ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЯДРА КОШИ

Мальмквистом и Такенака были введены ортонормированные на окружности $|z|=1$ системы рациональных функций с фиксированными полюсами.

В ряде работ автора ([1]—[4]) с помощью этих систем и образуемых на их основе систем рациональных функций (аналогов полиномов Фабера), порожденных континуумом K и последовательностью чисел $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$ — полюсов этих систем, были установлены представления для ядра Коши в круге и в жордановых областях со спрямляемой границей.

Указанные представления позволили установить, что в надлежащих классах аналитических функций, существенно зависящих от распределения полюсов этих систем, они образуют базис в том или ином смысле. Этим вопросам была посвящена также работа Г. Ц. Тумаркина [5].

В настоящей статье предлагается другой подход к задаче о представлении ядра Коши с помощью простейших рациональных дробей *с фиксированными полюсами, имеющими наперед заданные кратности*.

В § 1 для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ вводится система простейших рациональных дробей

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

где $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. Затем методом, примененным уже в ряде работ для других задач анализа*, строится система функций $\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n$, биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^n$ на окружности $|z|=1$ при любом $n \geqslant 1$ (теорема 1).

В § 2 устанавливается явная формула представления для ядра Коши $\dfrac{1}{1-\bar{\zeta} z}$ с помощью наших биортогональных систем (теорема 2), и отмечается ряд важных следствий из такого рода представлений.

В § 3 с помощью системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ для любого ограниченного континуума K строится система простейших рациональных дробей

* Подробные указания об этих работах приведены во введении статьи автора [6].

$\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ с полюсами, лежащими на произвольной последовательности точек $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$.

Наряду с системой $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ строится также система $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}^n$ аналитических вне континуума K функций. В случае, когда K—жорданова область со спрямляемой границей Γ, доказывается биортогональность этих двух систем на Γ (теорема 3).

Наконец, с помощью построенных систем устанавливается основная теорема 4 о представлении ядра Коши $\frac{1}{\zeta - z}$ посредством рациональных дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^n$.

Возникающие в связи с этими результатами вопросы о базисе наших систем в надлежащих классах аналитических функций не затрагиваются нами.

§ 1. Биортогональные системы рациональных функций на окружности

1.1 (а) Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа конечной или даже бесконечной кратности.

Для любого фиксированного значения $k \geqslant 1$ через s_k будем обозначать кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$ нашей последовательности.

Далее, для произвольного фиксированного целого числа $n \geqslant 1$ и при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ обозначим через $p(n)$кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^n$ той же последовательности.

Очевидно, что будем иметь

$$1 \leqslant s_k \leqslant p_k(n) \; (1 \leqslant k \leqslant n) \text{ и } s_n = p_n(n). \tag{1.1}$$

Заметим, что если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) < +\infty, \tag{1.2}$$

то число $p_k(\infty) \equiv p_k$ $(k \geqslant 1)$, т. е. кратность появления α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, будет конечным, причем легко видеть, что для любого $k \geqslant 1$ будем иметь

$$1 \leqslant s_k \leqslant p_k < +\infty, \; p_k(n) = p_k \; (n \geqslant N_k). \tag{1.3}$$

(б) Полагая вновь, что $n \geqslant 1$—фиксированное целое число, рассмотрим конечное произведение Бляшке

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\cdot\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

условившись при $\alpha_j=0$ положить $\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}=\frac{\bar{\alpha}_j}{|\alpha_j|}=-1$. Очевидно, что функция $B_n(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и имеет нули в точках $\{\alpha_j\}_1^n$, при этом для любого k $(1\leqslant k\leqslant n)$ в точке $z=\alpha_k$ она имеет нуль кратности $p_k(n)$.

Отметим, что при условии (1.2) существует также функция Бляшке

$$B_\infty(z)\equiv B(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.5}$$

обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, причем каждая из точек $z=\alpha_k$ $(1\leqslant k_j<+\infty)$ является для нее нулем порядка $p_k=p_k(\infty)<+\infty$.

Впредь, пользуясь символом $B_n(z)$, будем полагать, что $1\leqslant n\leqslant$ $\leqslant+\infty$, причем в случае $n=+\infty$, не оговаривая особо, будем считать, что выполнено условие (1.2), обеспечивающее существование функции Бляшке $B_\infty(z)\equiv B(z)\not\equiv 0$.

(в) Рассмотрим функцию

$$\omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)}\quad(1\leqslant k\leqslant n), \tag{1.6}$$

регулярную и отличную от нуля в окрестности точки $z=\alpha_k$. Очевидно, что при достаточно малом $\delta>0$ справедливо разложение

$$\omega_{n,k}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta, \tag{1.7}$$

где

$$a_{n,\nu}(\alpha_k)=\frac{\omega_{n,k}^{(\nu)}(\alpha_k)}{\nu!}\quad(0\leqslant\nu<+\infty. \tag{1.8}$$

Введем, далее, в рассмотрение полиномы

$$q_{n,k}(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k(n)-s_k}a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu\ (1\leqslant k\leqslant n), \tag{1.9}$$

а также функции

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}\,q_{n,k}(z)}{(s_k-1)!\,\omega_{n,k}(z)}\equiv$$

$$\equiv\frac{B_n(z)\,q_{n,k}(z)}{(s_k-1)!\,(z-\alpha_k)^{p_k(n)-s_k+1}}\ (1\leqslant k\leqslant n), \tag{1.10}$$

регулярные в круге $|z|<1$, поскольку по (1.6) таковы и функции $\omega_{n,k}^{-1}(z)$.

В заключение особо отметим, что поскольку выше было оговорено считать в случае $n=+\infty$ условие (1.2) автоматически выполненным, то введенные нами функции $\omega_{n,k}(z)$ и $\Omega_{n,k}(z)$ сохраняют смысл и в этом случае.

(г) Докажем лемму.

Лемма 1. *Система функций*

$$\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n \ (1\leqslant k\leqslant n) \tag{1.11}$$

обладает следующими интерполяционными свойствами:

$$\Omega^{(r)}_{n,k}(\alpha_\nu)=$$

$$=\begin{cases} 0, & \alpha_\nu\neq\alpha_k;\ 0\leqslant r\leqslant p_\nu(n)-1\\ 1, & \alpha_\nu=\alpha_k;\ r=s_k-1\\ 0, & \alpha_\nu=\alpha_k;\ r\neq s_k-1,\ 0\leqslant r\leqslant p_k(n)-1=p_\nu(n)-1.\end{cases} \tag{1.12}$$

Доказательство. Из разложения (1.7) функции $\omega_{n,k}(z)$, принимая во внимание определение (1.9) полинома $q_{n,k}(z)$, следует, что

$$q_{n,k}(z)=\omega_{n,k}(z)-\sum_{\nu=p_k(n)-s_k+1}^{\infty} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta.$$

Отсюда и из (1.10) получим представление

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-$$

$$-\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!\,\omega_{n,k}(z)}\sum_{\nu=p_k(n)-s_k+1}^{\infty} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta,$$

которое с учетом (1.6) запишется также в виде

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta, \tag{1.13}$$

где

$$b_{n,\nu}(\alpha_k)=a_{n,\varkappa}(\alpha_k),\ \varkappa=p_k(n)-s_k+\nu+1.$$

Вторая и третья из формул (1.12) леммы следуют из (1.13), если учесть, что в точке $\alpha_\nu=\alpha_k$ функция $B_n(z)$ имеет нуль порядка $p_k(n)=p_\nu(n)$.

