ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

В. А ШМАТКОВ

# ОДНОСТОРОННЯЯ АППРОКСИМАЦИЯ С ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задачи аппроксимации функций с одновременной интерполяцией рассматривались в работах Пашковского [1], Ямабе [2], Зингера [3], Волибнера [4], Де Ворэ [5] и других авторов.

В работах [4] и [5] на аппроксимирующие элементы помимо интерполяционных условий накладывались дополнительные ограничения. Интерполяции функций нескольких переменных также посвящено много работ (см., например, [6] и цитированную там литературу. Вопросы полиномиального одностороннего приближения функций нескольких переменных с одновременной интерполяцией без фиксации узлов интерполирования рассматривались в работах Чакалова [7].

В настоящей заметке рассматривается задача односторонней аппроксимации с одновременной интерполяцией непрерывных функций нескольких переменных посредством элементов всюду плотных многообразий. Устанавливаются условия, при которых возможна как угодно хорошая односторонняя аппроксимация функции при ее интерполяции в конечном числе заданных узлов. Как показано далее, условие равномерной плотности аппроксимирующего многообразия не является еще достаточным для такого приближения даже в случае, когда приближаемая функция и функции многообразия предполагаются как угодно гладкими.

Ради упрощения, теоремы формулируются и доказываются для случая функций двух переменных.

Рассмотрим на плоскости $XOY$ открытое множество $D=\{u\equiv(x, y)\}$. Через $C^q(D)$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных функций $F(u)$, имеющих на $D$ ограниченные непрерывные частные производные до порядка $q$ включительно, с нормой

$$\|F\|=\max_{\substack{l=0,1,\cdots,q\\ s=1,\cdots,l}}\ \sup_{u\in D}\left|\frac{\partial^{(l)}F(u)}{\partial x^s\,\partial y^{l-s}}\right|.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, вытекающая из одной теоремы Ямабе [2].

Лемма. *Пусть $f_i\,(i=1,\cdots,m)$ — линейно независимые линейные функционалы, заданные на банаховом пространстве $B$, и $M$ — линейное всюду плотное многообразие в $B$. Тогда для любых $z\in B$ и $\varepsilon>0$ найдется элемент $v\in M$ такой, что*

$$f_i(v)=f_i(z),\ i=1,\cdots,k;\ f_i(v)>f_i(z),\ i=k+1,\cdots,m,\ \|v-z\|<\varepsilon.$$

Действительно, по теореме Ямабе [2] существует $w \in M$ такой, что

$$f_i(w) = f_i(z),\ i = 1, \cdots, m;\ \|w - z\| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Очевидно, можно найти элемент $u \in M$, удовлетворяющий условиям

$$f_i(u) = 0,\ i = 1, \cdots, k;\ f_i(u) > 0,\ i = k + 1, \cdots, m,\ \|u\| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Тогда, как легко проверить, элемент $v = w + u \in M$ обладает требуемыми свойствами.

Теорема 1. *Пусть линейное многообразие $M \subset C^2(D)$ всюду плотно в пространстве $C^2(D)$. Тогда для всякой функции $F(u) \in C^2(D)$, любых точек $u_i \equiv (x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, m < \infty$ из $D$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $p(u) \in M$ такая, что будут выполнены условия*:

А) $p(u_i) = F(u_i)$, $u_i = (x_i, y_i) \in D$, $i = 1, \cdots, m$,

Б) $p(u) \leqslant F(u)$, $u \in D$,

В) $F(u) - \varepsilon < p(u)$, $u \in D$.

Доказательство: Учитывая, что величины

$$p(u_i),\ \frac{\partial p(u_i)}{\partial x},\ \frac{\partial p(u_i)}{\partial y},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial y^2}$$

при фиксированных $u_i \in D$ и $p \in C^2(D)$, являются линейно независимыми линейными функционалами на $C^2(D)$, на основании леммы можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $p_1(u) \in M$, удовлетворяющая условиям

$$F(u) - p_1(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m, \tag{1а}$$

$$d^2[F(u_i) - p_1(u_i)] > 0,\ i = 1, \cdots, m, \tag{1б}$$

$$\|F - p_1\|_C < \frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{1в}$$

Из условий (1а), (1б) следует, что существует окрестность $g_i$ точки $u_i (i = 1, \cdots, m)$ такая, что $F(u) - p_1(u) > 0$, $u \in g_i$. Положив $G = \cup g_i$, получим

$$F(u) - p_1(u) > 0,\ u \in G. \tag{2}$$

Построим на множестве $D$ функцию $\varphi(u) \in C^2(D)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\varphi(x, y) = F(x, y) - p_1(x, y) + \dfrac{\varepsilon}{8}[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] < \varepsilon_0 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, (3а)

