ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

В. И. КРУТИНЬ

О ВЕЛИЧИНАХ ДЕФЕКТОВ Р. НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ПРИ $|z|<1$ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $|z|<R$ функция, $T(r,f)$—ее неванлинновская характеристика*. Определим

$$\delta(a,f)=\underline{\lim}_{r\to R}\frac{m(r,a)}{T(r,f)}=1-\overline{\lim}_{r\to R}\frac{N(r,a)}{T(r,f)}.$$

Величина $\delta(a,f)$ называется величиной дефекта $f(z)$ в точке a в смысле Р. Неванлинны.

Обозначим (см. [4], стр. 147)

$$E_N(f)=\{a:\ \delta(a,f)>0\}.$$

$E_N(f)$ называется множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Р. Неванлинны.

Теорема Р. Неванлинны о величинах дефектов и о множестве дефектных значений $E_N(f)$ (см. [3], стр. 271, 275) утверждает:

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z\neq\infty$, либо мероморфная при $|z|<1$ функция и

$$\underline{\lim}_{r\to 1}\frac{\ln\frac{1}{1-r}}{T(r,f)}=0, \tag{1.1}$$

тогда

а) множество $E_N(f)$ не более чем счетно;

б) величины дефектов мероморфной функции $f(z)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a)}\delta(a,f)\leqslant 2. \tag{1.2}$$

Если же условие (1.1) не выполне

$$\underline{\lim}_{r\to 1}\frac{T(r,f)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\lambda>0, \tag{1.3}$$

то утверждение (a) остается в силе, при этом

* Здесь и далее мы будем придерживаться стандартных обозначений неванлинновской теории.

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Известно, что для функций $f(z)$, мероморфных при $|z| < 1$, ограниченного вида множество $E_N(f)$ может иметь положительную линейную меру, а если $f(z)$ не является функцией ограниченного вида, то множество $E_N(f)$ имеет внутреннюю емкость нуль (см. [3], стр. 280).

Величины дефектов мероморфных функций в настоящее время исследованы еще не до конца. Здесь, главным образом, получены результаты для мероморфных при $z \neq \infty$ функций.

Известен следующий результат (см. [2], стр. 139, [6]).

Теорема А. *Если $f(z)$—мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ*, то дефекты Р. Неванлинны подчинены следующему условию:*

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f) < \infty \tag{1.4}$$

при

$$\alpha \geqslant \frac{1}{3}.$$

Если же $\alpha < \frac{1}{3}$, то для мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного нижнего порядка λ ряд (1.4) *может расходиться.*

При переходе от мероморфных функций при $z \neq \infty$ конечного нижнего порядка к мероморфным при $z \neq \infty$ функциям бесконечного нижнего порядка мы наблюдаем резкое отличие в свойствах их величин дефектов.

Именно, справедливо такое утверждение (см. [2], стр 125).

Теорема Б. *Пусть a_ν — произвольная последовательность конечных комплексных чисел, и δ_ν — последовательность положительных чисел $1 \leqslant \nu \leqslant N \leqslant \infty$, подчиненная условию*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu \leqslant 1.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$ бесконечного нижнего порядка λ такая, что $\delta(a_\nu, f) = \delta_\nu$ $(1 \leqslant \nu < N)$ и $f(z)$ не имеет дефектных значений, отличных от a_ν.

---

* Напомним определение порядка ρ и нижнего порядка λ мероморфной при $|z| < R < \infty$ функции $f(z)$. Если $R = \infty$

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, f)}{\ln r}; \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, f)}{\ln r}.$$

Если $R < \infty$

$$\rho = \overline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln(T(r, f))}{\ln \frac{1}{R-r}}; \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln \frac{1}{R-r}}.$$

Этим самым в 1962 году полностью была решена „узкая" обратная задача теории распределения значений мероморфных функций для целых функций бесконечного нижнего порядка (см. [4], стр. 488).