Что касается первой из формул (1.13) леммы, то она непосредственно следует из определения (1.10) функции $\Omega_{n,k}(z)$, так как в каждой точке $\alpha_\nu\neq\alpha_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ она совместно с функцией $B_n(z)$ имеет нуль кратности $p_\nu(n)$.

1.2 (а) Наряду с системой функций $\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n$, регулярных и ограниченных в единичном круге

$$D^{(+)}=\{z;\ |z|<1\},$$

рассмотрим также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1.14}$$

множество полюсов которых $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^\infty$ лежит в области

$$D^{(-)} = \{z;\ |z| > 1\},$$

дополнительной к замкнутому кругу $\overline{D}^{(+)}$.

Теорема 1. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^n \text{ и } \{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n \quad (1 \leqslant n \leqslant +\infty) \tag{1.15}$$

биортогональны на единичной окружности $|z|=1$ *в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t)\,\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,|dt| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\Omega_{n,k}(t)\,\overline{r_\nu(t)}\,|dt| =$$

$$= \delta_{k,\nu} = \begin{cases} 0, & \nu \neq k \\ 1, & \nu = k \end{cases} \quad (1 \leqslant k,\ \nu \leqslant n). \tag{1.16}$$

Доказательство. Функция $\Omega_{n,k}(z)$ регулярна и ограничена в круге $D^{(+)}$, и поэтому она представима интегралом Коши

$$\Omega_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Omega_{n,k}(t)}{t-z}\,dt,\quad z \in D^{(+)}.$$

Отсюда r-кратным дифференцированием по параметру z получим

$$\overline{\Omega^{(r)}_{n,k}(z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,\frac{r!\,t^r}{(1-\bar{z}t)^{r+1}}\,|dt|$$

$$(1 \leqslant k,\ \nu \leqslant n;\ 0 \leqslant r < +\infty).$$

При данном ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$, положив здесь $z = \alpha_\nu$ и $r = s_\nu - 1$, ввиду определения (1.14) системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, приходим к равенствам

$$\overline{\Omega^{(s_k-1)}_{n,k}(\alpha_\nu)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,r_\nu(t)\,|dt| \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1.17}$$

пользуясь которыми доказательство теоремы сводится к лемме 1.

С этой целью заметим, что при фиксированном ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ множество значений k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ можно разбить на три взаимно непересекающихся подмножества: 1) $k=\nu$, 2) $k \neq \nu$, но $\alpha_k = \alpha_\nu$, и, наконец, 3) $k \neq \nu$ и $\alpha_k \neq \alpha_\nu$.

Если $k=\nu$, то ясно, что $\alpha_k = \alpha_\nu$, $s_k = s_\nu$ и в силу второй из формул (1.12) леммы 1 наш интеграл (1.17) равен единице.

Если $k \neq \nu$, но $\alpha_k = \alpha_\nu$, то ясно, что $s_\nu - 1 \neq s_k - 1$, и поскольку $0 \leqslant s_\nu - 1 \leqslant p_\nu(n) - 1 = p_k(n) - 1$, то интегралы (1.17) равны нулю, согласно третьей из формул (1.12).

Наконец, если $k \neq \nu$ и $\alpha_k \neq \alpha_\nu$, то интегралы (1.17) вновь равны нулю, в силу первой из формул (1.12), поскольку тогда мы имеем $0 \leqslant s_\nu - 1 \leqslant p_\nu(n) - 1$. Таким образом, теорема полностью доказана.

(б) В заключение параграфа приведем одну лемму интерполяционного характера.

Лемма 2. *Пусть* $\{c_k\}_1^m$ $(1 \leqslant m < +\infty)$ — *произвольные комплексные числа. Тогда рациональная функция*

$$R_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Omega_{n,k}(z) \quad (1 < m \leqslant n < +\infty) \tag{1.18}$$

с полюсами в точках $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^n$, *а также регулярная и ограниченная в круге* $D^{(+)}$ *функция*

$$R_{\infty,m}(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Omega_{n,k}(z) \quad (1 \leqslant m < +\infty) \tag{1.19}$$

удовлетворяет следующим интерполяционным данным:

$$R_{n,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = R_{\infty,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = c_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m). \tag{1.20}$$

Доказательство. Поскольку функция $R_{n,m}(z)$ $(1 \leqslant m \leqslant n \leqslant \leqslant +\infty)$ регулярна и ограничена в круге $D^{(+)}$, то справедлива интегральная формула Коши

$$R_{n,m}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{R_{n,m}(t)}{1 - \bar{t} z} |dt| \quad (1 \leqslant m \leqslant n \leqslant +\infty).$$

Отсюда $(s_k - 1)$-кратным дифференцированием по параметру z получим

$$R_{n,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} R_{n,m}(t) \frac{(s_k-1)!\, \bar{t}^{s_k-1}}{(1-\alpha_k \bar{t})^{s_k}} |dt| =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \Omega_{n,m}(t) \overline{r_k(t)} |dt| = c_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m),$$

в силу формул (1.17) биортогональности теоремы 1.

§ 2. Представления ядра Коши в круге; некоторые приложения

2.1 (а) Пусть вновь $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а $s_k \geqslant 1$, $p_k(n) \leqslant p_k(\infty) \leqslant +\infty$ связанные с нею параметры, имеющие тот же смысл, что и в § 1.

С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ассоциируем систему рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$\varphi_1(z) = \frac{(1-|\alpha_1|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_1 z}, \tag{2.1}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_k z} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \quad (k=2, 3,\cdots), \tag{2.1}$$

условившись при этом, что при $\alpha_j = 0$, $\dfrac{|\alpha_j|}{\alpha_j} = \dfrac{\bar{\alpha}_j}{|\alpha_j|} = -1$.

Система $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ была введена в анализ Мальмквистом и Такенака ([7], [8], [9]), впервые установившими, что она ортонормальна на окружности $|t|=1$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \varphi_n(t)\overline{\varphi_m(t)}\,|dt| = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(n;\ m=1,\ 2,\cdots).$$

Заметим, что в простейшем случае, когда $\alpha_j = 0$ $(j \geqslant 1)$, система Мальмквиста переходит в систему степеней $\{z^k\}_0^\infty$, очевидно, также ортонормальной на окружности $|z|=1$ в том же смысле (2.2).

Следующая лемма, доказательство которой содержится в работах [1], [10], существенно понадобится нам ниже.