для всех точек из некоторой окрестности $\bar{g}_i \subset g_i$ каждой точки $u_i (i = 1, \cdots, m)$;

$$2.\ \varphi(x, y) = \frac{\varepsilon}{2},\ u = (x, y) \in D \setminus G; \tag{3б}$$

$$3.\ 0 < \mu = \inf_{(x, y) \in \partial \widetilde{G}} \varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) < \frac{\varepsilon}{2},\ u \in G \setminus \widetilde{G}, \tag{3в}$$

где $\partial \widetilde{G}$ — граница замыкания множества $\widetilde{G} = \cup \widetilde{g}_i$.

В силу плотности многообразия $M$ в пространстве $C^2(D)$ для $\varepsilon > 0$ найдется функция $p_2(u) \in M$ такая, что

$$p_2(u) - \varphi(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m, \tag{4а}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[p_2(u_i) - \varphi(u_i)] = 0,\ i = 1, \cdots, m, \tag{4б}$$

$$\|p_2 - \varphi\|_{C^2} < \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mu\right). \tag{4в}$$

Из (1а) и (4а) следует, что функция $p(u) = p_1(u) - p_2(u)$ удовлетворяет условию А) теоремы. Докажем, что $p(u)$ удовлетворяет и условиям Б) и В).

Из условия (4в), используя (3а), получаем для всех $u \in \widetilde{G}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[F(u) - p_1(u) - p_2(u)] < 0,$$

$$\frac{\partial_2}{\partial y^2}[F(u) - p_1(u) - p_2(u)] < 0.$$

Поскольку

$$F(u) - p_1(u) - p_2(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m,$$

принимая во внимание (4б), будем иметь

$$F(u) - p_1(u) - p_2(u) \leqslant 0,\ u \in \widetilde{G}.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$0 \leqslant F(u) - p_1(u) \leqslant p_2(u), \tag{5}$$

и следовательно для всех $u \in \widetilde{G}$

$$F(u) - p(u) = F(u) - p_1(u) + p_2(u) \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $u \in D \setminus G$. Из (3б) и (4б) следует, что

$$\frac{\varepsilon}{4} < p_2(u) < \frac{3\varepsilon}{4},$$

отсюда, учитывая (1в), получаем, что для всех $u \in D \setminus G$

$$F(u) - p(u) = F(u) - p_1(u) + p_2(u) > p_2(u) -$$

$$-|F(u)-p_1(u)|>\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}=0. \tag{7}$$

Пусть теперь $u\in G\setminus\widetilde{G}$; тогда, согласно (3в) и (4в),

$$p_2(u)>\varphi(u)-\mu>0.$$

Учитывая (2), получаем для $u\in G\setminus\widetilde{G}$

$$F(u)-p(u)>0. \tag{8}$$

Из условий (6), (7), (8) следует, что для всех $u\in D$

$$p(u)\leqslant F(u). \tag{9}$$

С другой стороны, из (3а)—(3в) и (4в) вытекает, что для всех $u\in D$ $0\leqslant p_2(u)\leqslant\frac{3}{4}\varepsilon$; поэтому, учитывая (1в), имеем для $u\in D$

$$|F(u)-p(u)|\leqslant|F(u)-p_1(u)|+p_2(u)<\zeta. \tag{10}$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что элемент $p(u)$ удовлетворяет условиям Б) и В).

Замечание. Условия плотности многообразия $M$ в пространстве $C^2(D)$ и принадлежности $F(u)\in C^2(D)$ нельзя существенно ослабить. Действительно, если функция $F(u)$ принадлежит лишь $C^1(D)$, то для такой функции может не существовать ни одного элемента из $M$, удовлетворяющего даже условиям А) и Б).

Пример: $F(x,y)=-\sqrt[3]{(x+y-x_1-y_1)^4}$, $u_1=(x_1,\ y_1)$—узел интерполяции ($m=1$), $M$—многообразие алгебраических многочленов. С другой стороны, если многообразие $M\subset C^2(D)$ плотно лишь в $C^1(D)$, то условия А) и Б) могут оказаться невыполненными для как угодно гладкой функции.

Пример:

$$M=\left\{p(u)\in C^2(D)\colon \frac{\partial^2 p(u_1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 p(u_1)}{\partial y^2}=0\right\},$$

$$F(x,y)=-[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2],\quad u_1=(x_1,\ y_1)\in D.$$

Но оказывается, что если многообразие $M$ является алгеброй, то условие плотности $M$ в $C^2(D)$ можно ослабить.