Приведем теперь следующие две теоремы о величинах дефектов и структуре множества дефектных значений мероморфных при $|z|<1$ функций.

Теорема В. (см. [5]). *Для любого $\rho>0$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ существует аналитическая в единичном круге функция порядка ρ и нормального типа, для которой a_j, $j=1, 2,\cdots$ являются дефектными.*

Теорема С. (см. [1]). *Для любого ρ, $0<\rho<\infty$ и последовательности $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty$ существует мероморфная при $|z|<1$ функция $h_\rho(z)$ порядка ρ, для которой*

$$\delta(a_k, h_\rho)\geqslant\frac{\pi\rho}{1+\pi\rho}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2(1+\rho)}}{4}\right)^{3+2\rho}\cdot\eta_k^3,$$

где a_k принадлежит наперед заданному не более чем счетному множеству конечных комплексных чисел.

В настоящей работе мы усиливаем результат теоремы С.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leqslant 2,$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность конечных комплексных чисел и $\rho>0$ — любое наперед заданное число.

Существует мероморфная при $|z|<1$ функция $g(z, \rho)$ порядка ρ такая, что

$$\delta(a_n, g)\geqslant\frac{\delta_n}{4},\quad n=1, 2,\cdots.$$

Таким образом, эта теорема показывает, что свойства величин дефектов мероморфных при $|z|<1$ функций конечного порядка ρ более близки к свойствам величин дефектов мероморфных при $z\neq\infty$ функции бесконечного нижнего порядка.

§ 2. Вспомогательные соотношения

Проведем доказательство теоремы для случая, когда ρ — любое конечное положительное число. Для дальнейших конструкций нам необходимо исследовать асимптотические свойства специального класса аналитических при $|z|<1$ функций. Рассмотрим для $\rho>0$ целую функцию Миттаг-Леффлера конечного порядка $\rho+1$

$$E_{\rho+1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho+1}\right)}.$$

Для этой функции хорошо известно следующее асимптотическое представление:

$$E_{\rho+1}(z)=\begin{cases}(\rho+1)\,e^{z^{\rho+1}}+\psi_1(z), & |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2(\rho+1)} \quad (2.1)\\ \psi_2(z), & \frac{\pi}{2(\rho+1)}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi, \quad (2.2)\end{cases}$$

где при $|z|>1$

$$|\psi_j(z)|\leqslant\frac{C_1}{|z|}\quad(j=1,\,2). \tag{2.3}$$

Если же $|z|\leqslant1$, то очевидно*

$$|E_{\rho+1}(z)|\leqslant E_{\rho+1}(1)\leqslant C_2.$$

Рассмотрим круг $|z|<1$ и область A_0, которую мы назовем круговой луночкой, ограниченную двумя дугами

$$\Gamma_1\left(\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right)=\left\{|z|<1\cap\operatorname{Re}z>0\cap\left|z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}}\right\};$$

$$\Gamma_2\left(\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right)=\left\{|z|<1\cap\operatorname{Re}z>0\cap\left|z-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}}\right\}.$$

Пусть $z_1^r=x_1^r+iy_1^r$; $z_2^r=x_1^r-iy_1^r$ есть точки пересечения границы луночки A_0 с окружностью $|z|=r$ $(0<r_0\leqslant r<1)$

$$x_1^r=r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}};$$

$$y_1^r=-r^2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}};$$

$$\alpha(r)=\arg z_1^r=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cdot(1-r^2)}{\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}}}; \tag{2.4}$$

* Здесь и далее буквы C обозначают положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от рассматриваемой функции.

$$-\alpha(r) = \arg z_2'. \tag{2.5}$$

Выберем для аналитической при $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ функции $d(z)=\frac{z}{1-z}$ непрерывную ветвь $\arg d(z)$ такую, что $-\frac{\pi}{2}<\arg d(z)<\frac{\pi}{2}$. Тогда для любого ρ, $0<\rho<\infty$, функция $d^{1+\rho}(z)$ будет однозначной и аналитической при $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