Лемма 3. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(z)}{1-\bar{\zeta}z}, \tag{2.3}$$

где

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}. \tag{2.4}$$

(б) Для определенных нами в § 1 биортогональных систем также имеют место тождества вида (2.3). А именно, справедлива

Теорема 2. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} \equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\; r_k(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(z)}{1-\bar{\zeta}z} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)}\,\Omega_{n,k}(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{2.4'}$$

Доказательство. Отметим сначала, что поскольку в подлежащих доказательству тождествах участвуют лишь рациональные функции от переменных z и $\bar{\zeta}$, то очевидно, что достаточно установить их справедливость, полагая, например, что $z \in D^{(+)}$ и $\zeta \in D^{(+)}$.

Рассмотрим рациональную функцию от двух переменных z и $\bar{\zeta}$

$$S_n(z;\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)}\,\Omega_{n,k}(z), \tag{2.5}$$

и заметим, что согласно лемме 2, для любого $\zeta \in D^{(+)}$ она удовлетворяет интерполяционным данным

$$\left\{\frac{\partial^{s_k-1} S_n(z;\zeta)}{\partial z^{s_k-1}}\right\}_{z=\alpha_k} = \overline{r_k(\zeta)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\left\{\frac{\partial^{s_k-1}}{\partial z^{s_k-1}}\left(\frac{1}{1-\overline{\zeta} z}\right)\right\}_{z=\alpha_k} =$$

$$= \left\{\frac{(s_k-1)!\,(\overline{\zeta})^{s_k-1}}{(1-\overline{\zeta} z)^{s_k}}\right\}_{z=\alpha_k} = \overline{r_k(\zeta)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

ввиду определения (1.14) функций $r_k(z)$. Поэтому, определив функцию

$$\Delta_n(z;\zeta) = \frac{1}{1-\overline{\zeta} z} - S_n(z;\zeta), \tag{2.6}$$

можем утверждать, что она удовлетворяет интерполяционным данным

$$\left\{\frac{\partial^{s_k-1} \Delta_n(z;\zeta)}{\partial z^{s_k-1}}\right\}_{z=\alpha_k} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{2.7}$$

Теперь, фиксируя $\zeta \in D^{(+)}$, введем в рассмотрение функцию

$$\Psi_n(z;\zeta) = \frac{\Delta_n(z;\zeta)}{B_n(z)}, \tag{2.8}$$

и убедимся, что она регулярна по переменной z в замкнутой области $\overline{D}^{(+)}$.

С этой целью заметим, что для любого $j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ точки $z=\alpha_j$ для функции $B_n(z)$ являются нулем кратности $p_j(n)$. Вместе с тем из (2.17) следует, что для функции $\Delta_n(z;\zeta)$ та же точка $z=\alpha_j$ является нулем той же кратности $p_j(n)$, так как очевидно, что

$$\max_{\substack{1 < k < n \\ \{\alpha_k\} = \alpha_j}} \{s_k\} = p_j(n).$$

Таким образом, функция $\Psi_n(z;\zeta)$, особые точки-полюса которой могли быть расположены лишь в нулях $B_n(z)$, регулярна в замкнутом круге $\overline{D}^{(+)}$. Поэтому, представив функцию $\Psi_n(z;\zeta)$ интегралом Коши, и пользуясь определением (2.6) функции $\Delta_n(z;\zeta)$, при любом $\zeta \in D^{(+)}$ будем иметь

$$\Psi_n(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\Delta_n(t;\zeta)}{B_n(t)}\,\frac{dt}{t-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{dt}{(1-\overline{\zeta} t)(t-z)\,B_n(t)} - \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\Omega_{n,k}(t)}{B_n(t)(t-\zeta)}\,dt \equiv$$

$$\equiv J_1(z;\zeta) + J_2(z;\zeta), \quad z \in D^{(+)}. \tag{2.9}$$

Но в $J_1(z;\zeta)$ подынтегральная функция в области $D^{(-)}$ имеет лишь одну особую точку—простой полюс в точке $t=\frac{1}{\overline{\zeta}}$, а при $|t|\to\infty$ она имеет порядок $O(t^{-2})$. Поэтому, пользуясь теоремой о вычетах и очевидным тождеством

$$B_n^{-1}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)=\overline{B_n(\zeta)},$$

мы получим

$$J_1(z;\zeta)=\frac{\overline{B_n(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z},\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}. \tag{2.10}$$

Заметим теперь, что в силу второй формулы определения (1.10) функции $\Omega_{n,k}(z)$ имеем

$$\frac{\Omega_{n,k}(z)}{B_n(z)}=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}\,q_{n,k}(z)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

Поскольку $q_{n,k}(z)$ — полином степени $p_k(n)-s_k$, то эта функция регулярна всюду в области $\overline{D}^{(-)}$, причем при $|z|\to\infty$ имеет порядок $O(z^{-1})$.

Из этого замечания, очевидно, следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Omega_{n,k}(t)}{B_n(t)(t-z)}\,dt\equiv 0,\quad z\in D^{(+)}\ (1\leqslant k\leqslant n),$$

откуда непосредственно получим

$$J_2(z;\zeta)\equiv 0,\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}.$$

Отсюда, и ввиду (2.10), формула (2.9) принимает вид

$$\Psi_n(z;\zeta)=\frac{\overline{B_n(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z},\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}. \tag{2.9'}$$

Наконец, из (2.5), (2.6), (2.8) и (2.9′) приходим ко второму из тождеств (2.4′) теоремы. Поменяв местами переменные z и ζ, переходом к сопряженным значениям оттуда получим первое из тождеств теоремы.

2.2. Отметим некоторые следствия из предыдущих результатов.

(a) Следствие 1. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ справедливы тождества*

$$S_n(z;\zeta)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{r_k(\zeta)}\,\Omega_{n,k}(z)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\,r_k(z)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z). \tag{2.11}$$

Это утверждение непосредственно следует из леммы 3 и теоремы 2.

Следствие 2. *Для произвольного фиксированного значения* n $(1 \leqslant n < +\infty)$ *семейства рациональных функций видов*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z)\right\} \text{ и } \left\{\sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z)\right\} \tag{2.12}$$

совпадают.

В самом деле, положив

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z)$$

и пользуясь теоремой 1, имеем

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)} \, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Поэтому, в силу тождеств (2.11) будем иметь

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) S_n(z;\zeta) \, |d\zeta| = \sum_{k=1}^{n} A_k^* \varphi_k(z),$$

где

$$A_k^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)} \, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Теперь, положив

$$\widetilde{R}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z)$$

и пользуясь свойством (2.2) ортогональности системы $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$, будем иметь

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)} \, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Следовательно, в силу тождества (2.11), получим

$$\widetilde{R}_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \widetilde{R}_n(\zeta) S_n(z;\zeta) \, |d\zeta| = \sum_{k=1}^{n} B_k^* r_k(z),$$

где

$$B_k^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \widetilde{R}_n(\zeta) \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)} \, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

Следствие 3. *Среди всех рациональных функций вида*

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z) \quad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{2.13}$$

минимум функционала

$$J[R_n] \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - R_n(z) \right|^2 |dz| \quad (|\zeta|<1) \tag{2.14}$$

реализует функция $S_n(z; \zeta)$, *причем*

$$\inf_{R_n} J[R_n] = J[S_n] = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}. \tag{2.15}$$

Действительно, согласно следствию 2 семейства рациональных функций (2.12) совпадают.

