D_1^+} r_j r_s d\omega = \frac{1}{4!}\, n^{\frac{n+2}{2}}. \tag{2.4}$$

Для вычисления интегралов по D_2^+, входящих в (2.3), сделаем следующую замену:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k, \\ r_j &= \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} u_j - \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k, \\ r_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} u_n, \quad j = 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Непосредственно проверяется, что это ортогональное преобразование переводит прямую $r_1 = \cdots = r_n$ в ось u_1.

Решение системы (2.5) задается формулой

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} r_m, \\ u_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \left[(k-1) r_k - \sum_{m=1}^{k-1} r_m \right], \quad k = 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в условия, определяющие область D_a^{*+}, получаем

$$D_2^+ = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_1 - \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k > 0, \ \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \dfrac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} u_j - \\ - \sum\limits_{k=j+1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k > 0; \ j = 2, \cdots, n-1; \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \dfrac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} u_n > 0, \\ 1 \leqslant u_1 < a, \ u_1^{2*} \sum\limits_{k=2}^{n} u_k^2 < \dfrac{1}{n-1}, \ a > 0 \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

или

$$D_2^+ = \left\{ 1 < u_1 < a, \ |u_n| < \frac{1}{\sqrt{n-1}\, u_1^{*}}, \ |u_k| < \left(\frac{1}{(n-1) u_1^{2*}} - \sum_{m=k+1}^{n} u_m^2 \right)^{1/2}, \right.$$
$$\left. k = 2, \cdots; n-1 \right\}. \tag{2.8}$$

Действительно, условия, входящие в (2.8), совпадают с последними двумя неравенствами, входящими в (2.7) и из них легко следуют первые n неравенств, входящих в (2.7).

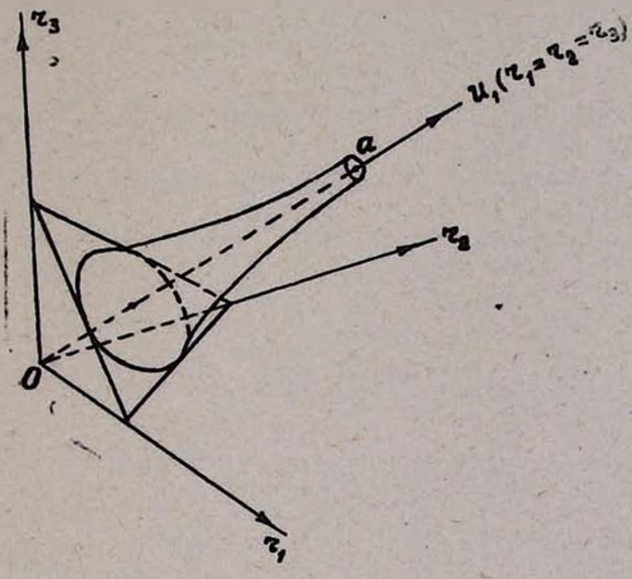
Из (2.7) заключаем, что область D_2^+ ограничена поверхностью полученной при вращении гиперболы

$$u_n u_1^a = \frac{1}{n-1},\ u_j = 0,\ j = 2, \cdots, n-1$$

вокруг оси u_1 по n—2-мерной сфере, стало быть, D_2^+ — область, симметричная относительно u_1 и поскольку преобразованием (2.6) ось u_1 переходит в прямую $r_1 = \cdots = r_n$, то D^+ — область, симметричная относительно прямой $r_1 = \cdots = r_n$. Поэтому для вычисления интегралов по D_2^+, входящих в (2.3), можно ограничиться случаем $j=n$, $s=n, n-1$.

Пределы интегрирования указаны в (2.8) и остается заметить, что $d\omega = dp$, где $dp = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$.