Легко видеть, что функция $d(z)$ отображает луночку A_0 на угол $|\arg d(z)|\leqslant\frac{\pi}{2(\rho+1)}$

$$\arg d(re^{i\varphi}) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - r};\ z = re^{i\varphi}.$$

При изменении z вдоль дуги $\theta=\{z\colon |z|=r,\ |\arg z|<\alpha(r)\}$ $\arg d(z)$ изменяется монотонно от $-\frac{\pi}{2(\rho+1)}$ до $\frac{\pi}{2(\rho+1)}$. Заметим также, что $|d(re^{i\varphi})|$ монотонно убывает при $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha(r)$, $0\geqslant\varphi\geqslant-\alpha(r)$

$$\max_{z\in\theta}|d(z)| = d(r) = \frac{r}{1-r}, \tag{2.6}$$

$$\min_{z\in\theta}|d(z)| = |d(re^{i\alpha(r)})|, \tag{2.7}$$

причем $(0<r_0\leqslant r<1)$

$$\frac{C_3(1-\varepsilon(r))}{1-r}\leqslant|d(re^{i\alpha(r)})|<\frac{C_3(1+\varepsilon(r))}{1-r}, \tag{2.8}$$

где $C_3=\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}$; $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to 1$.

Определим далее аналитическую при $|z|<1$ функцию

$$e(z,\rho) = E_{\rho+1}\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

Используя (2.1)—(2.3) имеем при $z\in A_0$ $(0<r_0\leqslant r<1)$

$$|e^{d^{\rho+1}(z)}|\,(\rho+1-|\psi_1(z)|)\leqslant|e(z,\rho)|\leqslant|e^{d^{\rho+1}(z)}|\,(\rho+1+|\psi_1(z)|).$$

$$I=\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln^+|e(re^{i\varphi},\rho)|\,d\varphi\geqslant\operatorname{Re}\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}d^{\rho+1}(re^{i\varphi})\,d\varphi\,+$$

$$+\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln(\rho+1-|\psi_1(re^{i\varphi})|)\,d\varphi = I_1+\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln\omega_1(re^{i\varphi})\,d\varphi;$$

$$I \leqslant \operatorname{Re} \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} d^{\rho+1}(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln(1+\rho+|\psi_1(re^{i\varphi})|)\, d\varphi =$$

$$= I_1 + \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln \omega_2(re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{2.9}$$

В силу (2.3), (2.7) — (2.9) $(0 < r_0 \leqslant r < 1)$

$$\omega_1(re^{i\varphi}) = \rho + 1 - |\psi_1(re^{i\varphi})| \geqslant \rho + \frac{1}{2} = C_4,$$

$$\omega_2(re^{i\varphi}) = \rho + 1 + |\psi_1(re^{i\varphi})| < \rho + 2 = C_5.$$

Поэтому из (2.4) следует

$$\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln \omega_1(re^{i\varphi})\, d\varphi \geqslant C_6(1-r), \tag{2.10}$$

$$\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln \omega_2(re^{i\varphi})\, d\varphi \leqslant C_7(1-r). \tag{2.11}$$

Оценим I_1.

Рассмотрим сектор $D_r = \{z\colon |z| \leqslant r,\ |\arg z| \leqslant \alpha(r)\}$. Функция $d^{\rho+1}(z)$ — аналитическая в этом секторе. Обозначим через L границу сектора D_r.