Теорема 2. *Пусть алгебра $A$ функций из $C^2(D)$ плотна в пространстве $C^1(D)$. Тогда для всякой функции $F(u)\in C^2(D)$, любых точек $u_i=(x_i,\ y_i)$ ($i=1,\cdots,m<\infty$) из $D$ и произвольного $\varepsilon>0$ найдется функция $p(u)\in A$ такая, что будут выполнены условия А), Б), В). В этом утверждении условие плотности $A$ в $C^1(D)$ нельзя заменить на условие плотности $A$ в $C(D)$.*

Доказательство. Поскольку алгебра $A$ плотна в $C^1(D)$, то, используя теорему Ямабе, заключаем, что для всякой функции $F(u)\in C^2(D)$ и любого $\varepsilon>0$ найдется элемент $p_1(u)\in A$, удовлетворяющий условиям:

$$F(u) - p_1(u) = Q(|u - u_i|^2), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{11а}$$

$$|F(u) - p_1(u)| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad u \in D. \tag{11б}$$

Выберем константы $\bar{c}_i$ и $\bar{\bar{c}}_i$ настолько большими по абсолютной величине, чтобы выполнялись неравенства

$$2\bar{c}_i^2 > \left|\frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x^2}\right|, \quad i=1, \cdots, m, \tag{12а}$$

$$2\bar{\bar{c}}_i^2 > \left|\frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial y^2}\right|, \quad i=1, \cdots, m, \tag{12б}$$

$$\left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x^2} + 2\bar{c}_i^2\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial y^2} + 2\bar{\bar{c}}_i^2\right] >$$

$$> \left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x \partial y}\right]^2, \quad i=1, \cdots, m, \tag{13}$$

и рассмотрим функции $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ из $C^1(D)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\psi_j(u_i) = 0, \quad i=1, \cdots, m, \quad j=1, 2, \tag{14а}$$

$$\frac{\partial \psi_1(u_i)}{\partial x} = \bar{c}_i, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14б}$$

$$\frac{\partial \psi_1(u_i)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14в}$$

$$\frac{\partial \psi_2(u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14г}$$

$$\frac{\partial \psi_2(u_i)}{\partial y} = \bar{\bar{c}}_i, \quad i=1, \cdots, m, \tag{14д}$$

$$|\psi_j(u)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}, \quad u \in D, \quad j=1, 2. \tag{14е}$$

Используя теорему Ямабе, как и в теореме 1 заключаем, что в силу плотности $A$ в $C^1(D)$ существуют элементы $\pi_1(u)$ и $\pi_2(u)$ из $A$ такие, что

$$\pi_j(u) - \psi_j(u) = Q(|u - u_i|^2), \quad i=1, \cdots, m, \quad j=1, 2, \tag{15а}$$

$$|\pi_j(u) - \psi_j(u)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}, \quad u \in D, \quad j = 1, 2. \tag{15б}$$

Используя условия (11а), (12а), (12б), (14а)—(14д), (15а) и (13), нетрудно заключить, что в точках $u_i$ ($i = 1, \cdots, m$) функция $\varphi(u) = F(u) - p_1(u) + \pi_1^2(u) + \pi_2^2(u)$ имеет минимум, равный нулю. Следовательно существует окрестность $g_i$ каждой точки $u_i$ такая, что для всех $u \in G = \bigcup g_i$ выполняется неравенство

$$F(u) - p_1(u) + \pi_1^2(u) + \pi_2^2(u) \geqslant 0. \tag{16}$$

Заметив, что из неравенств (14е) и (15б) следует

$$\|\pi_j(u)\| \leqslant |\pi_j(u) - \psi_j(u)| + |\psi_j(u)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}, \quad j = 1, 2,$$

и используя (11б), получаем

$$\|\varphi\|_C \leqslant \|F - p_1\| + \|\pi_1\|^2 + \|\pi_2\|^2 < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(u) \in C^1(D)$ такую, что

$$|\Phi(u)| = \begin{cases} 0, & u = u_i, \ i = 1, \cdots, m, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, & u \in D \diagdown G, \end{cases}$$

$$|\Phi(u)| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad u \in D.$$

Снова, в силу плотности $A$ в $C^1(D)$, для $\varepsilon > 0$ найдется элемент $p_2(u) \in A$, удовлетворяющий условиям

$$p_2(u_i) = \Phi(u_i), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{18}$$

$$|\Phi(u) - p_2(u)| \leqslant \sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad u \in D. \tag{19}$$