Поэтому, положив

$$\tilde{R}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z),$$

очевидно, имеем

$$\inf_{R_n} J[R_n] = \inf_{\tilde{R}_n} J[\tilde{R}_n]. \tag{2.16}$$

Заметим далее, что при $\zeta \in D^{(+)}$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} \overline{\varphi_k(z)} |dz| = \overline{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{\varphi_k(z)}{1-\zeta \bar{z}} |dz|} =$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\varphi_k(z)}{z-\zeta} dz} = \overline{\varphi_k(\zeta)} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Отсюда следует, что с функцией $\frac{1}{1-\bar{\zeta} z}$, $z \in D^{(+)}$ можно ассоциировать следующий формальный ряд Фурье по ортонормальной системе $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$:

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi_k(\zeta)} \varphi_k(z).$$

Поэтому, в силу экстремального свойства отрезков $S_n(z; \zeta)$ этого ряда можем утверждать, что

$$\inf_{\tilde{R}_n} J[\tilde{R}_n] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - S_n(z; \zeta) \right|^2 |dz|.$$

Наконец, поскольку в силу леммы 3

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - S_n(z; \zeta) \equiv \frac{\overline{B_n(\zeta)} B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}$$

и поэтому

$$\inf_{\bar{R}_n} J[\bar{R}_n] = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{|dz|}{|1-\bar{\zeta} z|^2} = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2},$$

то в силу равенства (2.16) наше утверждение (2.15) доказано.

Следствие 4. *Для любого* $\zeta \in D^{(+)}$ *и* n $(1 \leqslant n < +\infty)$ *минимум функционала*

$$U[R_n] = \max_{|z|=1} \left\{ |1-\bar{\zeta} z| \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - R_n(z) \right| \right\} \tag{2.17}$$

на семействе рациональных функций вида (2.13) *реализует функция* $S_n(z; \zeta)$, *причем*

$$\inf_{R_n} U[R_n] = U[S_n] = |B_n(\zeta)|. \tag{2.18}$$

Действительно, из (2.14) и (2.17) имеем

$$J[R_n] \leqslant U^2[R_n] \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{|dz|}{|1-\bar{\zeta} z|^2} = \frac{U^2[R_n]}{1-|\zeta|^2},$$

откуда и из (2.15) следует неравенство

$$\inf_{R_n} U[R_n] \geqslant |B_n(\zeta)|.$$

С другой стороны, пользуясь тождеством (2.3) леммы 3 или тождеством (2.4) теоремы 2, получим равенство

$$U[S_n] = |B_n(\zeta)|,$$

что в силу предыдущего неравенства приводит нас к утверждению (2.18).

В заключение приведем некоторые общие замечания о поведении отрезков рядов Фурье по нашим биортогональным системам.

(6) Пусть $f(e^{i\theta})$ — произвольная функция из класса $L(0, 2\pi)$, и

$$S_n(z; f) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \varphi_k(z), \tag{2.19}$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f(t) \overline{\varphi_k(t)} |dt| \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{2.19'}$$

суть n-ый отрезок ее ряда Фурье по системе Мальмквиста.

Тогда, обозначив

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f(t) \overline{r_k(t)} |dt|,$$

$$b_k^{(n)}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f(t) \overline{\Omega_{n,k}(t)} |dt| \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{2.20}$$

и воспользовавшись тождествами (2.11), мы заключаем, что сумма $\sigma_n(z; f)$ допускает также представления вида

$$S_n(z; f) \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}(f)\, r_k(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, \Omega_{n,k}(z). \tag{2.21}$$

Ввиду известного экстремального свойства функции $S_n(z; f)$, из тождеств (2.21) вытекает следующее

Следствие 5. *Если $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$, то для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$*

$$\inf_{\{b_k\}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k\, r_k(z)\right|^2 |dz| =$$

$$= \inf_{\{c_k\}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, \Omega_{n,k}(z)\right|^2 |dz| = \tag{2.22}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z) - S_n(z; f)|^2 |dz| \equiv \delta_n(f),$$

причем нижние грани достигаются, когда, соответственно

$$b_k = b_k^{(n)}(f), \quad c_k = c_k(f) \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{2.23}$$

(в) Если $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ суть граничные значения некоторой функции $f(z)$, принадлежащей в круге $D^{(+)}$ классу H_2 Харди, то хорошо известно ([8], [9], [4]), что для замкнутости системы функций $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ в классе H_2, т. е. для справедливости равенства

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_n(f) = 0, \ f \in H_2$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty. \tag{2.24}$$

Ввиду равенств (2.21) условие (2.24) остается в силе и для замкнутости системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в том же смысле.

В случае, когда $f(e^{i\theta}) \in L_p$ суть граничные значения функции $f(z) \in H_p$, из одного результата А. А. Китбаляна [11] следует, что при $1 < p < +\infty$ условие (2.24) достаточно также для замкнутости системы $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ в метрике

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\, \varphi_k(z)\right|^p |dz| = 0. \tag{2.25}$$

Из результатов Г. Ц. Тумаркина [12] следует, что для (2.25) условие (2.24) также необходимо.

Из указанных результатов, ввиду тождеств (2.21) вытекает

Следствие 6. *Для того чтобы для произвольной функции $f(z) \in H_p$ $(1 < p < +\infty)$ имело место*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}(f)\, r_k(z) \right|^p |dz| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, \Omega_{n,k}(z) \right|^p |dz| = 0, \tag{2.26}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (2.24).

(в) Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$, порождающая систему $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$, удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty \tag{2.27}$$

и, таким образом, система Мальмквиста не замкнута в H_p $(1 < p < +\infty)$.

Как известно ([12], [4]), в этом случае аппроксимацию вида (2.25), и следовательно, видов (2.26), допускают *лишь* функции $f(z)$ из класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, которые на окружности $z = e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$ одновременно являются граничными значениями некоторой функции $f(z) \in H_p$ в круге $D^{(+)}$, и некоторой мероморфной в области $D^{(-)}$ функции, допускающей представление вида

$$f(z) = \frac{B(z)}{z} \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tilde{f}(z) \in H_p.$$

С другой стороны, при условии (2.27), согласно теореме 1 системы функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_{\infty,k}(z)\}_1^\infty$ также биортогональны на окружности $|z|=1$. Поэтому в этом случае для каждой функции $f(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ могут быть составлены формальные ряды типа Фурье по этим системам

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\, \Omega_{\infty,k}(z), \tag{2.28}$$

где

$$b_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\, \overline{\Omega_{\infty,k}(t)}\, |dt| = \lim_{n\to+\infty} b_k^{(n)} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

а также

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, \Omega_{\infty,k}(z), \tag{2.28'}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\, \overline{r_k(t)}\, |dt| \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

В связи с формальными разложениями (2.28) и (2.28'), естественно ставить задачу о природе их сходимости как в областях $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$, так и на их общей границе — на единичной окружности $|z|=1$*.