По теореме Коши

$$0 = i \int_L \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\rho+1} \frac{dz}{z} = i \int_0^r \left[\left(\frac{te^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1}\right] \frac{dt}{t} - \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1} d\varphi,$$

откуда

$$\int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1} d\varphi = i \int_0^r \left[\left(\frac{te^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1} - \left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1}\right] \frac{dt}{t}, \tag{2.12}$$

$$\int_0^r \left(\frac{te^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1} \frac{dt}{t} = \int_0^{re^{-i\alpha}} \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\rho+1} \frac{du}{u} = \int_0^{re^{-i\alpha}} \frac{u^\rho\, du}{(1-u)^{\rho+1}} =$$

$$= \int_0^{re^{-i\alpha}} \frac{du}{(1-u)^{\rho+1}} - \int_0^{re^{-i\alpha}} \frac{1-u^\rho}{(1-u)^{\rho+1}}\, du = \frac{1}{\rho(1-re^{-i\alpha})^\rho} - \frac{1}{\rho} + Q_1(r),$$

где

$$|Q_1(r)| \leqslant \begin{cases} 2\ln\dfrac{1}{1-r}, & \rho \leqslant 1 \\ \dfrac{2(\rho+1)}{\sin\dfrac{\pi}{4\rho}} \cdot \dfrac{1}{(1-r)^{\rho-1}}, & \rho > 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Аналогично

$$\int_0^r \left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{(1-re^{i\alpha})^\rho} - \frac{1}{\rho} + Q_2(r),$$

где $Q_2(r)$ удовлетворяет соотношению (2.13).

Учитывая (2.4), (2.12) имеем: $(0 < r_0 \leqslant r < 1)$

$$\operatorname{Re} \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1} d\varphi = \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\rho}\left[\frac{1}{(1-re^{-i\alpha})^\rho} - \frac{1}{(1-re^{i\alpha})^\rho}\right]\right\} +$$

$$+ Q(r) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\alpha(r))^{\rho/2}} \times$$

$$\times \sin\left[\rho \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\alpha(r)}{1-r\cos\alpha(r)}\right] + Q(r), \tag{2.14}$$

где $Q(r)$ удовлетворяет соотношению (2.13).

Из (2.4), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) следует $(0 < r_0 < r < 1)$

$$I \leqslant \frac{C_8(1+2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{2.15}$$

$$I \geqslant \frac{C_8(1-2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{2.16}$$

где

$$C_8 = \frac{2}{\rho}\cos^\rho\frac{\pi}{2(\rho+1)} \sin\frac{\rho\pi}{2(\rho+1)}; \tag{2.17}$$

$$\varepsilon(r) \to 0 \quad \text{при } r \to 1. \tag{2.18}$$

§ 3. Доказательство основной теоремы

Пусть $\rho > 0$ — произвольное конечное число. Положим $\alpha_k = \dfrac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ — невозрастающая последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{k=1}^\infty \delta_k \leqslant 2.$$

Рассмотрим далее функции

$$d_k(z, \rho) = \delta_k^{\frac{1}{1+\rho}} d\left(ze^{-i2\pi a_k}\right),$$

$$e_k(z, \rho) = E_{\rho+1}(d_k(z, \rho)).$$

Асимптотические свойства $e_k(z, \rho)$ следуют из асимптотических свойств $e(z, \rho)$. В частности

$$\int\limits_{2\pi a_k - \alpha(r)}^{2\pi a_k + \alpha(r)} \ln^+ |e_k(re^{i\varphi}, \rho)|\, d\varphi \leqslant \frac{\delta_k C_8 (1 + 2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{2\pi a_k - \alpha(r)}^{2\pi a_k + \alpha(r)} \ln^+ |e_k(re^{i\varphi}, \rho)|\, d\varphi \geqslant \frac{\delta_k C_8 (1 - 2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.2}$$

где C_8, $\varepsilon(r)$ определяются (2.17), (2.18).

Рассмотрим далее две последовательности чисел: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность произвольных конечных комплексных чисел, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k |a_k| = S_2, \quad S = \max(S_1, S_2).$$

Определим

$$g_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(z, \rho), \tag{3.3}$$

$$g_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k e_k(z, \rho). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что функции (3.3), (3.4) — аналитические в круге $|z| < 1$,

$$g(z, \rho) = \frac{g_2(z, \rho)}{g_1(z, \rho)} \tag{3.5}$$

— мероморфная при $|z| < 1$ функция.