В случае $n=3$, образ области $D_a^{(\alpha)}$ в R_3^+ имеет следующее изображение



Вычисления показывают, что

$$\int\limits_{D_2^+} d\omega = \begin{cases} \dfrac{c\,[a^{1-\alpha(n-1)}-1]}{1-\alpha(n-1)}, & \alpha \neq \dfrac{1}{n-1} \\ c \ln a, & \alpha = \dfrac{1}{n-1}, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{D_2^+} r_j\, d\omega = \begin{cases} \dfrac{c\,[a^{2-\alpha(n-1)}-1]}{\sqrt{n}\,[2-\alpha(n-1)]}, & \alpha \neq \dfrac{2}{n-1} \\ \dfrac{c}{\sqrt{n}} \ln a, & \alpha = \dfrac{2}{n-1}, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\int_{D_2^+} r_j^2\, d\omega = \begin{cases} \dfrac{c}{n}\left\{\dfrac{a^{3-\alpha(n-1)}-1}{3-\alpha(n-1)} + \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n+1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha \neq \dfrac{3}{n-1},\ \dfrac{1}{n+1}, \\[2ex] \dfrac{c}{n}\left\{\ln a + \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n+1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha = \dfrac{3}{n-1}. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\int_{D_2^+} r_j r_s\, d\omega =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c}{n}\left\{\dfrac{a^{3-\alpha(n-1)}-1}{3-\alpha(n-1)} - \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n^2-1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha \neq \dfrac{3}{n-1},\ \dfrac{1}{n+1} \\[2ex] \dfrac{c}{n}\left\{\ln a - \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n^2-1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha = \dfrac{3}{n-1}, \end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Подставляя (2.4), (2.9)—(2.12) в формулы (2.3), приходим к теореме.

Теорема. *Пусть ограниченные области* $D_a^{(\alpha)} \subset C^n$ $(n > 3)$ *определяются соотношениями* (3.1). *Тогда в случаях* $\alpha = \dfrac{1}{n-1}$, $\dfrac{2}{n-1}$, $\dfrac{3}{n-1}$

$$\lim_{a\to\infty} \min_U \rho_{D_a^{(\alpha)}}(0, U) = \lim_{a\to\infty} \max_U \rho_{D_a^{(\alpha)}}(0, U) = n+1.$$

В заключение выражаю свою благодарность Б. А. Фуксу и Б. Я. Лебедь за внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 11.VI.1973

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Բերգմանյան մետրիկայի Ռիչչիի կորության գնահատման մասին (*ամփոփում*)

[2] աշխատանքում Բ. Ա. Ֆուկսի կողմից ստացված է $\rho_D(z, U) < n+1$ *գնահատականը, որտեղ* $\rho_D(z, U)$*-ն բերգմանյան մետրիկայի Ռիչչիի կորությունն է* $D \subset C^n$ *սահմանափակ տիրույթի z կետում* $U \in C^n$ *վեկտորի ուղղությամբ։ [5] աշխատանքում ցույց է տված այդ գնահատականի ճշգրիտ լինելը* C^2*-ում։*

Ներկա հոդվածում ապացուցված է, որ բերգմանյան մետրիկայում Ռիչչիի կորության Ֆուկսի գնահատականը ճշգրիտ է C^n $(n > 3)$ *տարածություններում։*

E. H. NAZARIAN. *On the estimation of Ricci curvature of the Bergman metric* (summary)

In the paper [2] B. A. Fuchs obtained the estimate $\rho_D(z, U) < n+1$, where $\rho_D(z, U)$, $z \in D \subset C^n$, denotes the Ricci curvature of the Bergman metric, calculated for the point z of a bounded domain $D \subset C^n$, in the direction of the vector $U \in C^n$. It has shown in [5] that this estimate is precise in C^2. In the present paper the precision in C^n $(n \geqslant 3)$ of the Fuchs's estimate is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., изд. „Наука", 1963, 76—100.
2. *Б. А. Фукс.* О кривизне Риччи бергмановой метрики, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 996—999.
3. *J. Tashiro.* Sci Repts Tokyo Kyoiki Daigaku, A8, 1965, 196—201.
4. *Б. Я. Лебедь.* Функциональный анализ и его приложения, 5, вып. 3, 100—101.
5. *А. М. Кытманов.* Сборник статей „Голоморфные функции многих комплексных переменных", Институт физики СО АН СССР, 1972, 197—199.