Из ограниченности функции $\Phi(u)$ и неравенства (19) получим последовательно

$$|p_2(u)| < \sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}}, \quad u \in D, \tag{20}$$

$$\|\Phi^2 - p_2^2\|_C \leqslant \|\Phi - p_2\| \cdot \|\Phi + p_2\| \leqslant \|\Phi - p_2\| \cdot (\|\Phi\| + \|p_2\|) <$$

$$< \left(\sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + \sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}}\right) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, учитывая, что при $u \in D \diagdown G$ $|\Phi(u)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, имеем

$$\frac{\varepsilon}{4} < p_2^2(u), \quad u \in D \diagdown G. \tag{21}$$

Из свойств функции $\varphi(u)$ и равенств (18) следует

$$F(u_i) - p_1(u_i) + \pi_1^2(u_i) + \pi_2^2(u_i) + p_2^2(u_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{22}$$

Пусть $u \in G$, тогда, поскольку $p_2^2(u) > 0$, из условия (16) получим

$$F(u) - p_1(u) + \pi_1^2(u) + \pi_2^2(u) + p_2^2(u) \geqslant 0. \tag{23}$$

Пусть теперь $u \in D \diagdown G$. Так как $\pi_1^2(u)$ и $\pi_2^2(u)$ неотрицательны, то из (21) и (11б) следует

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)+p_2^2(u)\geqslant p_2^2(u)-|F(u)-p_1(u)|>0. \tag{24}$$

Кроме того, из (17) и (20) вытекает неравенство

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)+p_2^2(u)=\varphi(u)+p_2^2(u)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{3\varepsilon}{4}=\varepsilon. \tag{25}$$

Из условий (22)—(25) следует, что функция $p(u)=p_1(u)-\pi_1^2(u)-\pi_2^2(u)-p_2^2(u)$ удовлетворяет условиям А), Б), В) теоремы. Остается заметить, что поскольку $\pi_1^2(u)$, $\pi_2^2(u)$, $p_2^2(u)$ являются элементами алгебры $A$, то и функция $p(u)$ также принадлежит $A$.

Для доказательства последнего утверждения теоремы приведем пример алгебры $A$, плотной лишь в пространстве $C(D)$ и такой, что не для всякой функции из $C^2(D)$ существует элемент из $A$, удовлетворяющий условиям теоремы. Алгебра

$$A=\left\{p(u)\in C^2\colon \frac{\partial p(u_1)}{\partial x}=\frac{\partial p(u_1)}{\partial y}=0\right\}$$

плотна в $C(D)$, но для функции $p(x, y)\equiv x+y$ условия А) и Б) одновременно не могут выполняться, если узлом интерполяции является $u_1$ — внутренняя точка множества $D$.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность А. Л. Гаркави за постановку задач и полезные советы.

Московский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила 15.II.1972

Վ. Ա. ՇՄԱՏԿՈՎ. Միակողմանի մոտարկում ինտերպոլյացիայով մի քանի փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում *(ամփոփում)*

*Ներկա հոդվածում դիտարկվում է մի քանի փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիաների միաժամանակյա ինտերպոլյացիայով միակողմանիորեն մոտարկելու խնդիրը ամենուրեք խիտ բազմակերպությունների էլեմենտների միջոցով։*

*Սահմանվում են պայմաններ, որոնց դեպքում ֆունկցիան վերջավոր թվով հանգույցներում ինտերպոլացնելու հետ հնարավոր է որքան ասես լավ միակողմանիորեն մոտարկել։*

V. A. SHMATKOV. *One-sided approximation with interpolation in the space of continuous functions of several variables* (summary)

The note consideres the problem of one-sided approximation with simultaneous interpolation of the continuous functions of several variables by the elements of dense varieties.

The conditions, under which arbitralily close approximation is possible when the interpolation is carried out in jinite number of modes are established.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Paszkowski*. On approximation with nodes, Rozprawy Mathematyczne XIV, Warszawa, 1957.

2. *H. Yamabe.* On an extension of the Helly's theorem, Osaka Math, J., 2, 1950, 15—17.
3. *J. Singer.* Cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bucuresti acad. RSR, 1967.
4. *W. Wolibner.* Sur on polynome d'interpolation, Colloq. Math., 2, 1951, 136—137.
5. *R. Devore.* One sided approximation of functions, Journ. Approxim. theory, 1, 1, 1968, 11—25.
6. *W. Haussmann.* Tensorprodukte und mehrdimensionale Interpolation, Math. Z., 113, 1970, 17—23.
7. *B. Чакалов.* Односторонние приближения непрерывных функций, Труды международной конференции по конструктивной теории функций, София, БАН, 1971.