Лемма 1. *Для характеристики $T(r, g)$ справедлива следующая оценка*

$$T(r, g) \leqslant \frac{C_8 (1 + 3\varepsilon(r))}{\pi (1-r)^\rho} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 1$, C_8 определяется (2.17).

Доказательство.

$$T(r, g) \leqslant T(r, g_1) + T(r, g_2) + O(1), \tag{3.7}$$

$$T(r, g_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho) \right| d\varphi. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\theta_1^k = \{z\colon |z| = r,\ |\arg z - 2\pi a_k| \leqslant \alpha(r)\},$$

$$\theta_2^k = \{z\colon |z| = r \setminus \theta_1^k\}.$$

Найдем номер N такой, что

$$\theta_1^k \cap \theta_1^j = \varnothing,\ k, j < N$$

из соотношения

$$2\pi a_N - 2\pi a_{N+1} \leqslant 2\alpha(r)$$

или

$$\frac{1}{2^N} \leqslant \frac{2}{\pi}\alpha(r). \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что мера длины дуги окружности радиуса r на которой множества θ_1^k пересекаются при различных k не превосходит $\left(\frac{2}{\pi}+2\right)\alpha(r)$ и в силу (2.4) имеет порядок $1-r$ при $0<r_0\leqslant r<1$.

При $i<N$ учитывая (2.1)—(2.3), (3.1), имеем

$$\int\limits_{2\pi a_l - \alpha(r)}^{2\pi a_l + \alpha(r)} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{2\pi a_l - \alpha(r)}^{2\pi a_l + \alpha(r)} \ln\left(C_9\cdot S + (\rho+1)\, b_l \left|e^{d_l^{\rho+1}(re^{i\varphi}, \rho)}\right|\right) d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_l C_8 (1+2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho} + \ln(C_9\cdot S + 1 + \rho)\cdot 2\alpha(r),$$

где $C_9 = \max(C_1, C_2)$.

Обозначим

$$\Omega_1 = \bigcup_{l=1}^{N-1} [2\pi a_l - \alpha(r),\ 2\pi a_l + \alpha(r)],$$

$$\Omega_2 = [0,\ 2\pi a_N + \alpha(r)] \cup [2\pi - \alpha(r),\ 2\pi],$$

$$\Omega_3 = 2\pi \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2).$$

Тогда учитывая (2.1)—(2.4), (2.6), (3.1), (3.8), имеем

$$T(r, g_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_1} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k (re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{N-1} \delta_l \frac{C_8 (1+2\varepsilon (r))}{(1-r)^\rho} + \frac{\delta_N C_{10} (1+\varepsilon (r))}{2\pi\ (1-r)^\rho} + C_{11}, \tag{3.10}$$

где $C_{10} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}$.

Аналогично получаем, что оценка (3.10) имеет место для характеристики $T(r, g_2)$. Из (3.9) следует, что $N \to \infty$ при $r \to 1$, т. е. $\delta_N \to 0$ при $r \to 1$. Поэтому соотношение (3.6) непосредственно следует из (3.7), (3.10).

Лемма 2. *Для неванлинновской функции приближения $m(r, a_n, g)$ справедлива следующая оценка:*

$$m(r; a_n, g) > \frac{1}{2\pi}\frac{\delta_n C_8 (1-2\varepsilon (r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.11}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 1$, C_8 определяется соотношением (2.17).

Доказательство.

$$|g(z) - a_n| = \frac{\left|\sum\limits_{k\neq n} b_k (a_k - a_n) e_k (z, \rho)\right|}{\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_k (z, \rho)\right|}$$

n — фиксировано.

Выберем r_0 настолько большим, чтобы $\theta_1^n \cap \theta_1^k = \varnothing$, $k \neq n$, $0 < r_0 \leqslant r < 1$.