§ 3. Биортогональные системы, порожденные ограниченными континуумами

3.1 (а) Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и $G^{(-)}$—та из смежных с ним компонент, которая содержит точку $z=\infty$. Очевидно, что $G^{(-)}$ является односвязной областью расширенной плоскости z, граница Γ которой принадлежит континууму K.

Пусть функция

$$w=\Phi(z) \quad (z=\Psi(w)), \tag{3.1}$$

подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, конформно отображает область $G^{(-)}$ на внешность единичного круга $D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}$.

Очевидно, что в окрестности точки $z=\infty$, а именно, при $|z|>R_0=\sup\limits_{\zeta\in K}\{|\zeta|\}$ имеют место следующие разложения в ряд Лорана:

$$\Phi(z)=\tau z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots,$$

$$\Phi'(z)=\tau-\frac{\alpha_1}{z^2}-\frac{2\alpha_2}{z^3}-\cdots. \tag{3.2}$$

(б) Пусть $\{\omega_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел (в том числе возможно и равных ∞), лежащих в области $G^{(-)}$.

Определим теперь другую последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j(\omega)|<1)$, положив

$$\alpha_j(\omega)=\begin{cases}\overline{[\Phi(\omega_j)]^{-1}}, & \text{при } \omega_j\neq\infty,\\ 0, & \text{при } \omega_j=\infty.\end{cases} \tag{3.3}$$

В данном параграфе впредь будем предполагать, что система рациональных функций $\{r_k(w)\}_1^\infty$, определенная нами в § 1, ассоциирована именно с последовательностью $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$, т. е.

$$r_k(w)=\frac{(s_k-1)!\ w^{s_k-1}}{(1-\overline{\Phi^{-1}(\omega_j)}\,w)^{s_k}} \quad (1\leqslant k<+\infty). \tag{3.4}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что s $(0\leqslant s\leqslant1)$—произвольный параметр и введем в рассмотрение последовательность функций

---

* Полное решение этой задачи в случае, когда точки последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *отличны друг от друга,* содержится в публикуемой в следующем номере журнала статье Г. М. Айрапетяна.

$$\Psi_k^{(s)}(z) \equiv r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{(s_k-1)!\,[\Phi(z)]^{s_k-1}\,[\Phi'(z)]^s}{[1-\Phi^{-1}(\omega_j)\,\Phi(z)]^{s_k}} \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{3.5}$$

Заметим, что функция $\Psi_k^{(s)}(z)$ регулярна* в области $G^{(-)}$ за исключением точки $z=\omega_k$, где она имеет полюс порядка s_k, если $\omega_k \neq \infty$ и порядка s_k-1, если $\omega_k=\infty$. Заметим также, что если $\omega_k \neq \infty$, то как следует из (3.2) и (3.5), $\Psi_k^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, при $z \to \infty$.

Обозначим теперь через $m_k^{(s)}(z)$ главную часть функции $\Psi_k^{(s)}(z)$ в окрестности точки $z=\omega_k$, если $\omega_k \neq \infty$; если же $\omega_k=\infty$, то под $m_k^{(s)}(z)$ будем понимать главную часть той же функции $\Psi_k^{(s)}(z)$ в окрестности точки $z=\omega_k=\infty$ вместе с постоянной в ее разложении в ряд Лорана. Таким образом, если при данном k $(1 \leqslant k < +\infty)$, $\omega_k \neq \infty$, то $m_k^{(s)}(z)$—рациональная функция вида

$$m_k^{(s)}(z) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}}{(z-\omega_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)} \neq 0, \tag{3.6}$$

если же $\omega_k=\infty$, то $m_k^{(s)}(z)$—полином степени s_k-1:

$$m_k^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{s_k-1} b_j^{(k)} z^k, \quad b_{s_k-1}^{(k)} \neq 0. \tag{3.6'}$$

Из нашего определения непосредственно следует, что при любом k $(1 \leqslant k < +\infty)$

$$\Psi_k^{(s)}(z) - m_k^{(s)}(z) \equiv r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s - m_k^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty. \tag{3.7}$$

Назовем систему рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ *системой функций, порожденной континуумом K и последовательностью чисел* $\{\omega_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$.

Отметим, что система $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой естественное обобщение известной системы полиномов Фабера и ее модификаций.

В самом деле, положим, что все полюсы $\{\omega_k\}_1^\infty$, порождающие нашу систему $m_k^{(s)}(z)$, лежат в бесконечности, т. е. $\omega_k=\infty$ $(1 \leqslant k < \infty)$. Тогда, очевидно, будем иметь $s_k=k$ $(k \geqslant 1)$, и поэтому, по (3.4), $r_k(w)=(k-1)!\,w^{k-1}$ $(k \geqslant 1)$. Следовательно, в рассматриваемом случае функция $m_k^{(s)}(z)$ определяется как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции $(k-1)!\,[\Phi(z)]^{k-1}\,[\Phi'(z)]^s$ в окрестности точки $z=\infty$. Это значит, что

---

* поскольку таковы функции $\Phi(z)$ и $\Phi'(z)$, причем $\Phi'(z) \neq 0$, $z \in G^{(-)}$.

в силу формулы (3.2) можно утверждать, что для любого $k \geq 0$ функция $\dfrac{m_{k+1}^{(s)}(z)}{k!}$ будет полиномом степени k вида

$$\frac{m_{k+1}^{(s)}(z)}{k!} = \tau^{k+s} z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \cdots + a_0^{(k)}.$$

Отсюда, в частности, следует, что функции $m_k^{(0)}(z)$ и $m_k^{(1)}(z)$ связаны с известными полиномами Фабера первого и второго рода $\Phi_k^{(1)}(z)$ и $\Phi_k^{(2)}(z)$ соотношениями вида

$$\Phi_k^{(1)}(z) = \tau^{-k} \frac{m_{k+1}^{(0)}(z)}{k!}, \quad \Phi_k^{(2)}(z) = \tau^{-k-1} \frac{m_{k+1}^{(1)}(z)}{k!} \quad (k=0,\ 1,\ 2, \cdots).$$

(в) Определив систему рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^{\infty}$, установим для них интегральное представление.

С этой целью обозначим через Γ_ρ $(1 < \rho < +\infty)$ образ окружности $|w| = \rho$ на плоскости z при отображении $z = \Psi(w)$ области $D^{(-)} = \{w;\ |w| > 1\}$ на область $G^{(-)}$.

Пусть, далее, $G_\rho^{(-)} \subset G^{(-)}$ есть внешняя область, ограниченная контуром Γ_ρ, а $G_\rho^{(+)} \supset K$ — дополнительная к ней область плоскости z, имеющая ту же границу Γ_ρ.

Лемма 4. *Пусть при данном* k $(1 \leq k < +\infty)$ ρ *является произвольным числом из интервала*

$$1 < \rho < \rho_k = |\Phi(\omega_k)|, \tag{3.8}$$

тогда

1) *для любого* $z \in G_\rho^{(+)}$, *и в частности при* $z \in K$ *справедлива формула*

$$m_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}\, d\zeta; \tag{3.9}$$

2) *для любого* $z \in G_\rho^{(-)}$ *справедлива формула*

$$m_k^{(s)}(z) = r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.10}$$

Доказательство. Функция

$$r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s - m_k^{(s)}(z)$$

регулярна и ограничена в области $G_\rho^{(-)}$, причем согласно (3.7) в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ она имеет нуль порядка не ниже первого. Поэтому, согласно теореме Коши будем иметь в любой точке $z \in G_\rho^{(+)}$ $(1 < \rho < +\infty)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s-m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0. \tag{3.11}$$

Если для данного значения $k>1$ параметр ρ удовлетворяет условию (3.8), то функция $m_k^{(s)}(z)$, как уже отмечалось, регулярна в замкнутой области $\overline{G}_\rho^{(+)}$. Поэтому, очевидно, что

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G_\rho^{(+)},$$

откуда и из (3.11) вытекает представление (3.9) леммы.

2) Как следует из условия (3.8), $\omega_k\in G_\rho^{(-)}$. Предположим, что $z\neq\omega_k$—произвольная точка области $G_\rho^{(-)}$.

Выберем число $\rho_0>\rho$ таким образом, чтобы точка $z=z_0$, а также точка $z=\omega_k$, если $\omega_k\neq\infty$, принадлежали области $G_{\rho_0}^{(+)}$. Тогда, с одной стороны, по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta-$$

$$-r_k[\Phi(z_0)][\Phi'(z_0)]^s-\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta=\omega_k\\ \omega_k\neq\infty}}\left\{\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\right\}^* \tag{3.12}$$

с другой стороны, из уже установленной нами формулы (3.9) леммы 4 следует, что если $z\in G_\rho^{(+)}$, то

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta=\omega_k\\ \omega_k\neq\infty}}\left\{\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\right\}^*. \tag{3.13}$$

Однако, первое слагаемое, стоящее справа в (3.13), регулярно всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$, а второе, —очевидно, является рациональной функцией от z. Поэтому представление (3.13) остается справедливым всюду в области $G_\rho^{(+)}$ и, в частности, в точке $z=z_0$. Следовательно, из (3.12) и (3.13) вытекает формула (3.10) леммы.

В заключение отметим, что интегральные члены, стоящие в обеих формулах (3.9) и (3.10) леммы 4, могут быть заменой переменного интегрирования $\Phi(\zeta)=t$, $\zeta=\Psi(t)$ записаны также в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{r_k(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\,dt. \tag{3.14}$$

* Таким образом, если при данном $k>1$ $\omega_k=\infty$, то это слагаемое просто отпадает.

3.2 (а) Всюду дальше мы будем предполагать, что континуум K представляет собой замыкание односвязной области $G^{(+)}$, ограниченной *замкнутой спрямляемой кривой* Г. Тогда, как известно, кривая Г одновременно является полной границей для единственной смежной с континуумом $K=\overline{G}^{(+)}$ области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

Для функции $z=\Psi(w)$, конформно отображающей область $D^{(-)}= \{w;\ |w|>1\}$ на внешность $G^{(-)}$ области $G^{(+)}$, справедливы следующие утверждения*:

1°. *Для любого* p $(0\leqslant p<1)$

$$\sup_{1<r<\infty}\left\{\int_0^{2\pi}|\Psi'(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\right\}<+\infty; \tag{3.15}$$

2°. *Почти для всех* $\vartheta\in[0,2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r\to1+0}\Psi'(re^{i\vartheta})=\Psi'(e^{i\vartheta})\in L(0,2\pi), \tag{3.16}$$

причем

$$\lim_{r\to1+0}\int_0^{2\pi}|[\Psi'(e^{i\vartheta})]^p-[\Psi'(re^{i\vartheta})]^p|\,d\vartheta=0. \tag{3.17}$$

В рассматриваемом нами случае, когда Г — замкнутая спрямляемая кривая Жордана, из леммы 4 вытекает

Лемма 4′. *Для функций системы* $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ *имеют место следующие формулы представления:*

1) *при* $z\in G^{(+)}$

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{r_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw\quad(k=1,2,\cdots); \tag{3.18}$$

2) *При* $z\in G^{(-)}$

$$m_k^{(s)}(z)-r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{r_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw \tag{3.19}$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

Действительно, заметим сперва, что поскольку особенность функции $r_k(w)$ находится в точке $w=1/\overline{\alpha}_k(\omega)=\Phi(\omega_k)$, то она непрерывна в любом замкнутом кольце $1\leqslant|t|\leqslant\rho<\rho_k=|\Phi(\omega_k)|$.

Рассмотрим далее функцию

* См. [4], лемму 2.

$$\frac{r_k(w)}{\Psi(w)-z},\ z\overline{\in}\Gamma \tag{3.20}$$

и отметим, что она непрерывна в каждом кольце $1\leqslant|t|\leqslant\rho$, если при $z\in G^{(+)}$, $\rho<\rho_k$, а при $z\in G^{(-)}$, $\rho<\min(\rho_k, |\Phi(z)|)$. Теперь, принимая во внимание формулу (3.17) и отмеченное свойство непрерывности функции (3.20), при фиксированном $z\overline{\in}\Gamma$ и любом $s\,(0\leqslant s\leqslant 1)$ будем иметь

$$\lim_{\rho\to 1+0}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{r_k(w)\,[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw=\int\limits_{|w|=1}\frac{r_k(w)\,[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\frac{r_k[\Phi(\zeta)]\,[\Phi'(\zeta)]^{s}}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad(k=1,2,\cdots). \tag{3.21}$$

Наконец, переходя к пределу в формулах (3.9), приходим к требуемым представлениям (3.18) и (3.19).

(б) Выше, посредством формулы (3.4), мы определили систему рациональных функций $\{r_k(w)\}_1^{\infty}$, ассоциированную с последовательностью комплексных чисел $\{a_j(\omega)\}_1^{\infty}$, где $a_j(\omega)=[\overline{\Phi(\omega_j)}]^{-1}$ $(j\geqslant 1)$.

С последовательностью чисел $\{a_j(\omega)\}_1^{\infty}$ мы можем ассоциировать систему функций $\{\Omega_{n,k}(w)\}_1^n$ $(1\leqslant n\leqslant+\infty)$, биортогональную с системой $\{r_k(w)\}_1^n$ на окружности $|w|=1$, согласно теореме 1, предполагая при этом, что в случае $n=+\infty$ соблюдается условие

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j(\omega)|)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_j)|^{-1})<+\infty. \tag{3.22}$$

Как следует из определения (1.10), если $1<n<+\infty$, то функции $\Omega_{n,k}(w)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ рациональны и имеют полюса лишь на множестве точек $\{1/\overline{a_j(\omega)}\}_1^n\subset D^{(-)}$, если же $n=+\infty$, то функции $\Omega_{\infty,k}(w)$, $1\leqslant k<+\infty$ регулярны и ограничены в круге $D^{(+)}$.