Пусть $z \in \theta_1^n$. Учитывая (2.1),(2.3) имеем

$$\left|\sum_{k\neq n} b_k (a_k - a_n) e_k(z, \rho)\right| \leqslant 2 S \cdot C_9,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k (z, \rho)\right| \geqslant b_n |e_n (z, \rho)| - 2SC_9,$$

$$\frac{1}{|g(z, \rho) - a_n|} \geqslant \frac{b_n |e_n (z, \rho)| - 2SC_9}{2SC_9}.$$

Из (3.2) следует, что

$$m(r, a_n, g) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi\alpha_n - \alpha(r)}^{2\pi\alpha_n + \alpha(r)} \ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\varphi}, \rho) - a_n|} d\varphi > \frac{\delta_n C_8 (1-2\varepsilon (r))}{2\pi (1-r)^\rho}.$$

Теорема 1 следует теперь из оценок (3.6), (3.11).

Действительно

$$\delta(a_n, g) = \varliminf_{r\to 1} \frac{m(r, a_n, g)}{T(r, g)} > \frac{\delta_n}{2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k} > \frac{\delta_n}{4}.$$

Из (3.6), (3.11) вытекает также, что порядок функции $h(z, \rho)$ равен ρ.

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогично можно доказать теорему для функций бесконечного порядка, если вместо функций Миттаг-Леффлера конечного порядка брать функции Миттаг-Леффлера бесконечного порядка (см. [2], стр. 125).

Роль луночки A_0 теперь будет играть область B_0, которая является пересечением двух областей:

$$B_0^1 = \left\{\operatorname{Re} z > 0 \cap |z| < 1 \cap \left|z - 1 - \frac{i}{2\pi}\right| > \frac{1}{2\pi} \cap \left|z - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

$$B_0^2 = \left\{\operatorname{Re} z > 0 \cap |z| < 1 \cap \left|z - 1 + \frac{i}{2\pi}\right| > \frac{1}{2\pi} \cap \left|z - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Замечание 2. Для доказательства теоремы при $\rho = 0$ достаточно рассмотреть функции ограниченного вида (см. [3], стр. 185).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задачи и руководство работой.

Харьковский государственный
университет
им. А. М. Горького

Поступила 20.III.1972

Վ. Ի. ԿՐՈՒՏԻՆ. $|z| < 1$ շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլիննայի դեֆեկտների մեծությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. դիցուք $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ մոնոտոն նվազող դրական թվերի հաջորդականությունը այնպիսին է, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — վերջավոր կոմպլեքս թվերի կամայական հաջորդականություն է և $\rho > 0$ ցանկացած նախօրոք տված թիվ է։

Գոյություն ունի $|z| < 1$ շրջանում ρ կարգի այնպիսի մերոմորֆ $g(z, \rho)$ ֆունկցիա, որ

$$\delta(a_n, g) \geqslant \frac{\delta_n}{4}, n = 1, 2, \cdots.$$

V. I. KRUTIN. *On Nevanlinna's deficiencies values for functions meromorphic in* $|z| < 1$ (summary)

In this paper the following theorem is proved.

Let $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an decreasing sequence of positive numbers, such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an arbitrary sequence of finite complex numbers and $\rho > 0$ —an arbitrary number.

There exists a function $g(z, \rho)$ of order ρ meromorphic in $|z| < 1$, with

$$\delta(a_n, g) \geqslant \frac{\delta_n}{4}, \quad n=1, 2, \cdots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Петренко.* Исследование асимптотических свойств мероморфных функций, Диссертация, Харьков, 1970.
2. *У. Хейман.* Мероморфные функции, М., Изд. „Мир", 1966.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
4. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.
5. *Н. У. Аракелян.* Целые и аналитические функции ограниченного роста с бесконечным множеством дефектных значений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 6, 1970, 486—506.
6. *A. Weitsman.* A theorem on Nevanlinna deficiencies, Acta Math, 128, № 1, 1972.