Теперь, наряду с системой рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^{\infty}$, порожденной континуумом $K=\overline{G^{(+)}}$, введем в рассмотрение еще систему функций $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^n$ $(1\leqslant n\leqslant+\infty)$, регулярных в области $G^{(-)}$, положив

$$\rho_{n,k}^{(s)}(z)=\frac{[\Phi'(z)]^{1-s}}{\Phi(z)}\,\overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)\ [(1\leqslant k\leqslant n). \tag{3.23}$$

Заметив, что при любом $n\,(1<n\leqslant+\infty)$ и $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$

$$\sup_{z\in G^{(-)}}\left|\overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)\right|\leqslant M_{n,k}<+\infty$$

и поэтому, согласно утверждениям 1° и 2°

$$\int\limits_{\Gamma}|\rho_{n,k}(\zeta)|\,|d\zeta|<M_{n,k}\int\limits_{\Gamma}|\Phi'(\zeta)|^{1-s}\,|d\zeta|=$$

$$= M_{n,k} \int\limits_{|t|=1} |\Psi'(t)|^s \, |dt| < +\infty, \tag{3.24}$$

докажем теорему.

Теорема 3. *Системы функций*

$$\{m_k^{(s)}(z)\}_1^n \text{ и } \{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^n \quad (1 < n \leqslant +\infty) \tag{3.25}$$

биортогональны на общей границе Γ *областей* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta)\, \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \delta_{\nu,k} = \begin{cases} 1, & k = \nu \\ 0, & k \neq \nu \end{cases} \quad (1 \leqslant k, \nu \leqslant n). \tag{3.26}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta)\, \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta) \left\{ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right)\right\} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \{m_\nu^{(s)}(\zeta) - r_\nu[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s\} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) d\zeta + \tag{3.27}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} r_\nu[\Phi(\zeta)] \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) d\zeta = J_1 + J_2.$$

Но согласно (3.7), при $\zeta \to \infty$

$$m_\nu^{(s)}(\zeta) - r_\nu[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s = O\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

а в силу (3.2) и регулярности функции $\Omega_{n,k}(w)$ в круге $D^{(+)}$ имеем также

$$\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \ \zeta \to \infty.$$

Поскольку, таким образом, подынтегральная функция в J_1 при $\zeta \to \infty$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$, то отсюда легко заключаем, что $J_1 = 0$.

Обращаясь к интегралу J_2, после замены переменной $t = \Phi(\zeta)$ получим согласно теореме 1

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t) \left\{ \frac{1}{t} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t)\, \overline{\Omega_{n,k}(t)}\, |dt| = \delta_{\nu,k}.$$

Наконец, отсюда и из тождества (3.27) вытекает утверждение (3.26) теоремы ввиду того, что $J_1 \equiv 0$.

(в) Функции системы $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^{\infty}$ регулярны в замкнутой области $\overline{G}^{(+)}$, и поэтому представимы интегральной формулой Коши

$$m_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^{(+)} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.28}$$

Но эти формулы можно трактовать таким образом: при любом $k \geqslant 1$ функция $m_k^{(s)}(z)$ является k-тым коэффициентом Фурье ядра Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ $(z \in G^{(+)}, \zeta \in \Gamma)$ относительно системы функций $\{m_k^{(s)}(\zeta)\}_1^n$ $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$, биортогональной с системой $\{\rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\}_1^n$ на контуре Γ, согласно теореме 3.

Таким образом, в предположении, что при $n = +\infty$ соблюдается условие (3.22) для любого n $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$, естественно принять, что для ядра Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ формальное разложение в ряд Фурье по биортогональной системе (3.25) имеет вид

$$\frac{1}{\zeta - z} \sim \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z); \quad \zeta \in \Gamma, \ z \in G^{(+)}. \tag{3.29}$$

Следующая теорема, являющаяся существенным обобщением теоремы 2, служит важной основой для сделанного выше замечания.

Теорема 4. *Для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_n[\Phi(\zeta)]} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{B_n[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta, \quad \zeta \in G^{(-)}, \ z \in G^{(+)}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Полагая, что точка $z \in G^{(+)}$ фиксирована, рассмотрим функцию

$$\chi_s(w; z) = \frac{[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}, \tag{3.31}$$

очевидно, регулярную в области $D^{(-)} = \{w;\ |w| > 1\}$. Тогда легко видеть, что функция

$$\chi_s^*(w; z) = \frac{1}{w}\, \overline{\chi_s\left(\frac{1}{\overline{w}}; z\right)} \tag{3.32}$$

будет уже регулярной в единичном круге $D^{(+)} = \{w;\ |w| < 1\}$.

Обозначая

$$d(z)=\inf_{\zeta\in\Gamma}|\zeta-z|>0,$$

для любого $|w|=\rho>1$ будем иметь

$$|\Psi(w)-z|\geqslant d(z).$$

Поэтому, из (3.25) в силу (3.15) следует, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 1+0}}\int\limits_0^{2\pi}|\chi_s(\rho e^{i\vartheta};\ z)|\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant[d(z)]^{-1}\overline{\lim_{\rho\to 1+0}}\int\limits_0^{2\pi}|\Psi'(\rho e^{i\vartheta})|^{1-s}\,d\vartheta<+\infty. \tag{3.33}$$

Наконец, из (3.32) имеем при $0<r<1$

$$\int\limits_0^{2\pi}|\chi_s^*(re^{i\vartheta};\ z)|\,d\vartheta=\frac{1}{r}\int\limits_0^{2\pi}\left|\chi_s\left(\frac{1}{r}\,e^{-i\vartheta};\ z\right)\right|d\vartheta,$$

откуда, в силу неравенства (3.33), можем утверждать, что функция $\chi_s^*(w;\ z)$ по переменной $w\in D^{(+)}$ принадлежит классу H_1 Харди.

Следовательно, функция $\chi_s^*(w;\ z)$ представима интегралом Коши через свои граничные значения на единичной окружности

$$\chi_s^*(w;\ z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi_s^*(t;\ z)}{1-w\bar{t}}\,|dt|,\quad w\in D^{(+)}. \tag{3.34}$$

Заметив теперь, что согласно (3.32)

$$\overline{\chi_s^*(t;\ z)}=t\,\chi_s(t;\ w),\ |t|=1$$

после перехода к сопряженным значениям формулу (3.34) можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{w}}\,\chi_s\left(\frac{1}{\bar{w}};\ z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi_s(t;\ z)}{1-\bar{w}t}\,dt,\quad \bar{w}\in D^{(+)}. \tag{3.34'}$$

Отметим, далее, что при $\bar{w}\in D^{(+)}$ будем иметь $\zeta=\Psi\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)\in G^{(-)}$, и следовательно, $\bar{w}=1/\Phi(\zeta)$. Но после таких замен, принимая во внимание определение (3.31) функции $\chi_s(w;\ z)$, формула (3.34′) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi_s(t;\ z)}{1-t/\Phi(\zeta)}\,dt,\ \zeta\in G^{(-)}. \tag{3.35}$$

Заметим, наконец, что согласно теореме 2, вообще для любого $\zeta \in G^{(-)}$, т. е. $\Phi(\zeta) \in D^{(-)}$ и t справедливо тождество

$$\frac{1}{1-t/\Phi(\zeta)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}\left(\frac{1}{\overline{\Phi(\zeta)}}\right)} r_k(t) + \frac{\overline{B_n\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right)} B_n(t)}{1-t/\Phi(\zeta)}. \tag{3.36}$$

Подставляя значение функции $[1-t/\Phi(\zeta)]^{-1}$ из (3.36) под интеграл (3.35) и заметив, что согласно формуле (3.18) леммы 4′, при $z \in G^{(+)}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \chi_s(t;\ z)\, r_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{r_k(t)\,[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\, dt = m_k^{(s)}(z) \quad (k=1,\ 2, \cdots),$$

приходим к тождеству

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) m_k^{(s)}(z) +$$

$$+ [\Phi'(\zeta)]^{1-s}\, \overline{B}_n\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{B_n(t)\,\chi_s(t, z)}{\Phi(\zeta)-t}\, dt,\ \zeta \in G^{(-)},\ z \in G^{(+)}. \tag{3.35'}$$

Отметим, наконец, что ввиду очевидного тождества $\overline{B}_n\left(\frac{1}{w}\right) = B_n^{-1}(w)$, пользуясь определениями (3.23) и (3.31) системы $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^n$ и функции $\chi_s(w;\ z)$, мы приходим к формуле (3.30) теоремы, так как

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{B_n(t)\,\chi_s(t;\ z)}{\Phi(\zeta)-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{B_n[\Phi(\eta)]\,[\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta)-\Phi(\eta)]}\, d\eta.$$

г) В заключение отметим, что в работе [4] была установлена формула представления ядра Коши с помощью других систем функций — $\{M_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ и $\{R_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$. Эти системы определялись таким образом.

Положим, что $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ — система Мальмквиста, ассоциированная с последовательностью комплексных чисел (3.3) — $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$. Функция $M_k^{(s)}(z)$ определялась аналогично функции $m_k^{(s)}(z)$ посредством главной части выражения

$$\varphi_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s \quad (0 < s \leqslant 1)$$

в окрестности точек $\{\omega_j\}_1^k$, а функция $R_k^{(s)}(z)$ — посредством формулы

$$R_k^{(s)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1-s}}{\Phi(z)}\, \overline{\varphi_k}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\ z \in G^{(-)}.$$

Тождество, аналогичное формуле (3.30) теоремы 4 посредством этих систем, имело вид*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} R_k^{(s)}(\zeta)\, M_k^{(s)}(z) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_n[\Phi(\zeta)]} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B_n[\Phi(\eta)]\,[\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)\,[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta, \quad z \in G^{(+)}, \ \zeta \in G^{(-)}. \tag{3.37}$$

Из сравнения тождеств (3.30) и (3.37) непосредственно вытекает

Следствие. *Для любого* $n\ (1 \leqslant n < +\infty)$ *справедливы тождества*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} R_k^{(s)}(\zeta)\, M_k^{(s)}(z), \quad \zeta \in G^{(-)}, \ z \in G^{(+)}. \tag{3.38}$$

Тождество (3.38) дает нам возможность трактовать ряд основных результатов работы [4] о разложениях по системам вида $\{M_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ в терминах, введенных в данной статье, более простых по своей природе систем простых дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$. На этом, однако, мы останавливаться не будем.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.X.1973

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաների բիօրթոգոնալ սիստեմներ և Կոշու կորիզի ներկայացումներ *(ամփոփում)*

Մալմքվիստի և Տակենակայի կողմից ([7]—[8]) մտցվել են ֆիքսված բևեռներով ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմներ՝ օրթոնորմավորված $|z| = 1$ *շրջանագծի վրա։*

Հեղինակի մի շարք աշխատանքներում ([1]—[4]) այս սիստեմների և սրանց հիման վրա կազմված (Ֆաբերի բազմանդամներին համանման) ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների միջոցով, որոնք առաջանում են K *կոնտինուումից և այդ սիստեմների բևեռներ հանդիսացող* $\{\omega_k\}_1^\infty \subset k$ *կետերի հաջորդականությունից, ստացվել են Կոշու կորիզի ներկայացումներ շրջանում և ուղղի եզրով ժորդանյան տիրույթներում։*

Նշված ներկայացումները թույլ տվեցին բացահայտելու, որ անալիտիկ ֆունկցիաների պատշաճ դասերում, որոնք էապես կախված են վերոհիշյալ սիստեմների բևեռների տեղաբաշխումից, այդ սիստեմները այս կամ այն իմաստով բազիս են կազմում։

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է Կոշու կորիզի ներկայացման խնդրի մեկ այլ մոտեցում նախօրոք տրված բազմապատկության ֆիքսված բևեռներ ունեցող պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների միջոցով։ Այս մոտեցումը հիմնվում է շրջանագծի կամ ուղղի ժորդանյան տիրույթի եզրի վրա բիօրթոգոնալ ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ սիստեմների կառուցման վրա։

---

* См. [4], формулу (4.8).

M. M. JRBASHIAN (Džrbašian). *Biorthogonal systems of rational functions and representations of Cauchy kernel* (summary)

Malmquist and Takenaka [7]—[8] had introduced systems of rational functions with fixed poles, orthonormal on the circumference $|z|=1$.

In a series of papers by the author [1]—[4] representations of Cauchy kernel have been established in the circle and in Jordan domains with rectifiable boundaries by means of these systems and systems of rational functions formed on their basis (analogues of Faber polynomials), generated by the continuum K and the sequence of numbers $\{\omega_k\}_1^\infty \overline{\subset} K$ — the poles of these systems.

The indicated representations permitted to show that in proper classes of analytical functions, essentially depending on the distribution of poles of the mentioned above systems, the letter form bases in this or that sense.

In the present paper another approach to the problem of representation of Cauchy kernel is offered this time by means of simplest fractions with fixed poles of prescribed multiplicity. Thy approach is based on the construction of special systems of rational functions biorthogonal on the circumference or the boundary of a Jordan domain with rectifiable boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 9, № 7, 1956, 3—28.
2. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 10, № 1, 1957, 21—29.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143, № 1, 1962, 17—20.
4. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
5. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 4, № 1, 1961, 9—31.
6. *М. М. Джрбашян.* Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Мат. сб. 91 (133): 4 (8), 1973, 580—626.
7. *E. Malmquist.* Sur la détermination d'une classe de fonctions analytique par le rusvaleurs dans un ensemble donné de points, comptes rendus du simième congrès (1925) des mathèmaticiens Scandinaves, Kopenhagen, 1926, 253—259.
8. *S. Takenaka.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese journal of mathematics, 2, 1925, 129—145.
9. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
10. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 1, 1966, 3—24.
11. *А. А. Китбалян.* Разложения по обобщенным тригонометрическим системам, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 16, № 6, 1964, 3—24.
12. *Г. Ц. Тумаркин.* Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 2, 1966, 89—105.